

一维正方准晶中半无限裂纹问题的解析解*

高 健¹, 刘官厅²

(1. 内蒙古民族大学 数学学院, 内蒙古 通辽 028043;
2. 内蒙古师范大学 数学科学学院, 呼和浩特 010022)

摘要: 运用广义复变函数方法,通过构造适当的广义保角映射,研究了含有沿准周期方向穿透的半无限裂纹的一维正方准晶的反平面弹性问题,给出了在部分裂纹面上受均匀面外剪切时应力场和裂纹尖端应力强度因子的解析解.将此方法进一步推广到半无限裂纹垂直于一维正方准晶的准周期方向穿透的情形中,得到了相应的平面弹性问题的解析解.当准晶体的对称性增加时,还可以得出一维四方准晶相应问题的解析解.

关键词: 一维正方准晶; 半无限裂纹; 广义保角映射; 应力场; 应力强度因子
中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.09.006

引 言

准晶是近三十多年来被发现和报道的一种新的凝聚态物质.2011年,以色列科学家 Shechtman 因发现准晶^[1]而被瑞典皇家科学院授予诺贝尔化学奖.作为一种新型材料,准晶材料因其独特的性能,拥有良好的应用前景,自发现以来,关于它各个方面的研究已取得了若干重要成果^[2-11].其中,文献[11]指出,准晶材料具有较高的脆性,对其内部的缺陷如裂纹、孔洞和位错等很敏感,因此准晶弹性与缺陷力学吸引了许多学者的关注.由于一维六方准晶的结构相对简单,其弹性问题中的弹性常数较少,许多研究者将其作为研究的首选对象,取得了丰富的研究成果^[12-18].文献[12]运用复变函数方法研究了含直位错的一维六方准晶的弹性问题;文献[13]给出了求解一维六方准晶弹性与缺陷力学问题的摄动法;文献[14]和[15]运用复变函数方法和保角映射技术研究了含带有共线不等长双裂纹与带有4条不等长裂纹的椭圆孔口的无限大一维六方准晶的弹性与断裂问题;文献[16]研究了一维六方准晶中的板弯曲问题;文献[17-18]考虑了一维六方准晶中裂纹与位错两种缺陷相互作用的问题,给出了裂纹尖端处的应力强度因子和作用在位错上的力的解析解.

由于一维正方准晶的结构比一维六方准晶更为复杂,从而导致一维正方准晶的弹性与缺陷问题的研究具有更大的难度,不能再像一维六方准晶那样直接用经典弹性的方法对其求解.

* 收稿日期: 2015-01-14; 修订日期: 2015-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(11262017)

作者简介: 高健(1986—),男,内蒙古通辽人,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: gaojianimun@yeah.net); 刘官厅(1966—),男,内蒙古包头人,教授,博士,博士生导师(E-mail: guantingliu@imnu.cn).

对于一维正方准晶,文献[19]运用广义复变函数方法研究了周期平面内的椭圆孔口问题,给出了各个场变量的解析解,而文献[20]将半逆解法推广应用到一维正方准晶周期平面内的弹性问题中,进一步给出了同样问题的各个场变量的显式解析解.文献[21]运用广义复变函数方法与广义保角映射技术,研究了一维正方准晶垂直于准周期方向具有不对称裂纹的圆形孔口的平面弹性问题,得到裂纹尖端处应力强度因子的解析解.然而,关于一维正方准晶中半无限裂纹的弹性与断裂力学问题解析解的研究尚未见相关报道.

本文运用广义复变函数方法,通过构造适当的广义保角映射研究了一维正方准晶中具有沿准周期方向穿透的半无限裂纹的反平面弹性问题,得到了应力场和裂纹尖端处应力强度因子的解析解.此外,将此方法进一步推广到半无限裂纹垂直于一维正方准晶准周期方向穿透的情形中,得到了相应的平面弹性问题的解析解.当一维正方准晶的对称性增加时,给出了一维四方准晶中半无限裂纹问题裂尖处应力强度因子的解析解.

1 带有沿准周期方向穿透的半无限裂纹的一维正方准晶的反平面弹性问题

1.1 广义保角映射的构造与广义解析函数的求解

假设在点群 2mm 一维正方准晶中,沿准周期 x_3 方向有 1 条穿透性的半无限裂纹.考虑在裂纹面上从裂尖起长度为 a 的一段上作用沿准周期 x_3 方向的均匀面外剪应力 p ,无穷远处不作用外载荷,且相位子场应力边界条件(即作用于相位子场的广义力)为 0 时周期平面(x_1-x_2 平面)内的反平面弹性问题,如图 1 所示.记问题的构型所在区域及裂纹面分别为 Ω 和 S .问题的基本方程详见附录.

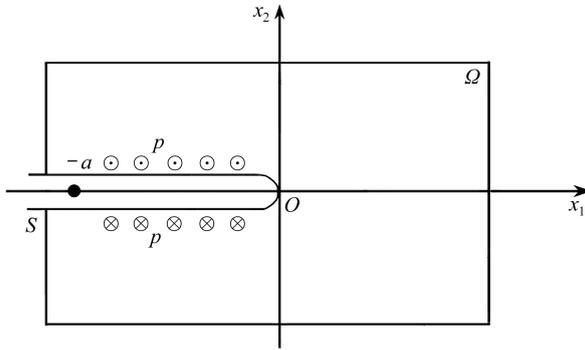


图 1 带有沿准周期方向穿透的半无限裂纹的一维正方准晶的周期平面
 Fig. 1 A periodic plane of 1D orthorhombic quasicrystal with a semi-infinite crack penetrating along the quasiperiodic direction

问题的边界条件为

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow +\infty : \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, H_{31} = H_{32} = 0, \\ x_2 = 0, -\infty < x_1 < -a, x_1 > 0 : \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, H_{31} = H_{32} = 0, \\ x_2 = 0, -a < x_1 < 0 : \sigma_{23} = -p, \sigma_{31} = 0, H_{31} = H_{32} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

将式(1)代入到边界条件的复表示式(A9)中可得

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k(z_k) = p(z_k + a)f_0(z_k), 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \varphi_k(z_k) = 0, \quad (2)$$

其中, $z_k \in S_k (k = 1, 2)$ (S_k 是由物理平面内的裂纹面 S 经仿射变换 $z_k = x_1 + \mu_k x_2$ 后得到的边界) 并且

$$f_0(z_k) = \begin{cases} 1, & -a < z_k < 0, \\ 0, & -\infty < z_k < -a, 0 < z_k < +\infty. \end{cases} \quad (3)$$

由于准晶体在远场不受任何外载荷的作用, 于是式(2)中的 $\varphi_k(z_k)$ 为准晶材料所在区域内的广义解析函数, 即

$$\varphi_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{z_k^n} = a_0^{(k)} + \frac{a_1^{(k)}}{z_k} + \frac{a_2^{(k)}}{z_k^2} + \dots, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

为求得 $\varphi_k(z_k)$, 构造如下广义保角映射:

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = a \left(\frac{1 - \zeta_k}{1 + \zeta_k} \right)^2, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

则 z_k 平面内的区域 Ω_k 被映射到 ζ_k 平面内单位圆 γ_k 的内部 (Ω_k 是区域 Ω 经过仿射变换 $z_k = x_1 + \mu_k x_2$ 得到的区域), 主要对应点为 $\omega_k(1) = 0, \omega_k(i) = -a - 0i, \omega_k(-i) = -a + 0i$.

取单位圆 γ_k 上的点 $\zeta_k = \sigma = e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, 则 $\Omega_k (k = 1, 2)$ 平面内的 2 个点被映射到单位圆上的 1 个点. 若记 $\Phi_k(\zeta_k) = \varphi_k(\omega_k(\zeta_k)) = \varphi_k(z_k)$, 则经广义保角映射式(5)后, 边界条件式(2)变成如下形式:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Phi_k(\sigma) = p[\omega(\sigma) + a]f_0(\omega(\sigma)), \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \Phi_k(\sigma) = 0. \quad (6)$$

对单位圆 γ 内的任意一点 ζ , 将式(6)两边同时乘以 $d\sigma/[2\pi i(\sigma - \zeta)]$, 并沿单位圆周 γ 积分 (注意: 这里当 $k = 1, 2$ 时, γ, ζ 与 $\omega(\sigma)$ 分别对应于 γ_k, ζ_k 与 $\omega_k(\sigma)$), 利用 Cauchy 积分公式可得

$$\sum_{k=1}^2 \Phi_k(\zeta) = F(\zeta), \quad \sum_{k=1}^2 [\lambda_k \Phi_k(\zeta)] = 0, \quad (7)$$

其中 $F(\zeta)$ 为

$$F(\zeta) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) + a}{\sigma - \zeta} f_0(\omega(\sigma)) d\sigma = \frac{p}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{\omega(\sigma) + a}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{pa}{\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - \frac{2pa}{\pi i} \frac{\zeta}{(1 + \zeta)^2} \ln \frac{\zeta - i}{i\zeta - 1} - \frac{2pa}{\pi} \frac{1}{1 + \zeta}.$$

注意到当 $k = 1, 2$ 时, ζ 分别对应于 ζ_k , 于是由式(7)可得

$$\Phi_k(\zeta_k) = \Lambda_k F(\zeta_k), \quad (8)$$

其中 $\Lambda_k (k = 1, 2)$ 是向量 $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ 的 2 个分量.

由广义保角映射式(5)可知其逆映射为

$$\zeta_k = \omega_k^{-1}(z_k) = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{z_k}}{\sqrt{a} + \sqrt{z_k}}. \quad (9)$$

将式(9)代入到式(8)中即可求得广义解析函数 $\varphi_k(z_k)$ 为

$$\varphi_k(z_k) = \Lambda_k g(z_k), \quad (10)$$

其中

$$g(z_k) = F(\omega_k^{-1}(z_k)) =$$

$$\frac{pa}{\pi i} \ln \frac{(\sqrt{z_k} - \sqrt{a}) + i(\sqrt{z_k} + \sqrt{a})}{(\sqrt{z_k} - \sqrt{a}) - i(\sqrt{z_k} + \sqrt{a})} - \frac{p}{2\pi i} (z_k - a) \ln \frac{(\sqrt{z_k} + \sqrt{a}) + i(\sqrt{z_k} - \sqrt{a})}{(\sqrt{z_k} - \sqrt{a}) + i(\sqrt{z_k} + \sqrt{a})} - \frac{p\sqrt{a}}{\pi} (\sqrt{z_k} + \sqrt{a}).$$

1.2 应力场

将广义解析函数式(10)代入到应力场的复表示式(A8)中,经简单的计算即可得到声子场与相位子场应力分量的解析表达式为

$$\begin{cases} \sigma_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Lambda_k g'(z_k), & \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \Lambda_k g'(z_k), \\ H_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \lambda_k \Lambda_k g'(z_k), & H_{32} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \Lambda_k g'(z_k), \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$g'(z_k) = -\frac{p}{\pi} \left(\sqrt{\frac{a}{z_k}} - \arctan \sqrt{\frac{a}{z_k}} \right), \quad k = 1, 2.$$

通过应力场的解析解式(11)可以看出,此时声子场和相位子场的各应力分量不仅与外载荷、裂纹面上的受载长度及材料的几何构型有关,还与准晶材料的各个材料常数有关。

1.3 应力强度因子

裂纹尖端的应力强度因子是分析材料断裂行为和特性的重要参量,由于这里所讨论的裂纹是沿着坐标轴的直裂纹,因此可利用应力强度因子的原始定义式来定义裂尖处的应力强度因子,根据文献[22-23],定义裂纹尖端点(0,0)处的声子场Ⅲ型应力强度因子如下:

$$K_{\text{III}} = \sqrt{2\pi} \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \sqrt{x_1 - 0} \sigma_{23}. \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)经适当的计算可算得裂纹尖端处的声子场Ⅲ型应力强度因子为

$$K_{\text{III}} = p \sqrt{\frac{8a}{\pi}}. \quad (13)$$

上述结果与文献[22]中所给出的半无限裂纹反平面弹性问题的应力强度因子完全一致,这表明此问题中的声子场Ⅲ型应力强度因子与经典线弹性与断裂力学中的结论是相同的,即声子场Ⅲ型应力强度因子 K_{III} 只与外载荷、材料的几何构型及裂纹面上的受载长度有关,而与该准晶材料的材料常数无关。

2 带有垂直于准周期方向穿透的半无限裂纹的

一维正方准晶的平面弹性问题

在点群 2 mm 一维正方准晶中,有 1 条沿其周期方向(假设沿 x_1 轴方向)穿透的半无限裂纹.考虑在裂纹面上从裂尖起长度为 a 的一段上作用沿准周期 x_3 方向的均匀面内拉伸 p ,无穷远处不作用外载荷,且相位子场应力边界条件(即作用于相位子场的广义力)为 0 时非周期平面(x_2 - x_3 平面)内的平面弹性问题,如图 2 所示.记问题的构型所在区域及裂纹面分别为 Ω 和 S .

这里为求得式(A12)与式(A13)中的广义解析函数 $\varphi_k(z_k)$,构造与广义保角映射式(5)形式上完全相同的广义保角映射

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = a \left(\frac{1 - \zeta_k}{1 + \zeta_k} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (14)$$

则 z_k 平面内的区域 Ω_k 被映射到 ζ_k 平面内单位圆 γ_k 的内部 (Ω_k 是区域 Ω 经过仿射变换 $z_k = x_2 + \mu_k x_3$ 后得到的区域), 主要对应点为 $\omega_k(1) = 0, \omega_k(i) = -a - 0i, \omega_k(-i) = -a + 0i$.

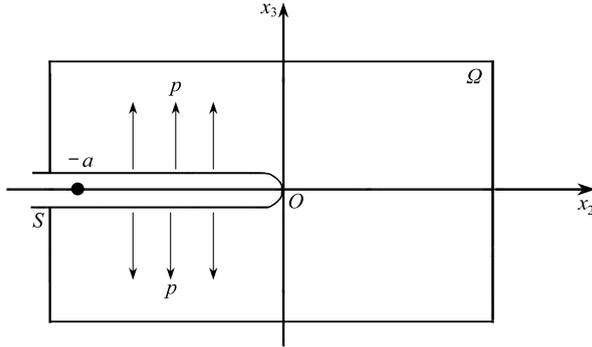


图2 带有垂直于准周期方向穿透的半无限裂纹的一维正方准晶的非周期平面
 Fig. 2 A non-periodic plane of 1D orthorhombic quasicrystal with a semi-infinite crack penetrating perpendicular to the quasiperiodic direction

基于上述广义保角映射, 完全类似于 1.1 小节中的讨论过程, 将边界条件代入边界条件的复表示式 (A13), 并经过一系列的运算后可得

$$\varphi_k(z_k) = \Lambda_k g(z_k), \quad k = 1, 2, 3, \tag{15}$$

其中 $g(z_k)$ 与 1.1 小节中得出的式 (10) 中的 $g(z_k)$ 在形式上相同 (因这里广义保角映射式 (14) 的形式与 1.1 小节中的广义保角映射式 (5) 相同), $\Lambda_k (k = 1, 2, 3)$ 为向量

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mu_2 \eta_3 - \mu_3 \eta_2 \\ \mu_3 \eta_1 - \mu_1 \eta_3 \\ \mu_1 \eta_2 - \mu_2 \eta_1 \end{pmatrix}$$

的 3 个分量, 其中 $\Delta = \mu_1(\eta_2 - \eta_3) + \mu_2(\eta_3 - \eta_1) + \mu_3(\eta_1 - \eta_2)$.

将式 (15) 代入式 (A12) 中即可得到应力场的解析解为

$$\begin{cases} \sigma_{22} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \Lambda_k g'(z_k), & \sigma_{33} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \Lambda_k g'(z_k), \\ \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \Lambda_k g'(z_k), \\ H_{32} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \mu_k \Lambda_k g'(z_k), & H_{33} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \Lambda_k g'(z_k), \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$g'(z_k) = -\frac{p}{\pi} \left(\sqrt{\frac{a}{z_k}} - \arctan \sqrt{\frac{a}{z_k}} \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

根据文献 [22-23], 可定义裂纹尖端点 $(0, 0)$ 处的声子场 I 型、II 型应力强度因子如下:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \sqrt{x_2 - 0} \sigma_{33}, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \sqrt{x_2 - 0} \sigma_{23}. \tag{17}$$

将式 (16) 代入式 (17) 经适当的计算可算得裂尖点 $(0, 0)$ 处声子场 I 型、II 型应力强度因子为

$$K_I = p \sqrt{\frac{8a}{\pi}}, \quad K_{II} = 0. \tag{18}$$

从式(16)中可以看出,此问题的声子场和相位子场应力分量不仅与外载荷、裂纹面上的受载长度及材料的几何构型有关,还与准晶材料的各个材料常数有关,这与前面在裂纹沿一维正方准晶的准周期方向穿透时的反平面问题中所得的结论相同.由式(18)可知,此问题中声子场 I 型应力强度因子与经典弹性理论中半无限裂纹平面弹性问题的 I 型应力强度因子^[22]完全相同,即只与外载荷、材料的几何构型及裂纹面上的受载长度有关,而与该准晶材料的材料常数无关.

3 一维四方准晶中半无限裂纹问题的解析解

相比于一维正方准晶,一维四方准晶的对称性增加,弹性常数减少.以属于 Laue 类 6 的点群 4 mm 一维四方准晶为例,在点群 2 mm 一维正方准晶的基础上,还有下式成立^[9-10]:

$$C_{11} = C_{22}, C_{13} = C_{23}, C_{44} = C_{55}, K_1 = K_2, R_1 = R_2, R_5 = R_6.$$

将上述关系式代入附录中的控制方程(A6)与(A10)中,即可得到点群 4 mm 一维四方准晶对应弹性与缺陷问题的控制方程.对于点群 4 mm 一维四方准晶中半无限裂纹问题,可以沿用前两节中求解点群 2 mm 一维正方准晶的相应问题的方法,给出其应力场的解析解(计算方法及应力场的解析解形式与前两节类似,不再具体列出).进一步还可以得到同样的边界条件下裂纹尖端处的声子场 I 型、II 型及 III 型应力强度因子同样为

$$K_I = p \sqrt{\frac{8a}{\pi}}, K_{II} = 0, K_{III} = p \sqrt{\frac{8a}{\pi}}. \quad (19)$$

此结果表明,点群 4 mm 一维四方准晶中半无限裂纹问题裂尖处的声子场应力强度因子与点群 2 mm 一维正方准晶的同样问题的结果完全相同,且都与经典线弹性和断裂力学中所给出的结果一致,即两类准晶材料相应缺陷问题的声子场应力强度因子的大小都只与外载荷、材料的几何构型及裂纹面上的受载长度有关,而与它们的材料常数无关.

4 结 论

本文运用广义复变函数方法和保角映射技术,通过构造适当的广义保角映射,分别研究了点群 2 mm 一维正方准晶周期平面内半无限裂纹反平面弹性问题和非周期平面内半无限裂纹平面弹性问题,得到了应力场关于外载荷、材料常数、裂纹面上的受载长度及材料几何构型的定量的解析表达式,即应力场的解析解.在此基础上给出了裂纹尖端处声子场 I 型、II 型及 III 型应力强度因子的解析解.当准晶的对称性增加时,进一步讨论了点群 4 mm 一维四方准晶的相应问题,给出了裂纹尖端处声子场应力强度因子的解析解.结果表明,点群 4 mm 一维四方准晶与点群 2 mm 一维正方准晶裂尖处的声子场应力强度因子完全相同,且都与经典线弹性和断裂力学中半无限裂纹问题的结果一致,即声子场应力强度因子的大小只与外载荷、材料的几何构型及裂纹面上的受载长度有关,与相应的准晶材料的材料常数无关.上述结论对于定量地理解半无限裂纹对一维正方准晶力学性能的影响具有一定的意义.

本文所讨论的问题,进一步丰富了一维正方准晶系缺陷问题的内容,为一维正方准晶的应用和设计提供了一定的理论基础.

附 录

取点群 2 mm 一维正方准晶的准周期方向为 x_3 ,垂直于准周期方向的平面为坐标平面 x_1-x_2 ,建立空间直角坐标系.引入如下记号:用 u_i 与 v_j 分别表示声子场与相位子场的位移分量, ε_{ij} 与 ω_{ij} 分别表示声子场与相位

子场的应变分量, σ_{ij} 与 H_{3j} 分别表示声子场与相位子场应力分量, 其中 $i, j = 1, 2, 3$.

以下分别给出当点群 2 mm 一维正方准晶中的缺陷沿准周期方向与垂直于准周期方向穿透时, 其线弹性问题的基本方程.

1 缺陷沿准周期方向穿透时

根据文献[9], 当缺陷沿点群 2 mm 一维正方准晶的准周期方向 x_3 穿透时(如沿准周期方向穿透的无限长直位错, 穿透性裂纹或孔口等), 材料的几何性质将不随准周期方向改变, 即

$$\partial_3 u_i = 0, \partial_3 v = 0, \partial_3 \sigma_{ij} = 0, \partial_3 H_{3j} = 0, \quad (A1)$$

其中 ∂_j 表示 $\partial/\partial x_j (j = 1, 2, 3)$ (下同), 此时所有场变量仅依赖于坐标变量 x_1 和 x_2 .

由文献[9], 将式(A1)分别代入广义 Hooke 定律、几何方程和弹性平衡方程中, 可以得出如下两个相互分离的问题:

问题 I

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22}, \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, H_{33} = R_1\varepsilon_{11} + R_2\varepsilon_{22}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} = 0,$$

其中 C_{ij} 表示声子场的独立弹性常数, R_i 表示声子场与相位子场的耦合弹性常数, 该问题类似于 一维正方准晶的平面弹性问题, 只是多了一个相位子场的物理方程, 可以用经典线弹性理论中的相关方法求解.

问题 II

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_5\omega_{32}, \sigma_{31} = \sigma_{13} = 2C_{55}\varepsilon_{31} + R_6\omega_{31}, \quad (A2)$$

$$H_{31} = 2R_6\varepsilon_{31} + K_1\omega_{31}, H_{32} = 2R_5\varepsilon_{32} + K_2\omega_{32}, \quad (A3)$$

$$\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{j3} = \frac{1}{2}\partial_j u_3, \omega_{3j} = \partial_j v, \quad i, j = 1, 2, \quad (A4)$$

$$\partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} = 0, \partial_1 H_{31} + \partial_2 H_{32} = 0, \quad (A5)$$

其中 C_{ij} 与 K_i 分别表示声子场与相位子场的独立弹性常数, R_i 表示声子场与相位子场的耦合弹性常数, 这是一个声子场与相位子场耦合的反平面问题.

当含有沿准周期方向穿透的缺陷的点群 2 mm 一维正方准晶受到沿准周期方向的剪应力作用时, 在垂直于准周期方向的平面(周期平面)内为声子场与相位子场耦合的反平面问题, 即此时只需考虑问题 II. 由文献[19], 通过引入适当的应力势函数, 并将方程(A2)~(A5)经过一系列的推导可得问题的最终控制方程为

$$(L_1 L_3 + 2L_2^2)U = 0, \quad (A6)$$

其中

$$L_1 = a_1 \partial_2^2 + a_3 \partial_1^2, L_2 = a_2 \partial_2^2 + a_4 \partial_1^2, L_3 = a_5 \partial_2^2 + a_6 \partial_1^2,$$

$$a_1 = \frac{K_1}{2C_{55}K_1 - 2R_6^2}, a_2 = \frac{R_6}{2C_{55}K_1 - 2R_6^2}, a_3 = \frac{K_2}{2C_{44}K_2 - 2R_5^2},$$

$$a_4 = \frac{R_5}{2C_{44}K_2 - 2R_5^2}, a_5 = \frac{C_{55}}{R_6^2 - C_{55}K_1}, a_6 = \frac{C_{44}}{R_5^2 - C_{44}K_2},$$

$U(x_1, x_2)$ 为引入的应力势函数且满足

$$\sigma_{31} = \partial_2 U, \sigma_{23} = -\partial_1 U.$$

由文献[24]可知, 方程(A6)的解可用 2 个广义解析函数 $\varphi_k(z_k) (k = 1, 2)$ 表示为

$$U(x_1, x_2) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k(z_k), \quad z_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad (A7)$$

其中, Re 表示取相应复变量的实部, $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k (k = 1, 2)$ 为方程(A6)的特征方程的特征根, α_k 和 β_k 是依赖于点群 2 mm 一维正方准晶的各弹性常数的实常数. 如果特征根出现重根, 上述方程还可以进一步简化.

各应力分量及边界条件关于广义解析函数 $\varphi_k(z_k) (k = 1, 2)$ 的表达式分别为^[19]

$$\begin{cases} \sigma_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \varphi'_k(z_k), \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi'_k(z_k), \\ H_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mu_k \varphi'_k(z_k), H_{32} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \varphi'_k(z_k), \end{cases} \quad (\text{A8})$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k(z_k) = -\int_s T_p ds, \quad 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k \varphi_k(z_k) = -\int_s T_h ds, \quad (\text{A9})$$

其中

$$\lambda_k = \frac{a_2 \mu_k^2 + a_4}{a_1 \mu_k^2 + a_3} \quad (k = 1, 2),$$

且 T_p 表示作用于声子场边界上的面力, T_h 表示作用于相位子场空间的广义力, s 为边界曲线的积分路径, ds 为弧微分。

2 缺陷垂直于准周期方向穿透时

当点群 2 mm 一维正方准晶中的缺陷垂直于其准周期 x_3 方向穿透, 如缺陷沿周期方向 x_1 穿透时, 所有场变量仅依赖于坐标变量 x_2 和 x_3 。由文献[21]可知, 此时在垂直于周期方向 x_1 的平面(非周期平面)内为声子场与相位子场耦合的平面弹性问题, 由点群 2 mm 一维正方准晶弹性问题的基本方程经过一系列的推导可得问题的最终控制方程为^[21]

$$(L_1 L_3 + L_2^2)U = 0, \quad (\text{A10})$$

其中

$$L_1 = a_4 \partial_2^4 + a_1 \partial_3^4 + (2a_2 + a_6) \partial_2^2 \partial_3^2, \quad L_2 = a_5 \partial_2^3 + (a_3 + a_7) \partial_2 \partial_3^2, \quad L_3 = a_9 \partial_2^2 + a_8 \partial_3^2,$$

$$a_1 = \frac{C_{33} K_3 - R_3^2}{\Delta_1}, \quad a_2 = \frac{R_2 R_3 - C_{23} K_3}{\Delta_1}, \quad a_3 = \frac{C_{23} R_3 - C_{33} R_2}{\Delta_1}, \quad a_4 = \frac{C_{22} K_3 - R_2^2}{\Delta_1},$$

$$a_5 = \frac{C_{23} R_2 - C_{22} R_3}{\Delta_1}, \quad a_6 = \frac{K_2}{\Delta_2}, \quad a_7 = -\frac{R_5}{\Delta_2}, \quad a_8 = \frac{C_{44}}{\Delta_2}, \quad a_9 = \frac{C_{22} C_{33} - C_{23}^2}{\Delta_1},$$

$$\Delta_1 = C_{22} C_{33} K_3 + 2C_{23} R_2 R_3 - C_{22} R_3^2 - C_{33} R_2^2 - C_{23}^2 K_3, \quad \Delta_2 = C_{44} K_2 - R_5^2,$$

$U(x_2, x_3)$ 为引入的应力势函数, 且满足

$$\sigma_{22} = \partial_2^2 U, \quad \sigma_{33} = \partial_2^2 U, \quad \sigma_{23} = -\partial_2 \partial_3 U.$$

由文献[24]可知, 方程(A10)的解可用 3 个广义解析函数 $U_k(z_k)$ ($k = 1, 2, 3$) 表示为

$$U(x_2, x_3) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 U_k(z_k), \quad z_k = x_2 + \mu_k x_3, \quad (\text{A11})$$

其中, Re 表示取相应复变量的实部, $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 1, 2, 3$) 为方程(A10)的特征方程的特征根, α_k 和 β_k 是依赖于点群 2 mm 一维正方准晶的各弹性常数的实常数。如果特征根出现重根, 上述方程还可以进一步简化。

此时, 各应力分量及边界条件关于广义解析函数的表达式为^[21]

$$\begin{cases} \sigma_{22} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \varphi'_k(z_k), \sigma_{33} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi'_k(z_k), \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi'_k(z_k), \\ H_{32} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \mu_k \varphi'_k(z_k), H_{33} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \varphi'_k(z_k), \end{cases} \quad (\text{A12})$$

$$\begin{cases} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z_k) = -\int_s T_3 ds, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi_k(z_k) = \int_s T_2 ds, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \varphi_k(z_k) = -\int_s T_h ds, \end{cases} \quad (\text{A13})$$

其中

$$\varphi_k(z_k) = U'_k(z_k) = \frac{dU_k}{dz_k}, \quad \eta_k = -\frac{(a_3 + a_7)\mu_k^2 + a_5}{a_8 \mu_k^2 + a_9} \quad (k = 1, 2, 3),$$

且 T_2 和 T_3 表示作用于声子场边界上的面力, T_h 表示作用于相位子场空间的广义力, s 为边界曲线的积分路径, ds 为弧微分.

致谢 作者衷心感谢内蒙古民族大学科学研究基金(NMDYB15001)对本文的资助.

参考文献 (References):

- [1] Shechtman D, Blech I, Gratias D, Cahn J W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. *Physical Review Letters*, 1984, **53**(20): 1951-1953.
- [2] 董闯. 准晶材料[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. (DONG Chuang. *The Quasicrystal Material* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1998. (in Chinese))
- [3] DING Di-hua, YANG Wen-ge, HU Cheng-zheng, WANG Ren-hui. Generalized elasticity theory of quasicrystals[J]. *Physical Review B*, 1993, **48**(10): 7003-7010.
- [4] 刘有延, 傅秀军, 董秀清. 一维准晶物理性质[J]. 物理学进展, 1997, **17**(1): 1-24. (LIU You-yan, FU Xiu-jun, DONG Xiu-qing. Physical properties of one-dimensional quasicrystals[J]. *Progress in Physics*, 1997, **17**(1): 1-24. (in Chinese))
- [5] 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999. (FAN Tian-you. *Theory and Application of the Mathematic Elasticity About Quasicrystal* [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1999. (in Chinese))
- [6] 王仁卉, 胡承正, 桂嘉年. 准晶物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (WANG Ren-hui, HU Cheng-zheng, GUI Jia-nian. *Quasicrystal Physics* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [7] 丁棣华, 王仁卉, 杨文革, 胡承正. 准晶的弹性、塑性与位错[J]. 物理学进展, 1998, **18**(3): 223-260. (DING Di-hua, WANG Ren-hui, YANG Wen-ge, HU Cheng-zheng. Elasticity, plasticity and dislocations of quasicrystals[J]. *Progress in Physics*, 1998, **18**(3): 223-260. (in Chinese))
- [8] PENG Yan-ze, FAN Tian-you. Elastic theory of 1D-quasiperiodic stacking of 2D crystals[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2000, **12**(45): 9381-9387.
- [9] 刘官厅. 准晶弹性的复变方法与非线性方程的显式解[M]. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 2005. (LIU Guan-ting. *The Complex Variable Function Method of Quasicrystals Elasticity and Analytical Solutions of Nonlinear Equations* [M]. Hohhot: Inner Mongolia People Press, 2005. (in Chinese))
- [10] WANG Ren-hui, YANG Wen-ge, HU Cheng-zheng, DING Di-hua. Point and space groups and elastic behaviours of one-dimensional quasicrystals[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1997, **9**(11): 2411-2422.
- [11] 孟祥敏, 佟百运, 吴玉琨. $Al_{65}Cu_{20}Co_{15}$ 准晶体的力学性能[J]. 金属学报, 1994, **30**(2): 61-64. (MENG Xiang-min, TONG Bai-yun, WU Yu-kun. Mechanical properties of $Al_{65}Cu_{20}Co_{15}$ quasicrystal[J]. *Acta Metallurgica Sinica*, 1994, **30**(2): 61-64. (in Chinese))
- [12] LI Xian-fang, FAN Tian-you. A straight dislocation in one dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Physica Status Solidi (B)*, 1999, **212**(1): 19-26.
- [13] PENG Yan-ze, FAN Tian-you, JIANG Fu-ru, ZHANG Wei-guo, SUN Ying-fei. Perturbative method for solving elastic problems of one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2001, **13**(18): 4123-4128.
- [14] 郭俊宏, 刘官厅. 一维六方准晶中带双裂纹的椭圆孔口问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(4): 439-446. (GUO Jun-hong, LIU Guan-ting. Analytical solutions of problem about

- an elliptic hole with two straight cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(4): 439-446. (in Chinese))
- [15] GUO Jun-hong, LU Zi-xing. Exact solution of four cracks originating from an elliptical hole in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **217**(22): 9397-9403.
- [16] GAO Yang, XU Si-peng, ZHAO Bao-sheng. Boundary conditions for plate bending in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Journal of Elasticity*, 2007, **86**(3): 221-233.
- [17] LIU Guan-ting, GUO Rui-ping, FAN Tian-you. On the interaction between dislocations and cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Chinese Physics*, 2003, **12**(10): 1149-1155.
- [18] 李联和, 刘官厅. 一维六方准晶中螺形位错与楔形裂纹的相互作用[J]. 物理学报, 2012, **61**(8): 326-330. (LI Lian-he, LIU Guan-ting. A screw dislocation interacting with a wedge-shaped crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(8): 326-330. (in Chinese))
- [19] 于静, 刘官厅. 一维正方准晶椭圆孔口平面弹性问题的解析解[J]. 固体力学学报, 2010, **31**(4): 411-416. (YU Jing, LIU Guan-ting. Analytic solution of plane elasticity of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with elliptical hole[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(4): 411-416. (in Chinese))
- [20] 刘官厅, 冯中华. 一维正方准晶椭圆孔口反平面问题的半逆解法[J]. 工程力学, 2013, **30**(2): 38-43. (LIU Guan-ting, FENG Zhong-hua. Half-inverse method for the anti-plane problem of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with elliptic hole[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(2): 38-43. (in Chinese))
- [21] 刘莹, 刘官厅. 一维正方准晶垂直于准周期方向具有不对称共线裂纹的圆形孔口问题[J]. 数学的实践与认识, 2012, **42**(4): 124-132. (LIU Ying, LIU Guan-ting. The problem of a circular hole with asymmetry collinear cracks perpendicular to quasi-periodic direction in one-dimensional orthorhombic quasicrystals[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2012, **42**(4): 124-132. (in Chinese))
- [22] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (FAN Tian-you. *Fracture Theory Basis* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [23] GAO Cun-fa, FAN Wei-xun. Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(17): 2527-2540.
- [24] Sosa H A. Plane problems in piezoelectric media with defects[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, **28**(4): 491-505.

Analytical Solutions for Problems of 1D Orthorhombic Quasicrystal With Semi-Infinite Crack

GAO Jian¹, LIU Guan-ting²

(1. *College of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao, Inner Mongolia 028043, P.R.China;*

2. *College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, P.R.China)*

Abstract: The anti-plane elasticity problem of the 1D orthorhombic quasicrystal with a semi-infinite crack penetrating along the quasiperiodic direction was investigated through introduction of a new generalized conformal mapping and with the generalized complex variable method. The analytical solutions of the stress fields and the stress intensity factors under the action of the uniform out-of-plane shear load on the partial crack surface were obtained. In addition, this method was applied to solve the plane elasticity problem of the 1D orthorhombic quasicrystal with a semi-infinite crack penetrating perpendicular to the quasiperiodic direction and the analytical solutions were derived. Under the condition of higher symmetry, the analytical solutions for the corresponding problem of the 1D tetragonal quasicrystal were also obtained.

Key words: 1D orthorhombic quasicrystal; semi-infinite crack; generalized conformal mapping; stress field; stress intensity factor

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11262017)