

# Camassa-Holm 方程的拟周期解 及其渐近行为\*

王振<sup>1</sup>, 秦玉鹏<sup>1</sup>, 邹丽<sup>2,3</sup>, 马瑞芳<sup>1</sup>, 朱贵勋<sup>2</sup>

- (1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116085;
2. 大连理工大学 船舶工程学院, 辽宁 大连 116085;
3. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116085)

**摘要:** 近20年来,浅水波模型 Camassa-Holm (CH) 方程受到诸多研究者关注.在之前的工作中,通过 Hirota 双线性方法得到了 CH 方程的单周期解.基于此,该文将对  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解及其渐近行为进行研究.首先,回顾了坐标变换,扩展的双线性形式和 Riemann (黎曼)  $\theta$ -函数等内容,并在此基础上利用 Hirota 双线性方法构造了在  $N = 2$  时 CH 方程含有多个参数的拟周期解,并且该拟周期解是由 Riemann  $\theta$ -函数表示的.其次,发现了该拟周期解渐近行为的一个特点,即 CH 方程的此拟周期解可以退化为其 2 孤子解.

**关键词:** Camassa-Holm 方程; 双线性形式; 拟周期解; Riemann  $\theta$ -函数

**中图分类号:** O29; O368 **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.09.010

## 引言

1981年, Fuchssteiner 和 Fokas<sup>[1]</sup> 在研究遗传算子时最早提出了 Camassa-Holm (CH) 方程<sup>[2-4]</sup>:

$$u_t + 2k^2 u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1)$$

其中,  $u = u(x, t)$ ,  $u_t = \partial u / \partial t$ ,  $u_x = \partial u / \partial x$  等,之后被 Camassa 和 Holm 从浅水波模型中推导出来并由 Johnson 和 Constantin 等获得其孤立尖波解<sup>[5-6]</sup>,引起了广泛注意.

CH 方程有两个重要特征:1) 对任意参数  $k$  都完全可积,因此 CH 方程被看做 Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程的可积性扩展,而在文献[7]中已经证明 BBM 方程是不可积的;2) CH 方程容许尖波解等不光滑解的存在,且其非线性作用的表现方式与传统孤子方程不同.

解析解在非线性问题的研究中起到了很大的作用,它使得对数值解法的证明变得更加容易,在对解进行稳定性分析的过程中也能起到一定作用.近些年来,越来越多的人致力于求非线性方程的解,如周期解、尖波解、有理解、孤子解等.有很多方法被用来构造非线性方程的显

\* 收稿日期: 2015-05-13; 修订日期: 2015-07-08

**基金项目:** 国家自然科学基金(51379033; 50921001); 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2013CB036101; 2010CB32700); 中央高校基本科研业务费专项资金(DUT2015LK34; DUT2015LK45)

**作者简介:** 王振(1981—),男,山东人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: wangzhen@dlut.edu.cn).

式精确解,这些非线性方程也包括 CH 方程.Schiff<sup>[8]</sup>通过 Bäcklund 变换获得了  $N = 1$  时的孤波以及不完全的 2 孤子解的显式表达式,Johnson<sup>[5]</sup>对 Constantin<sup>[9]</sup>所用的反散射方法进行了推广并且获得了直到  $N = 3$  时 CH 方程的解析  $N$ -孤子解.Parker<sup>[10-12]</sup>证实了通过一个互反变换可以将 CH 方程映射为 AKNS-SWW 方程,对其进行适当的变量变换将得到 CH 方程的双线性形式,构造了其多孤子解并分析了其动力学行为。

拟周期解也被称为代数几何解.在 20 世纪 70 年代,Novikov, Dubrovin, McKean, Lax, Its, Matveev 及其合作者提出了反谱理论和代数几何方法,并获得了 KdV 方程的拟周期解.拟周期解用来描述不同模态间的非线性作用,它的主要物理特征(如相互作用模式的波数、相速度、波幅等)都被定义在一个紧 Riemann 面上<sup>[13-23]</sup>.CH 方程的代数几何解在文献[24-27]中也有研究.Kalla 和 Klein 使用基于 Fay 等式的方法,构造了 CH 方程的多维  $\theta$ -函数解<sup>[28]</sup>.Klein 等利用相关曲面<sup>[29]</sup>上的同伦基和配点法<sup>[30]</sup>,对 CH 方程的拟周期解进行了数值可视化.在 20 世纪 80 年代,Nakamura<sup>[31]</sup>提出了一种构造非线性方程的显式拟周期解方法,类似于 Frauendiener 和 Klein<sup>[32]</sup>以及 Bobenko 和 Klein<sup>[29]</sup>把无穷级数截断的计算函数值.Fan 等研究了 Bogoyavlenskii (2+1) 维爆破孤子方程并研究了解的渐近行为<sup>[13]</sup>.相比于其它方法,Nakamura<sup>[31]</sup>的方法有很多优点,它不仅可以直接地获得非线性方程的拟周期解,也可以直接给出频率、波数和振幅间的关系。

在我们之前的工作中,已经给出了 CH 方程的扩展双线性形式.相比 Parker 发现的孤子解,此双线性形式包含的参数达到 4 个之多.并且,根据 Nakamura 的工作,构造了 CH 方程的含有参数形式的单周期解.最后,发现此拟周期解可以退化为其孤子解.在本文中,我们将给出 CH 方程的另一种双线性形式,并构造出 CH 方程的拟周期解。

本文首先给出了 CH 方程的新的双线性形式,并利用 Hirota 双线性方法构造了在  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解.最后,证明 CH 方程的此拟周期解可以退化为其 2 孤子解,其中 2 孤子解已在文献[11]中得到。

## 1 双线性形式和 Riemann $\theta$ -函数

### 1.1 双线性形式

考虑 Camassa-Holm 方程(1),通过引入变量

$$r(x, t) = \sqrt{u - u_{xx} + k^2}, \quad (2)$$

方程(1)可以转化成下面的守恒形式:

$$r_t + (ur)_x = 0. \quad (3)$$

实际上,上式允许我们定义  $(x, t) \rightarrow (y, t')$  的坐标变换:

$$dy = rdx - urdt, \quad dt' = dt. \quad (4)$$

此坐标变换也可以写成如下微分方程形式:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{r(y, t)}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u(y, t), \quad (5)$$

其中  $u(y, t)$  和  $r(y, t)$  满足完全可积方程组:

$$u = r^2 - r\partial_y^2 \ln r - k^2, \quad (6)$$

$$r_t + r^2 u_y = 0. \quad (7)$$

在文献[10]中,上述方程组被称为 associated Camassa-Holm 方程(简称 ACH 方程)。

从文献[33]中可得,ACH 方程(6)和(7)等价于

$$r_{yyy} - 4\left(Q + \frac{1}{4k^2}\right)r_y - 2Q_y r = 0, \quad (8)$$

$$Q_t = r_y. \quad (9)$$

显然,由式(9)可得

$$r = r_0 + \partial_y^{-1} Q_t, \quad (10)$$

其中  $\partial_y^{-1} Q_t = -\int_y^\infty Q_t dy$ ,  $r_0 = r_0(t)$  可以是一个关于时间的积分函数.从而,可以将方程(8)消去  $r$  得到如下关于  $Q(y, t)$  的方程:

$$Q_t + 2r_0 k^2 Q_y + 4k^2 Q Q_t + 2k^2 Q_y \partial_y^{-1} Q_t - k^2 Q_{yyt} = 0. \quad (11)$$

为了给出方程(11)的双线性形式,首先假设

$$Q(y, t) = Q_0 - 2\partial_{yy}^2 \ln f(y, t), \quad (12)$$

其中,  $Q_0$  是积分常数.从式(10)很容易得到

$$r = r_0 - 2\partial_{yt}^2 \ln f(y, t). \quad (13)$$

将式(12)代入式(11),并且记  $F = \ln f$ , 有

$$F_{yyt} + 2r_0 k^2 F_{yyy} + 4k^2 (Q_0 - 2F_{yy}) F_{yyt} - 4k^2 F_{yyy} F_{yt} - k^2 F_{yyyyt} = 0. \quad (14)$$

通过下式引入辅助变量  $\zeta$ :

$$F_{y\zeta t} = -(F_{yyyy} + 6F_{yy}^2)_t + 12Q_0 F_{yyt}, \quad (15)$$

则方程(14)变为

$$F_{yyt} + 2r_0 k^2 F_{yyy} - \frac{2}{3} k^2 (F_{yyt} + 6F_{yy} F_{yt})_y + \frac{1}{3} k^2 F_{t\zeta} = 0. \quad (16)$$

文献[33]将参数  $Q_0$  放在了另一个方程的左边,而本文将参数  $Q_0$  放在了辅助方程(15)里面.这种方式对求解拟周期解更方便.

将方程(15)和(16)分别对  $t$  和  $y$  积分,并且使用关于  $D$ -算子的标准恒等式<sup>[34]</sup>,得

$$D_x^m D_y^n D_t^k f(x, y, t) \cdot g(x, y, t) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_y - \partial_{y'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^k f(x, y, t) g(x', y', t') \Big|_{x'=x, y'=y, t'=t}, \quad (17)$$

得到如下耦合的双线性形式:

$$G := \left[ D_y (D_t + 2r_0 k^2 D_y - k^2 D_y^2 D_t) + \frac{1}{3} k^2 D_t (D_\zeta + D_y^3) + \alpha \right] f \cdot f = 0, \quad (18)$$

$$H := [D_y D_\zeta + D_y^4 - 12Q_0 D_y^2 + \beta] f \cdot f = 0. \quad (19)$$

在这里,  $\alpha = \alpha(t, \zeta)$  和  $\beta = \beta(y, \zeta)$  是一对任意积分函数,对于求拟周期解很重要.注意到双线性算子具有如下性质:

$$D_x^m D_y^n D_t^s e^{\xi_1 \cdot} \cdot e^{\xi_2 \cdot} = (\lambda_1 - \lambda_2)^m (\mu_1 - \mu_2)^n (\nu_1 - \nu_2)^s e^{\xi_1 + \xi_2 \cdot}, \quad (20)$$

其中  $\xi_j = \lambda_j x + \mu_j y + \nu_j t + \delta_j$ ,  $j = 1, 2$ .

注意到,在方程(18)和(19)中有4个自由参数,并且每一个双线性方程包含两个用来构造拟周期解的自由参数.这两个方程和文献[33]给出的形式区别在于  $Q_0 D_y^2$  所在方程的位置.另一方面,当消去所有自由参数,即  $\alpha = \beta = r_0 = Q_0 = 0$  时,它们就变成文献[10-12]中用来构造孤子解的双线性方程.

## 1.2 Riemann $\theta$ -函数

Riemann  $\theta$ -函数的无穷级数表示形式为

$$v(\xi) = v(\xi, \tau) = \sum_{n \in Z^N} e^{-\pi \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle}, \quad (21)$$

其中,  $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T \in Z^N$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T \in C^N$ .  $\langle \cdot \rangle$  表示向量的内积,即当  $f = (f_1,$

$f_2, \dots, f_N)^T$  和  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$  时,  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i g_i$ ,  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$  是一个正定的  $N \times N$  矩阵, 称之为  $\theta$ - 函数的周期矩阵. 实际上, 对任意的向量  $\boldsymbol{\xi} \in C^N$ , Fourier(傅里叶) 级数(21) 都会收敛到一个实值函数.  $\theta$ - 函数具有拟周期的性质.

**定义**<sup>[13]</sup> 函数  $g(x, t) \in C^N \times C$  是关于  $t$  的拟周期函数, 并且有基本周期  $T_1, T_2, \dots, T_k \in C$ , 如果满足下述两个条件:

1)  $T_1, T_2, \dots, T_k$  在  $\mathbf{Z}$  上是线性依赖的;

2) 存在函数  $G(x, t) \in C^N \times C^k$  使得对于任意的

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) \in C^k,$$

$$G(x, t, \dots, t) = g(x, t),$$

$$G(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_j + T_j, y_{j+1}, \dots, y_k) = G(x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_k).$$

特别地, 当且仅当  $T_j = m_j T, m_j \in \mathbf{Z}$ ,  $g(x, t)$  是周期为  $T$  的函数.

## 2 拟周期解

在本节, 基于方程(18)和(19)的双线性形式, 构造当  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解. 当  $N = 2$  时, Riemann  $\theta$ - 函数(21) 写成

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-\pi i \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + 2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} \rangle}, \quad (22)$$

此处,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T \in \mathbf{Z}^2$ ;  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T \in C^2$ ,  $\xi_j = p_j y + \omega_j t + \sigma_j \zeta + \xi_j^0$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  为  $2 \times 2$  的正定矩阵:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix},$$

其中  $\tau_{11} > 0$ ,  $\tau_{22} > 0$ ,  $\tau_{21} = \tau_{12}$ ,  $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 > 0$ .

根据 Nakamura<sup>[31]</sup> 的方法, 将  $f = \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau})$  代入方程(19)的左边, 得

$$\begin{aligned} H(D_\zeta, D_y, D_t) \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau}) &= \\ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2} H(D_\zeta, D_y, D_t) e^{-\pi i \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + 2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} \rangle} \times e^{-\pi i \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + 2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{m} \rangle} &= \\ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2} \sum_{\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} H[2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\sigma} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{p} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle] \times \\ e^{-\pi i [\langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{m}' - \mathbf{n}), \mathbf{m}' - \mathbf{n} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle]} \times e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}' \rangle} &= \\ \sum_{\mathbf{m}' \in \mathbf{Z}^2} V(\mathbf{m}') e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}' \rangle}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)^T$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$ , 并且

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}') &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} H[2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\sigma} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{p} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle] \times \\ e^{-\pi i [\langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{m}' - \mathbf{n}), \mathbf{m}' - \mathbf{n} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle]} &. \end{aligned} \quad (24)$$

对于每一给定的  $j, l = 1, 2$ , 因为角标  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$  能够取遍所有的整数, 所以可以通过关系  $n_j = n'_j + \delta_{jl}$  (其中当  $j = l$  时,  $\delta_{jl} = 1$ ; 当  $j \neq l$  时,  $\delta_{jl} = 0$ ), 用新的角标  $\mathbf{n}' = (n'_1, n'_2)^T$  代替原角标  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}') &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} H[2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\sigma} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \mathbf{p} \rangle, 2\pi i \langle 2\mathbf{n} - \mathbf{m}', \boldsymbol{\omega} \rangle] \times \\ e^{-\pi i [\langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{m}' - \mathbf{n}), \mathbf{m}' - \mathbf{n} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle]} &= \\ \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} H \left( 2\pi i \sum_{j=1}^2 [2n'_j - (m'_j - 2\delta_{jl})] \sigma_j, 2\pi i \sum_{j=1}^2 [2n'_j - (m'_j - 2\delta_{jl})] p_j, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\pi i \sum_{j=1}^2 [2n'_j - (m'_j - 2\delta_{jl})] \omega_j \Big) \times \\
& e^{-\pi \sum_{j,k=1}^2 (n'_j + \delta_{jl}) \tau_{jk} (n'_k - \delta_{kl}) - \pi \sum_{j,k=1}^2 [(m'_j - 2\delta_{jl} - n'_j) + \delta_{jl}] \tau_{jk} [(m'_k - 2\delta_{kl} - n'_k) + \delta_{kl}]} = \\
& \begin{cases} V(m'_1 - 2, m'_2) e^{-2\pi(\tau_{11}m'_1 + \tau_{12}m'_2) + 2\pi\tau_{11}}, & l = 1, \\ V(m'_1, m'_2 - 2) e^{-2\pi(\tau_{12}m'_1 + \tau_{22}m'_2) + 2\pi\tau_{22}}, & l = 2. \end{cases} \quad (25)
\end{aligned}$$

因此,若有

$$V(0,0) = V(1,0) = V(0,1) = V(1,1) = 0, \quad (26)$$

则对于所有的  $m'_1, m'_2 \in \mathbf{Z}$ , 都有  $V(m'_1, m'_2) = 0$ . 从而, Riemann  $\theta$ - 函数式(22)就是式(19)的真实解. 若  $s^1 = (0,0)^T, s^2 = (1,0)^T, s^3 = (0,1)^T, s^4 = (1,1)^T$ , 则有下面结果:

$$\begin{aligned}
V(s^j) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} H[2\pi i \langle 2n - s^j, \sigma \rangle, 2\pi i \langle 2n - s^j, p \rangle, 2\pi i \langle 2n - s^j, \omega \rangle] \times \\
& e^{-\pi[\langle \tau(s^j-n), s^j-n \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = \\
& \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} [2\pi i \langle 2n - s^j, p \rangle (2\pi i \langle 2n - s^j, \sigma \rangle + (2\pi i \langle 2n - s^j, p \rangle)^3 + \beta)] \varepsilon_j(n) = \\
& -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} (2n_1 - s^j_1) \langle 2n - s^j, p \rangle \varepsilon_j(n) \sigma_1 - \\
& 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} (2n_2 - s^j_2) \langle 2n - s^j, p \rangle \varepsilon_j(n) \sigma_2 + \\
& \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \varepsilon_j(n) \beta + 16\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \langle 2n - s^j, p \rangle^3 \varepsilon_j(n) = 0, \quad (27)
\end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_j(n) = e^{-\pi[\langle \tau(s^j-n), s^j-n \rangle + \langle \tau n, n \rangle]}$ ,  $s^j = (s^j_1, s^j_2)^T$ . 令  $\lambda_1 = e^{-\pi\tau_{11}}, \lambda_2 = e^{-\pi\tau_{22}}, \lambda_3 = e^{-2\pi\tau_{12}}$ , 则

$$\varepsilon_j(n) = \lambda_1^{n_1^2 + (n_1 - s^j_1)^2} \lambda_2^{n_2^2 + (n_2 - s^j_2)^2} \lambda_3^{n_1 n_2 + (n_1 - s^j_1)(n_2 - s^j_2)}. \quad (28)$$

下面引入记号:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= (a_{jl}), \quad \mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, \\
a_{j1} &= -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} (2n_1 - s^j_1) \langle 2n - s^j, p \rangle \varepsilon_j(n), \\
a_{j2} &= -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} (2n_2 - s^j_2) \langle 2n - s^j, p \rangle \varepsilon_j(n), \\
a_{j3} &= \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \varepsilon_j(n), \\
a_{j4} &= 48\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \langle 2n - s^j, p \rangle^2 \varepsilon_j(n), \\
b_j &= -16\pi^4 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \langle 2n - s^j, p \rangle^4 \varepsilon_j(n),
\end{aligned}$$

则方程(27)可写成下面的线性方程组形式:

$$\mathbf{M}(\sigma_1, \sigma_2, \beta, Q_0)^T = \mathbf{B}. \quad (29)$$

同样的运算过程应用到第2个双线性方程(18)中,与上面类似. $\theta$ - 函数是方程(18)的解,若下面方程成立:

$$\begin{aligned}
U(s^j) &= G[2\pi i \langle 2n - s^j, \sigma \rangle, 2\pi i \langle 2n - s^j, p \rangle, 2\pi i \langle 2n - s^j, \omega \rangle] \times \\
& e^{-\pi[\langle \tau(s^j-n), s^j-n \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = \\
& -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \left( \langle 2n - s^j, p \rangle + \frac{8}{3} \pi^2 k^2 \langle 2n - s^j, p \rangle^3 + \frac{1}{3} k^2 \langle 2n - s^j, \sigma \rangle \right) \times \\
& \varepsilon_j(n) \langle 2n - s^j, \omega \rangle + \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \varepsilon_j(n) \alpha - 8r_0 k^2 \pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} \langle 2n - s^j, p \rangle^2 \varepsilon_j(n) = 0, \quad (30)
\end{aligned}$$

上式是一个关于  $\omega_1, \omega_2, \alpha$  和  $r_0$  的线性方程组. 引入下面记号:

$$\begin{aligned} N &= (d_{j1}), \\ d_{j1} &= -4\pi^2 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \left( \langle 2\mathbf{n} - s^j, \mathbf{p} \rangle + \frac{8}{3} \pi^2 k^2 \langle 2\mathbf{n} - s^j, \mathbf{p} \rangle^3 + \frac{1}{3} k^2 \langle 2\mathbf{n} - s^j, \boldsymbol{\sigma} \rangle \right) \times \\ &\quad (2n_1 - s_1^j) \varepsilon_j(\mathbf{n}), \\ d_{j2} &= -4\pi^2 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \left( \langle 2\mathbf{n} - s^j, \mathbf{p} \rangle + \frac{8}{3} \pi^2 k^2 \langle 2\mathbf{n} - s^j, \mathbf{p} \rangle^3 + \frac{1}{3} k^2 \langle 2\mathbf{n} - s^j, \boldsymbol{\sigma} \rangle \right) \times \\ &\quad (2n_2 - s_2^j) \varepsilon_j(\mathbf{n}), \\ d_{j3} &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon_j(\mathbf{n}), \\ d_{j4} &= -8k^2 \pi^2 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \langle 2\mathbf{n} - s^j, \mathbf{p} \rangle^2 \varepsilon_j(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (31)$$

那么方程(30)可以表示为下述线性方程:

$$N(\omega_1, \omega_2, \alpha, r_0)^T = \mathbf{0}. \quad (32)$$

现在, ACH 方程在  $N = 2$  时的拟周期解写成

$$r = r_0 + \partial_x^2 \ln v(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau}), \quad (33)$$

其中,  $v(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau}), \omega_1, \omega_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha, \beta, r_0, Q_0$  由方程(21), (29) 和(32) 给出, 并且参数  $p_1, p_2, \xi_i^0, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}$  都是自由变量.

下面我们求待定参数的值. 由方程(27) 和(28) 可知, 方程的常数项以及  $\sigma_1, \sigma_2, \beta$  和  $Q_0$  的系数都是  $\lambda_1, \lambda_2$  的级数, 因此, 为了求得  $\sigma_1, \sigma_2, \beta$  和  $Q_0$  的值, 可以假定这些待求参数也可以用  $\lambda_1, \lambda_2$  的级数形式表达. 需要注意的是,  $\lambda_1 = e^{-\pi\tau_{11}}, \lambda_2 = e^{-\pi\tau_{22}}$  并且保证周期矩阵  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$  是正定的实矩阵. 详细过程如下:

首先假定  $\sigma_1, \sigma_2, \beta$  和  $Q_0$  关于  $\lambda_1, \lambda_2$  的表达式为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sum_{i, j \geq 0} \sigma_1^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, & \sigma_2 = \sum_{i, j \geq 0} \sigma_2^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, \\ \beta = \sum_{i, j \geq 0} \beta^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, & Q_0 = \sum_{i, j \geq 0} Q_0^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, \end{cases} \quad (34)$$

然后把式(34) 代入式(27) 中, 收集  $\lambda_1^i \lambda_2^j$  的系数并令它们为0, 就得到关于  $\sigma_1^{(ij)}, \sigma_2^{(ij)}, \beta^{(ij)}$  的方程组.

同样的求解过程可以用到双线性方程(18). 这时,  $v(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\tau})$  将会是方程(18) 的解. 如果方程(30) 成立, 即

$$U(0, 0) = U(1, 0) = U(0, 1) = U(1, 1) = 0. \quad (35)$$

与式(34) 一样, 把参数  $\omega_1, \omega_2$  和  $\alpha, r_0$  写成如下用  $\lambda_1, \lambda_2$  表示的形式:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sum_{i, j \geq 0} \omega_1^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, & \omega_2 = \sum_{i, j \geq 0} \omega_2^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, \\ \alpha = \sum_{i, j \geq 0} \alpha^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j, & r_0 = \sum_{i, j \geq 0} r_0^{(ij)} \lambda_1^i \lambda_2^j. \end{cases} \quad (36)$$

把上式代入方程(30), 收集  $\lambda_1^i \lambda_2^j$  的系数并令它们逐一为0, 就得到一个新的关于  $\omega_1^{(ij)}, \omega_2^{(ij)}, \alpha^{(ij)}$  的方程组. 求解上面得到的两个方程组, 可得参数值如下:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4\pi^2 p_1^3 + 12Q_0 p_1 + o(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 4\pi^2 p_1^3, \\ \sigma_2 = 4\pi^2 p_2^3 + 12Q_0 p_2 + o(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 4\pi^2 p_2^3, \\ \beta = -384\pi^4 p_1^4 \lambda_1^2 - 384\pi^4 p_2^4 \lambda_2^2 + o(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0; \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{2r_0k^2p_1}{1+4k^2\pi^2p_1^2+4k^2Q_0} + O(\lambda_1^i\lambda_2^j) \rightarrow -\frac{2r_0k^2p_1}{1+4k^2\pi^2p_1^2}, \\ \omega_2 = -\frac{2r_0k^2p_2}{1+4k^2\pi^2p_2^2+4k^2Q_0} + O(\lambda_1^i\lambda_2^j) \rightarrow -\frac{2r_0k^2p_2}{1+4k^2\pi^2p_2^2}, \\ \alpha = -\frac{512r_0k^4\pi^4p_1^4\lambda_1^2}{1+4k^2\pi^2p_1^2+4k^2Q_0} - \frac{512r_0k^4\pi^4p_2^4\lambda_2^2}{1+4k^2\pi^2p_2^2+4k^2Q_0} + O(\lambda_1^i\lambda_2^j) \rightarrow 0, \end{cases} \quad (38)$$

极限情形为  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  时取得, 其中  $i+j \geq 2, Q_0 = 0$  且  $r_0$  是自由的. 目前, 我们已经得到了在  $N=2$  时 ACH 方程的双线性形式 (18) 和 (19) 的拟周期解  $f(y, t) = v(\xi_1, \xi_2, \tau)$ , 参数  $\sigma_i, \beta$  和  $\omega_i, \alpha$  由方程 (37) 和 (38) 给出. 由方程 (13) 得

$$r(y, t) = r_0 - 2\partial_{yt}^2 \ln v(\xi_1, \xi_2, \tau) = r_0 - 2\frac{v_{yt}v - v_y v_t}{v^2}, \quad (39)$$

此解如图 1 所示.

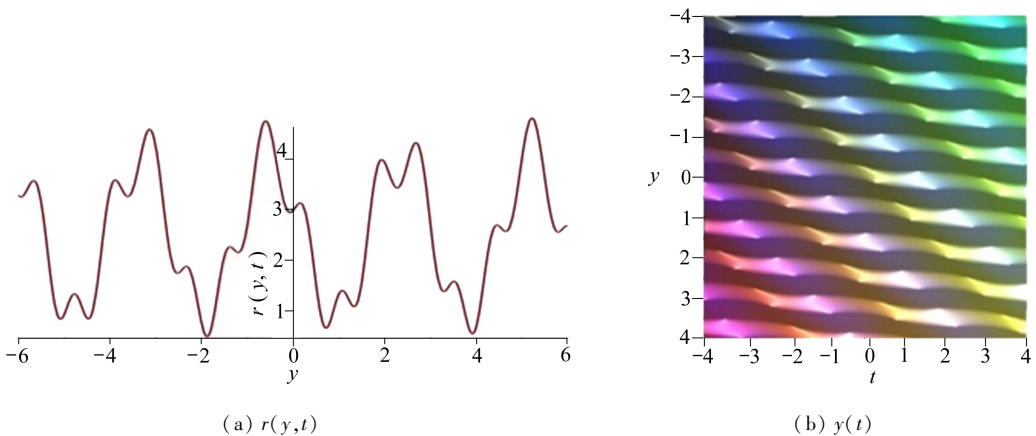


图 1 ACH 方程的拟周期解  $r(y, t)$  和  $y(t)$ , 其中  $r(y, t)$  各参数值为:  $p_1 = 1.2, p_2 = 0.35, t = 1, \zeta = 2, Q_0 = 0, k = 1, \tau_{11} = 1.2, \tau_{22} = 0.8, r_0 = 3$

Fig. 1 Quasi-periodic solution  $r(y, t)$  to the ACH equation and  $y(t)$  with parameter values

$$p_1 = 1.2, p_2 = 0.35, t = 1, \zeta = 2, Q_0 = 0, k = 1, \tau_{11} = 1.2, \tau_{22} = 0.8, r_0 = 3$$

然后把上面的结果代入方程 (6), 则求得  $u(y, t)$  的表达式为

$$u(y, t) = \frac{W(y, t)}{rv^3}, \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} W(y, t) = & 8r_0vv_{t,y}^2 - 6r_0^2v^2v_{t,y} + 2k^2v^2v_{t,y} - 4vv_{t,y}v_{t,t,y} + 4v_{t,y}v_{y,y}v_{t,t} - \\ & 8r_0v_yv_{t,y} - r_0k^2v^3 + r_0^3v^3 + 2r_0v^2v_{t,t,y} - 4r_0vv_{t,t,y} - 4r_0vv_yv_{t,t,y} - \\ & 2r_0vv_{y,y}v_{t,t} + 6r_0^2vv_yv_t - 2k^2vv_yv_t + 4vv_{t,y}v_{t,t,y} + 4r_0v_y^2v_{t,t} + \\ & 4r_0v_t^2v_{y,y} - 4v_yv_{t,t}v_{t,y} - 4v_tv_{y,y}v_{t,t,y} + 4v_yv_tv_{t,t,y}. \end{aligned} \quad (41)$$

$u(y, t)$  的图像如图 2 所示.

为了求得 CH 方程的解  $u(x, t)$ , 我们仍需找到坐标变换  $x(y, t)$  的具体表达形式. 把式 (39) 代入式 (5) 得到

$$x(y, t) = \int \frac{1}{r(y, t)} dy = \int \frac{v^2}{r_0v^2 - 2vv_{ty} + 2v_yv_t} dy + c, \quad (42)$$

其中,  $c = c(t)$  可以看成是时间变量  $t$  的函数, 然后下面证明  $c$  只能是一个常数.

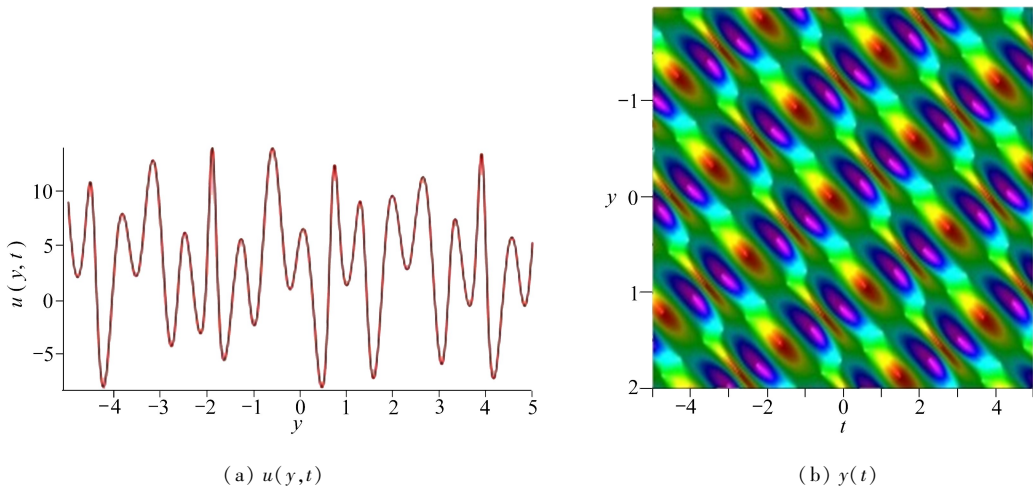


图 2 ACH 方程的拟周期解  $u(y, t)$  和  $y(t)$ , 其中  $u(y, t)$  与图 1 中各参数值相同

Fig. 2 Quasi-periodic solution  $u(y, t)$  to the ACH equation and  $y(t)$  with the same parameter values shown in fig. 1

由式(5)的第 2 个方程可知

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \int \left( \frac{1}{r} \right)_t dy + c'(t) = u(y, t), \tag{43}$$

即  $c$  关于  $t$  的导数由下面的方程决定:

$$c'(t) = u(y, t) - \int \left( \frac{1}{r} \right)_t dy = r^2 - r \partial_{y,t}^2 \ln r - k^2 - \int \left( \frac{1}{r} \right)_t dy, \tag{44}$$

其中  $r = r(y, t)$  由式(39) 表示. 观察上面的等式, 我们发现  $c'(t)$  是关于  $v$  和它的导数的函数. 然而在  $v = v(\xi_1, \xi_2, \tau)$  中,  $y$  和  $t$  都是同时出现的, 也就是说, 在包含  $v$  的式子中,  $y$  出现当且仅当  $t$  出现. 由此知道式(44) 右边的式子是关于  $y$  和  $t$  的函数, 而左边  $c'(t)$  仅是关于  $t$  的函数, 因此只能有

$$c'(t) = 0. \tag{45}$$

从而,  $c$  只能是一个常数.

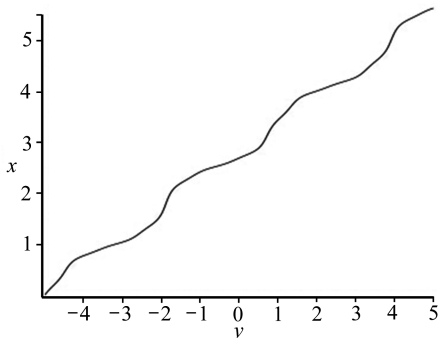


图 3 把 ACH 的拟周期解  $u(y, t)$  转换成图 4 所示的 CH 方程的拟周期解  $u(x, t)$  的坐标变换  
Fig. 3 The coordinate transformation that reshapes quasi-periodic solution  $u(y, t)$  to the ACH equation into quasi-periodic solution  $u(x, t)$  to the CH equation shown in fig. 4

图 3 是  $x$  和  $y$  的关系图. 它可以把  $(y, t)$  空间上的 ACH 方程的周期解转化为  $(x, t)$  空间上



的 CH 方程的周期解.含参数的 CH 方程的拟周期解如图 4 所示.

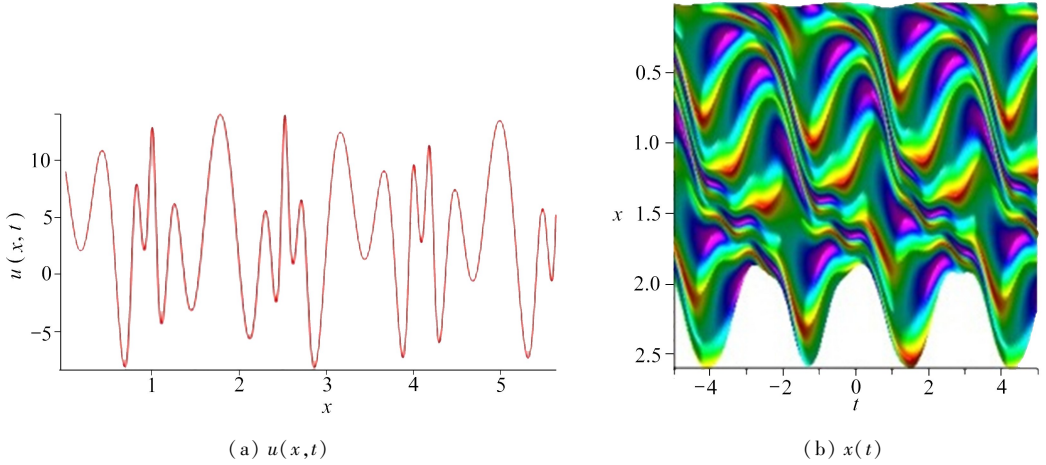


图 4 CH 方程的拟周期解  $u(x,t)$  和  $x(t)$ , 各参数的取值同图 1

Fig. 4 Quasi-periodic solution  $u(x,t)$  to the CH equation and  $x(t)$  with the same parameter values shown in fig. 1

### 3 拟周期解的渐近性

如果参数  $\sigma_i, \beta$  和  $\omega_i, \alpha$  分别满足方程(37)和(38), 那么

$$r = r_0 - 2\partial_y^2 \ln v(\xi_1, \xi_2, \tau) \quad (46)$$

就是 ACH 方程(6)和(7)的解.为了证明  $r$  能退化到对应的 ACH 方程的孤子解, 首先看  $v(\xi_1, \xi_2, \tau)$  的退化形式.已知

$$\begin{aligned} v(\xi_1, \xi_2, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} = \\ &= 1 + (e^{2\pi i \xi_1} + e^{-2\pi i \xi_1}) e^{-\pi \tau_{11}} + (e^{2\pi i \xi_2} + e^{-2\pi i \xi_2}) e^{-\pi \tau_{22}} + \\ &+ (e^{2\pi i (\xi_1 + \xi_2)} + e^{-2\pi i (\xi_1 + \xi_2)}) e^{-\pi (\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{22})} + \dots, \end{aligned} \quad (47)$$

当  $\lambda_1 = e^{-\pi \tau_{11}}, \lambda_2 = e^{-\pi \tau_{22}} \rightarrow 0$  且  $r_0 = k, Q_0 = 0$  时, 第 2 节中所求的参数就有如下的退化形式:

$$\alpha, \beta \rightarrow 0, \sigma_j \rightarrow 4\pi^2 p_j^3, \omega_j \rightarrow -\frac{2k^3 p_j}{1 + 4k^2 \pi^2 p_j^2}, \quad j = 1, 2. \quad (48)$$

如果我们记

$$\rho_j = 2\pi i p_j, \eta_j = 2\pi i \xi_0 - \pi \tau_{jj}, A_{12} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2}, \tau_{12} = -\frac{\ln A_{12}}{2\pi}, \quad (49)$$

那么很容易得到下面的结果:

$$\begin{cases} A_{12} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \\ 2\pi i \omega_j = 2\pi i \left( -\frac{2k^3 p_j}{1 + 4k^2 \pi^2 p_j^2} \right) = -\frac{2k^3 \rho_j}{1 - k^2 \rho_j^2} \equiv u_j, \\ 2\pi i \sigma_j = 2\pi i \cdot 4\pi^2 p_j^3 = - (2\pi i p_j)^3 = -\rho_j^3 \equiv v_j, \\ e^{-2\pi \tau_{12}} = A_{12}. \end{cases} \quad (50)$$

接下来, 假设  $\theta_j = \rho_j y + \mu_j t + v_j s + \eta_j$ , 由式(49)和(50)看出:

$$\theta_j = 2\pi i (\rho_j y + \mu_j t + v_j s + \eta_j) - \pi \tau_{jj} = 2\pi i \xi_j - \pi \tau_{jj}, \quad (51)$$

其中  $\xi_j = p_j y + \omega_j t + \sigma_j s + \xi_j^0$  与式(46)中所定义的相同,方程(47)变为

$$\begin{aligned} v(\xi_1, \xi_2, \tau) = & 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + \lambda_1^2 e^{-\theta_1} + \lambda_2^2 e^{-\theta_2} + \\ & \lambda_1^2 \lambda_2^2 e^{-\theta_1 - \theta_2 - 2\pi\tau_{12}} + \dots \rightarrow 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \end{aligned} \quad (52)$$

当  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  时.

把上面得到的结果代入式(39),计算可得  $r_0 = k, r$  退化为

$$\begin{aligned} r(y, t) = & k + \frac{2}{v^2} [ -\rho_1 u_1 e^{\theta_1} - \rho_2 u_2 e^{\theta_2} + v_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + \\ & A_{12} ( -\rho_1 u_1 e^{\theta_1 + 2\theta_2} - \rho_2 u_2 e^{2\theta_1 + \theta_2} ) ], \end{aligned} \quad (53)$$

这里  $v$  是式(52)的退化值,

$$v_{12} = \frac{4k^3(\rho_1 - \rho_2)^2}{(1 - k^2\rho_1^2)(1 - k^2\rho_2^2)}, \quad \theta_j = \rho_j y + u_j t + v_j s + \eta_j, \quad j = 1, 2,$$

并且  $v_j, \rho_j, \eta_j$  和  $u_j$  在式(49)和(50)中定义.这样我们得到的  $r(y, t)$  与文献[11]中的结果恰好一致.

把式(53)代入式(40)中,得到在  $N = 2$  时 ACH 方程的拟周期解  $u(y, t)$  的极限形式:

$$u(y, t) = \frac{2}{k} \frac{u_1^2 e^{\theta_1} + u_2^2 e^{\theta_2} + b_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{12} (u_1^2 e^{\theta_1 + 2\theta_2} + u_2^2 e^{2\theta_1 + \theta_2})}{rv^2}, \quad (54)$$

其中

$$b_{12} = \frac{8k^6(\rho_1 - \rho_2)^2(1 - k^4\rho_1^2\rho_2^2)}{(1 - k^2\rho_1^2)^2(1 - k^2\rho_2^2)^2},$$

$v$  与式(53)相同,  $A_{12}$  已在式(50)中表达,这与文献[11]中的值一致.

为了证明在  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解能够退化成其 2 孤子解,只需证明坐标变换  $x(y, t)$  的退化情况与文献[11]一致即可.下面定义参数

$$a_j = 1 + k\rho_j, \quad b_j = 1 - k\rho_j, \quad j = 1, 2. \quad (55)$$

把式(52)代入式(42)中,运用上面的参数,式(42)就转化为

$$x(y, t) = \frac{y}{k} + \ln \left[ \frac{a_1 a_2 + b_1 a_2 e^{\theta_1} + b_2 a_1 e^{\theta_2} + b_1 b_2 A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}}{b_1 b_2 + a_1 b_2 e^{\theta_1} + a_2 b_1 e^{\theta_2} + a_1 a_2 A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}} \right] + c, \quad (56)$$

其中  $c$  可以看作是时间  $t$  的函数.然而,式(56)对  $t$  求微分后可得

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u(y, t) + c'(t), \quad (57)$$

其中  $u(y, t)$  由式(54)所定义.再根据式(5)中的第 2 个式子,可得

$$c'(t) = 0, \quad (58)$$

即  $c$  是常数.

我们已经证明了当  $\lambda_1 = e^{-\pi\tau_{11}}, \lambda_2 = e^{-\pi\tau_{22}} \rightarrow 0$  时,在  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解退化为其 2 孤子解,这也进一步证明了我们所求得拟周期解的正确性.

需要注意的是,文献[33]中 CH 方程的单周期解是在  $N = 1$  时 CH 方程的拟周期解,而本文给出的是在  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解,两者都是 CH 方程的拟周期解.其中,在  $N = 2$  时的拟周期解表示两个单周期解的相互作用.本文的工作,有助于探讨拟周期解的非线性相互作用,分析拟周期波的传播形式,而且在退化形式下可得到双孤立波相互作用.

## 4 结 论

本文首先回顾了文献[33]的重要结论,包括坐标变换,ACH 方程和扩展的双线性形式等.

然后像构造 CH 方程的单周期解一样,基于它的双线性形式,采用 Nakamura 的方法来构造在  $N = 2$  时它的拟周期解.在这一过程中,会得到一个关于在双线性方程中出现的常数以及在  $\theta$ -函数中出现的变量的方程组.可以把此方程组写成矩阵的形式,尽管有许多不同的方法求解此方程组,但是本文仍然采用摄动理论,因为一方面不清楚未知量的系数矩阵是否是非奇异的,另一方面采用摄动方法求解的未知量会更方便对拟周期解的极限行为进行分析.

在构造了  $N = 2$  时 ACH 方程的拟周期解之后,可以通过坐标变换式(5),求得其对应的带参数表示的  $N = 2$  时 CH 方程的拟周期解.最后证明当  $\lambda_1 = e^{-\pi\tau^{11}}, \lambda_2 = e^{-\pi\tau^{22}} \rightarrow 0$  时,此拟周期解退化为其 2 孤子解.希望通过本文的介绍,人们可以对 CH 方程有一个更好的了解.

**致谢** 作者衷心感谢范恩贵教授对本文的建议.

## 参考文献(References):

- [1] Fuchssteiner B, Fokas A S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1981, **4**(1): 47-66.
- [2] Camassa R, Holm D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **71**(11): 1661-1664.
- [3] Camassa R, Holm D D, Hyman J M. A new integrable shallow water equation[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1994, **31**: 1-33.
- [4] QIAO Zhi-jun. The Camassa-Holm hierarchy,  $N$ -dimensional integrable systems, and algebro-geometric solution on a symplectic submanifold commu[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2003, **239**(1/2): 309-341.
- [5] Johnson R S. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, **455**: 63-82.
- [6] Constantin A, Lannes D. The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2009, **192**(1): 165-186.
- [7] Parker A. On exact solutions of the regularized long-wave equation: a direct approach to partially integrable equations—I: solitary wave and solitons[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1995, **36**(7): 3498-3505.
- [8] Schiff J. The Camassa-Holm equation: a loop group approach[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1998, **121**(1/2): 24-43.
- [9] Constantin A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2001, **457**(2008): 953-970.
- [10] Parker A. On the Camassa-Holm equation and a direct method of solution—I: bilinear form and solitary waves[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2004, **460**(2050): 2929-2957.
- [11] Parker A. On the Camassa-Holm equation and a direct method of solution—II: soliton solutions[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2005, **461**(2063): 3611-3632.
- [12] Parker A. On the Camassa-Holm equation and a direct method of solution—III:  $N$ -soliton solutions[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2005, **461**(2064): 3893-3911.
- [13] Fan E G, Hon Y C. Quasiperiodic waves and asymptotic behavior for Bogoyavlenskii's breaking soliton equation in  $(2+1)$  dimensions[J]. *Physical Review E*, 2008, **78**(3): 036607.
- [14] MA Wen-xiu, ZHOU Ru-guang, GAO Liang. Exact one-periodic and two-periodic wave solutions to Hirota bilinear equations in  $(2+1)$  dimensions[J]. *Modern Physics Letters A*, 2009, **24**(21): 1677-1688.
- [15] DAI Hui-hui, LI Yi-shen, SU Ting. Multi-soliton and multi-cuspon solutions of a Camassa-Holm hierarchy and their interactions[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretic*

- cal*, 2009, **42**(5): 055203.
- [16] DAI Hui-hui, LI Yi-shen. The interaction of the  $\omega$ -soliton and  $\omega$ -cuspon of the Camassa-Holm equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, **38**(42): 685-694.
- [17] Parker A. Cusped solitons of the Camassa-Holm equation—I: cuspon solitary wave and anti-peakon limit[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, **34**(3): 730-739.
- [18] Parker A. Wave dynamics for peaked solitons of the Camassa-Holm equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, **35**(2): 220-237.
- [19] Parker A. Cusped solitons of the Camassa-Holm equation—II: binary cuspon-soliton interactions[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, **41**(3): 1531-1549.
- [20] Parker A. A factorization procedure for solving the Camassa-Holm equation[J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(2): 599-609.
- [21] Parker A, Matsuno Y. The peakon limits of soliton solutions of the Camassa-Holm equation [J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2006, **75**(12): 124001.
- [22] Geronimo J S, Gesztesy F, Holden H. Algebraic-geometric solutions of the Baxter-Szegő difference equation[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2005, **258**(1): 149-177.
- [23] GENG Xian-guo, CAO Ce-wen. Decomposition of the (2+1)-dimensional Gardner equation and its quasi-periodic solutions[J]. *Nonlinearity*, 2001, **14**(6): 1433-1452.
- [24] Constantin A. Quasi-periodicity with respect to time of spatially periodic finite-gap solutions of the Camassa-Holm equation[J]. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1998, **122**(7): 487-494.
- [25] Constantin A, McKean H P. A shallow water equation on the circle[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1999, **52**(8): 949-982.
- [26] Gesztesy F, Holden H. Algebraic-geometry solutions of the Camassa-Holm hierarchy[J]. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2003, **19**(1): 73-142.
- [27] Gesztesy F, Holden H. Real-valued algebraic-geometric solutions of the Camassa-Holm hierarchy[J]. *Philos Trans Roy Soc A*, 2008, **366**(1867): 1025-1054.
- [28] Kalla C, Klein C. New construction of algebraic-geometric solutions to the Camassa-Holm equation and their numerical evaluation[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2012, **468**(2141): 1371-1390.
- [29] Bobenko A I, Klein C, eds. *Computational Approach to Riemann Surfaces* [M]. Lecture Notes in Mathematics, Vol **2013**. Beirlin: Springer, 2011.
- [30] Trefethen L N. *Spectral Methods in Matlab* [M]. Software, Environments, Tools. Philadelphia, PA: SIAM, 2000.
- [31] Nakamura A. A direct method of calculating periodic wave solitons to nonlinear evolution equations—I: exact two-periodic wave solution[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1979, **47**(5): 1701-1705.
- [32] Frauendiener J, Klein C. Hyperelliptic theta functions and spectral methods[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **167**(1): 193-218.
- [33] WANG Zhen, ZOU Li, ZONG Zhi. Periodic solutions of the Camassa-Holm equation based on the bilinear form[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, **44**(35): 355204.
- [34] Hirota R. The Direct Method in Soliton Theory[C]//Nagai A, Nimmo J, Gilson C, eds. *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

# Quasi-Periodic Solution and Its Asymptotic Behavior for the Camassa-Holm Equation

WANG Zhen<sup>1</sup>, QIN Yu-peng<sup>1</sup>, ZOU Li<sup>2,3</sup>, MA Rui-fang<sup>1</sup>, ZHU Gui-xun<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116085, P.R.China;*

2. *School of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116085, P.R.China;*

3. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116085, P.R.China)*

**Abstract:** Many researchers have paid attention to the shallow water wave model Camassa-Holm (CH) equation over the last 2 decades. The single periodic solution to the CH equation based on the Hirota bilinear method had been presented in our previous work. The quasi-periodic solution in genus 2 and its asymptotic behavior were given. First, the parameters appearing in the bilinear equation system were rearranged, such as the coordinate transformation, the extended bilinear form, the Riemman theta function and so on. Then the quasi-periodic solution to the CH equation was obtained, which was expressed in the form of the Riemann theta function in genus 2. Second, the asymptotic behavior of the quasi-periodic solution was discussed. It is shown that this solution can degenerate into the CH equation's 2-soliton solution.

**Key words:** Camassa-Holm equation; bilinear form; quasi-periodic solution; Riemman theta function

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (51379033;50921001); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB036101;2010CB32700)