

用格子 Boltzmann 方法模拟 非线性热传导方程*

刘芳¹, 施卫平²

(1. 长春工业大学 基础科学学院, 长春 130012;
2. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 对具有非线性源项和非线性扩散项的热传导方程建立格子 Boltzmann 求解模型.在演化方程中增加了两个关于源项分布函数的微分算子,对演化方程实施 Chapman-Enskog 展开.通过对演化方程的进一步改进,恢复出具有高阶截断误差的宏观方程.对不同参数选取下的非线性热传导方程进行了数值模拟,数值解与精确解吻合得很好.该模型也可以用于同类型的其他偏微分方程的数值计算中.

关键词: 格子 Boltzmann 模型; 非线性热传导方程; LBGK 模型; 非线性源项

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.11.004

引言

格子 Boltzmann 方法(lattice Boltzmann method,简称 LBM)是 20 世纪 80 年代末期提出的流体力学的一种新兴的数值计算方法^[1-3].它由格子气自动机演化而来,是从分子运动论层次描述基本物理规律的动力学方法.该方法的基本思想是构造一个简化的动力学模型(Boltzmann 方程),该模型包含了微观或介观过程的物理本质,使其统计平均结果满足所研究的宏观方程(Navier-Stokes 方程).由于 LBM 具有许多独特的优势,自提出之日起就受到流体力学、物理学、数学、计算机技术等领域的众多专家学者的关注,并逐渐发展成为模拟复杂流动和多重物理化学传递过程的强有力的数值工具,并成为国际研究的一大热点.近年来,一些学者根据 LBM 的建模机理对原有模型进行改造(改变演化方程和平衡态分布函数的形式;对各阶动量矩方程灵活限定等),构造出很多类型的偏微分方程的格子 Boltzmann 求解模型.具体工作可见文献[4-10]等.

本文主要研究用 LBM 求解一般形式的一维非线性热传导方程^[11],其形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + u - u^n, \quad n > 1. \quad (1)$$

这里 n 是有理数, a 是常数, $u = u(x, t)$ 表示温度, x 和 t 分别表示空间和时间变量.非线性热传

* 收稿日期: 2015-07-01; 修订日期: 2015-08-20

基金项目: 国家自然科学基金(11401046); 吉林省教育厅“十二五”科学技术研究计划(2014-478)

作者简介: 刘芳(1982—),女,辽宁铁岭人,讲师,博士(通讯作者. E-mail: fairfang@sina.com);

施卫平(1963—),男,长春人,教授,博士(E-mail: shiwp@jlu.edu.cn).

导方程在科学和工程的很多领域都有应用,其中包括材料的热处理^[12],多孔介质流^[13],热辐射波^[14]等。

非线性热传导方程(1)的扩散项是非线性的,且还含有非线性源项.用一般的格子 Boltzmann 模型恢复宏观方程,会出现由非线性源项引起的多余项,增大截断误差.所以本文的工作就是通过恰当的构造演化方程和平衡态分布函数来尽量消除一些误差项,提高模型精度,得到更精确的数值解.全文安排如下:第 1 节,建立非线性热传导的高精度格子 Boltzmann 求解模型,给出两个方案;第 2 节,数值模拟,验证模型的有效性和精度;最后是全文的总结。

1 非线性热传导方程的格子 Boltzmann 模型

已有的大多数 LBM 的建模都是基于最简单的格子 Bhatnagar-Gross-Krook(简称 LBGK)模型^[1].对于一维非线性热传导方程(1),本文将采用 D1Qb-LBGK 模型,即一维网格中每个格点上的粒子有 b 个运动方向(b 待定).受文献[6]启发,在演化方程中增加两个关于源项分布函数的微分算子,所以一维非线性热传导方程(1)的格子 Boltzmann 模型的局部粒子分布函数的演化方程形式如下:

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{\text{eq}}(x, t)] + \Delta t S_i(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t S_i(x, t) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^2 S_i(x, t), \quad (2)$$

这里 $f_i(x, t)$ 表示 t 时刻点 x 处以粒子速度 c_i 沿 i 方向运动的粒子的分布函数. i 是离散速度集合 $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{b-1}\}$ 的指标; Δx 和 Δt 表示格子步长和时间步长,定义 $c = \Delta x / \Delta t$ 作为格子速度; τ 是无量纲的松弛时间; $f_i^{\text{eq}}(x, t)$ 是粒子的局部平衡态分布函数; $S_i(x, t)$ 是源项的分布函数。

1.1 恢复热传导方程

对式(2)做 Taylor 展开,有

$$\begin{aligned} \Delta t (\partial_t + c_i \partial_x) f_i + \frac{\Delta t^2}{2} (\partial_t + c_i \partial_x)^2 f_i + \frac{\Delta t^3}{6} (\partial_t + c_i \partial_x)^3 f_i = \\ -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{\text{eq}}) + \Delta t S_i + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t S_i + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^2 S_i + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3)$$

实施关于空间 1 阶和时间 3 阶的多尺度 Chapman-Enskog 展开,有

$$\partial_x = \varepsilon \partial_{x_1}, \quad (4)$$

$$\partial_t = \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \varepsilon^3 \partial_{t_3}, \quad (5)$$

这里 ε 是 1 个足够小的展开参数.用同样的展开参数 ε 对演化方程中的粒子分布函数 $f_i(x, t)$ 和源项分布函数 $S_i(x, t)$ 做形式展开,有

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)} = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \varepsilon^3 f_i^{(3)} + \dots, \quad (6)$$

$$S_i = \varepsilon S_i^{(1)}. \quad (7)$$

现在把式(4)~(7)代入式(3)中,对比 ε 的各阶系数,得到关于 ε 的 0 阶到 3 阶的一系列微分方程:

$$O(\varepsilon^0): \quad -\frac{1}{\tau} (f_i^{(0)} - f_i^{\text{eq}}) = 0, \quad \text{即 } f_i^{(0)} = f_i^{\text{eq}}, \quad (8)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1}) f_i^{(0)} = -\frac{1}{\tau \Delta t} f_i^{(1)} + S_i^{(1)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^2): \quad & \partial_{t_2} f_i^{(0)} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1})^2 f_i^{(0)} = \\
& - \frac{1}{\tau \Delta t} f_i^{(2)} + \frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1} S_i^{(1)} - \tau \Delta t (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1}) S_i^{(1)}, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^3): \quad & \partial_{t_3} f_i^{(0)} + (1 - 2\tau) \Delta t \partial_{t_2} (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1}) f_i^{(0)} + \\
& \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) \Delta t^2 (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1})^3 f_i^{(0)} = \\
& - \frac{1}{\tau \Delta t} f_i^{(3)} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{t_2} S_i^{(1)} - \frac{\tau}{2} \Delta t^2 \partial_{t_1} (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1}) S_i^{(1)} + \\
& \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2} \right) \Delta t^2 (\partial_{t_1} + c_i \partial_{x_1})^2 S_i^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{t_1}^2 S_i^{(1)}. \quad (11)
\end{aligned}$$

宏观量 $u(x, t)$ 定义为该点各个方向的局部粒子分布函数的和, 即

$$u(x, t) = \sum_i f_i(x, t). \quad (12)$$

由质量守恒, 局部平衡态分布函数应满足

$$\sum_i f_i^{\text{eq}} = \sum_i f_i = u. \quad (13)$$

那么, 由式(6)、(8)和(13), 有

$$\sum_i f_i^{(0)} = u, \quad \sum_i f_i^{(n)} = 0 \quad (n > 0). \quad (14)$$

对于式(9), 关于 i 求和, 且由式(14)有

$$\partial_{t_1} u + \partial_{x_1} \sum_i c_i f_i^{(0)} = \sum_i S_i^{(1)}. \quad (15)$$

由于宏观方程(1)中不含有对流项, 所以设局部平衡态分布函数的 1 阶矩为 0, 即

$$\sum_i c_i f_i^{(0)} = 0, \quad (16)$$

则方程(15)变为

$$\partial_{t_1} u = \sum_i S_i^{(1)}. \quad (17)$$

对于式(10), 关于 i 求和, 并结合式(14)和(16), 有

$$\begin{aligned}
\partial_{t_2} u + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \left(\partial_{t_1}^2 u + \partial_{x_1}^2 \sum_i c_i^2 f_i^{(0)} \right) = \\
\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{t_1} \sum_i S_i^{(1)} - \tau \Delta t \partial_{x_1} \sum_i c_i S_i^{(1)}. \quad (18)
\end{aligned}$$

由方程(17), 且令

$$\sum_i c_i^2 f_i^{(0)} = \frac{au^n}{\Delta t(\tau - 1/2)}, \quad (19)$$

$$\sum_i c_i S_i^{(1)} = 0, \quad \text{即} \quad \sum_i c_i S_i = 0, \quad (20)$$

则得到关于 ε 的 2 阶方程为

$$\partial_{t_2} u = a \partial_{x_1}^2 (u^n). \quad (21)$$

对于式(11), 关于 i 求和, 并结合式(14)、(16)和(17), 有

$$\partial_{t_3} u + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{t_2} (\partial_{t_1} u) + \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) \left(3 \partial_{t_1} \partial_{x_1}^2 \sum_i c_i^2 f_i^{(0)} + \partial_{x_1}^3 \sum_i c_i^3 f_i^{(0)} \right) =$$

$$\left(\tau^2 - \frac{\tau}{2}\right) \Delta t^2 \partial_{x_1}^2 \sum_i c_i^2 S_i^{(1)}. \quad (22)$$

由 $\partial_{i_2}(\partial_{i_1} u) = \partial_{i_1}(\partial_{i_2} u)$ 和式(19)、(21), 有

$$\begin{aligned} \partial_{i_3} u = & - \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \Delta t^2 \partial_{x_1}^3 \sum_i c_i^3 f_i^{(0)} - \Delta t \left(\frac{2\tau^2 - 2\tau + 1/4}{\tau - 1/2}\right) \partial_{i_1} \partial_{x_1}^2 (au^n) + \\ & \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2}\right) \Delta t^2 \partial_{x_1}^2 \sum_i c_i^2 S_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

由式(17), 有

$$\partial_{i_1} \partial_{x_1}^2 (au^n) = \partial_{x_1}^2 [a \partial_{i_1} (u^n)] = \partial_{x_1}^2 (anu^{n-1} \partial_{i_1} u) = \partial_{x_1}^2 \left(anu^{n-1} \sum_i S_i^{(1)}\right). \quad (24)$$

则式(23)变成

$$\begin{aligned} \partial_{i_3} u = & - \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \Delta t^2 \partial_{x_1}^3 \sum_i c_i^3 f_i^{(0)} - \\ & \Delta t \left(\frac{2\tau^2 - 2\tau + 1/4}{\tau - 1/2}\right) \partial_{x_1}^2 \left(anu^{n-1} \sum_i S_i^{(1)}\right) + \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2}\right) \Delta t^2 \partial_{x_1}^2 \sum_i c_i^2 S_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

在这个关于 ε 的 3 阶方程中, 等号右边的后两项是与源项相关的误差项, 应该试图消去它们. 有两种方案可以选择.

方案 1 令 $\sum_i c_i^2 S_i^{(1)} = 0$, 即 $\sum_i c_i^2 S_i = 0$, 则只剩下 1 项需要消除. 在演化方程(2)中增加 1 项, 使其形式为

$$\begin{aligned} f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = & - \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{\text{eq}}(x, t)] + \Delta t S_i + \\ & \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t S_i + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^2 S_i + \Delta t^2 \left(\frac{2\tau^2 - 2\tau + 1/4}{\tau - 1/2}\right) \partial_x^2 (anu^{n-1} S_i). \end{aligned} \quad (26)$$

方案 2 若 $\sum_i c_i^2 S_i^{(1)} \neq 0$, 则需在演化方程(2)中增加两项才可以消除这两个误差. 其形式变为

$$\begin{aligned} f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = & \\ & - \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{\text{eq}}(x, t)] + \Delta t S_i + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t S_i + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^2 S_i + \\ & \Delta t^2 \left(\frac{2\tau^2 - 2\tau + 1/4}{\tau - 1/2}\right) \partial_x^2 (anu^{n-1} S_i) - \Delta t^3 \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2}\right) \partial_x^2 (c_i^2 S_i). \end{aligned} \quad (27)$$

以上两种方案均可以在多尺度展开后最终使方程(25)变成

$$\partial_{i_3} u = - \Delta t^2 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \partial_{x_1}^3 \sum_i c_i^3 f_i^{(0)}. \quad (28)$$

现在, 由 eq.(17) $\times \varepsilon$ + eq.(21) $\times \varepsilon^2$ + eq.(28) $\times \varepsilon^3$, 可以导出宏观方程为

$$\partial_t u = a \partial_x^2 (u^n) - \Delta t^2 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \partial_x^3 \sum_i c_i^3 f_i^{(0)} + \sum_i S_i.$$

若再令 $\sum_i c_i^3 f_i^{(0)} = 0$ 和 $\sum_i S_i = u - u^n$, 这样就精确地恢复出具有 3 阶精度的非线性热传导方程(1).

注 1 设 $\sum_i c_i^2 f_i^{(0)} = N$, $\sum_i c_i^3 f_i^{(0)} = P \neq 0$, 则恢复出来的宏观方程形式为

$$\partial_t u = \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \partial_x^2 N - \Delta t^2 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) \partial_x^3 P + F(u, x, t). \quad (29)$$

所以具有以上形式的一系列非线性偏微分方程可以利用本文建立的格子 Boltzmann 模型,在平衡态分布函数的各阶矩方程的限制下选择合理的平衡态分布函数求解。

注 2 事实上源项 $F(u, x, t) = u - u^n$ 只是针对本文研究的热传导方程的,方程(29)中的源项可以是 u, x 和 t 的其他函数形式。

1.2 LBGK 模型的局部平衡态分布函数

上文所推导的求解非线性热传导方程(1)的两个 LBGK 模型的演化方程形式不同,但是对平衡态分布函数的各阶矩的限制是一致的,即

$$\sum_i f_i^{(0)} = u, \quad \sum_i c_i f_i^{(0)} = 0, \quad \sum_i c_i^2 f_i^{(0)} = \frac{au^n}{\Delta t(\tau - 1/2)}, \quad \sum_i c_i^3 f_i^{(0)} = 0.$$

令 $e_i = c_i/c$, 有

$$\begin{cases} \sum_i f_i^{(0)} = u, \quad \sum_i e_i f_i^{(0)} = 0, \\ \sum_i e_i^2 f_i^{(0)} = \frac{au^n}{\Delta t c^2 (\tau - 1/2)} = \phi(u), \quad \sum_i e_i^3 f_i^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (30)$$

这里无量纲的松弛时间 τ 是一个自由参数。

选择不含零速度的 D1Q4 速度模型计算,离散的速度集合为 $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{c, -c, 2c, -2c\}$, 即 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{1, -1, 2, -2\}$. 解方程组(30), 得到相应的平衡态分布函数为

$$f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = \frac{4u - \phi(u)}{6}, \quad f_3^{(0)} = f_4^{(0)} = \frac{\phi(u) - u}{6}.$$

现在分别确定两个方案的演化方程(26)和(27)中的源项分布函数 S_i .

对于方案 1, 源项分布函数 S_i 的限制条件为

$$\sum_i S_i = F, \quad \sum_i c_i S_i = 0, \quad \sum_i c_i^2 S_i = 0.$$

我们选取

$$S_1 = \frac{7}{10} F, \quad S_2 = \frac{19}{30} F, \quad S_3 = -\frac{11}{60} F, \quad S_4 = -\frac{3}{20} F.$$

对于方案 2, 源项分布函数 S_i 的限制条件为

$$\sum_i S_i = F, \quad \sum_i c_i S_i = 0.$$

可以简单地选取

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{1}{4} F.$$

2 数值模拟

方程(1)的精确解可以用双曲正切方法求出^[11], 其具体形式如下:

$$u(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{n-1}{2n\sqrt{a}} (x - \sqrt{a} t) \right] \right\}^{1/(n-1)}.$$

为了检验计算格式的有效性和精度,我们通常用精确解与数值解比较,来考察 t_k 时刻的全局相对误差 E_{GRE} 和最大绝对误差 E_{MAE} . 分别定义为

$$E_{\text{GRE}}(t_k) = \frac{\sum_i |u^{\text{num}}(x_i, t_k) - u(x_i, t_k)|}{\sum_i |u(x_i, t_k)|},$$

$$E_{\text{MAE}}(t_k) = \max_i |u^{\text{num}}(x_i, t_k) - u(x_i, t_k)|,$$

其中, $u^{\text{num}}(x_i, t_k)$ 和 $u(x_i, t_k)$ 分别为 t_k 时刻格点 x_i 处的数值解与精确解.

宏观的初边值条件由精确解确定.令初始的粒子分布函数直接等于平衡态分布函数.边界处理采用非平衡态外推格式^[15].对于演化方程中偏导数 ∂_t, ∂_t^2 和 ∂_x^2 的计算,都采用有限差分格式来计算.

表 1 格子 Boltzmann 数值解的最小全局相对误差及相应的松弛时间 ($n = 1.2, a = 0.05$)

Table 1 The minimal E_{GRE} of the lattice Boltzmann numerical solutions and the corresponding optimal relaxation times ($n = 1.2, a = 0.05$)

		τ	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$c = 5$	scheme1	1.296	1.514 0E-003	1.207 7E-003	9.394 0E-004	7.273 5E-004
	scheme2	1.325	1.514 0E-003	1.220 5E-003	9.553 7E-004	7.424 0E-004
$c = 8$	scheme1	1.031	3.127 9E-004	2.493 8E-004	1.889 9E-004	1.416 8E-004
	scheme2	1.034	3.191 0E-004	2.536 2E-004	1.922 9E-004	1.442 6E-004
$c = 10$	scheme1	0.932	4.736 7E-005	4.990 1E-005	3.942 6E-005	3.048 8E-005
	scheme2	0.932	4.474 4E-005	4.903 4E-005	3.877 3E-005	2.985 0E-005

表 2 格子 Boltzmann 数值解的最小全局相对误差及相应的松弛时间 ($n = 1.2, a = 0.1$)

Table 2 The minimal E_{GRE} of the lattice Boltzmann numerical solutions and the corresponding optimal relaxation times ($n = 1.2, a = 0.1$)

		τ	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$c = 10$	scheme1	1.231	3.943 4E-004	3.088 6E-004	2.404 7E-004	1.867 6E-004
	scheme2	1.243	3.981 9E-004	3.128 0E-004	2.440 2E-004	1.897 7E-004
$c = 20$	scheme1	0.949	1.562 5E-005	1.208 9E-005	9.501 5E-006	8.172 1E-006
	scheme2	0.949	1.549 7E-005	1.194 0E-005	9.325 5E-006	7.956 6E-006
$c = 25$	scheme1	0.957	1.198 1E-005	9.138 6E-006	7.107 9E-006	6.036 0E-006
	scheme2	0.957	1.187 7E-005	9.021 1E-006	6.968 1E-006	5.871 3E-006

表 3 格子 Boltzmann 数值解的最小全局相对误差及相应的松弛时间 ($n = 1.2, a = 1.0$)

Table 3 The minimal E_{GRE} of the lattice Boltzmann numerical solutions and the corresponding optimal relaxation times ($n = 1.2, a = 1.0$)

		τ	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$c = 20$	scheme1	3.129	1.539 6E-004	1.545 6E-004	1.384 8E-004	1.188 9E-004
	scheme2	3.909	1.588 7E-004	2.491 0E-004	2.126 6E-004	1.784 6E-004
$c = 50$	scheme1	1.731	5.916 7E-005	4.967 9E-005	4.118 8E-005	3.383 9E-005
	scheme2	1.745	5.982 1E-005	5.026 0E-005	4.169 1E-005	3.426 6E-005
$c = 100$	scheme1	1.133	1.008 2E-005	8.203 5E-006	6.651 8E-006	5.371 7E-006
	scheme2	1.134	1.012 4E-005	8.239 7E-006	6.682 6E-006	5.397 6E-006

所有的数值计算统一选取计算域为 $[0, 1]$, 空间步长 $\Delta x = 0.01$. 分别考虑 $n = 1.2, a = 0.05, 0.1, 1.0$ 这几种情形下非线性热传导方程的数值解. 在演化方程中, 无量纲的松弛时间 τ 是一个自由参数, 其取值会影响数值解的精度和稳定性. 我们用不同 τ 进行数值模拟, 找到达到稳定的数值解且使全局相对误差最小的 τ 值. 表 1, 2, 3 给出了不同参数下在时间 $t = 1, 2, 3$,

4 时,采用本文推导的两种方案算得的全局相对误差以及相应的无量纲松弛时间.表 4 列出了 $n = 1.2, a = 0.1$ 时热传导方程的数值解和精确解.由以上几个数表可以看到,两种方案都得到精确的数值解,且两种方案的全局相对误差非常接近.当格子速度 c 增大时,即随着时间步长的减小,数值解的精度有所提高.图 1 为 $n = 1.2, a = 0.1$ 时热传导方程的数值解和精确解的图示(采用方案 1 计算).可以看到两个图几乎一致,进一步验证了我们所构造的格子 Boltzmann 模型的有效性.

表 4 格子 Boltzmann 数值解与精确解的比较 ($n = 1.2, a = 0.1, c = 20, \tau = 0.949$)

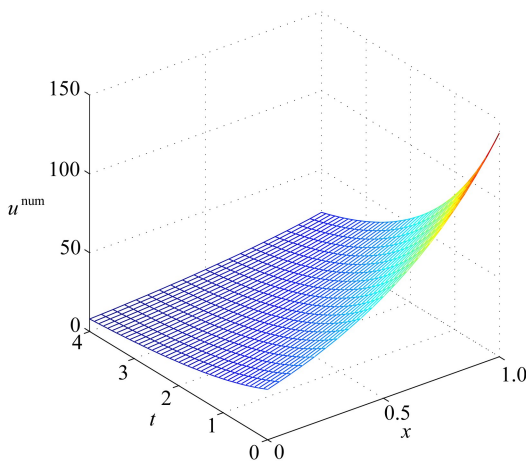
Table 4 Comparison between the lattice Boltzmann numerical solutions and the exact solutions ($n = 1.2, a = 0.1, c = 20, \tau = 0.949$)

x	scheme1-num	scheme2-num	exact
0.1	24.262 83	24.262 83	24.262 78
0.2	27.520 37	27.520 37	27.520 67
0.3	31.323 94	31.323 93	31.324 47
0.4	35.777 37	35.777 35	35.778 02
0.5	41.006 17	41.006 16	41.006 80
0.6	47.162 40	47.162 38	47.162 82
0.7	54.430 61	54.430 58	54.430 59
0.8	63.035 35	63.035 30	63.034 57
0.9	73.250 34	73.250 29	73.248 40

表 5 $t = 1$ 时刻的精度分析 ($\Delta t = 0.001, n = 1.2, a = 0.1$)

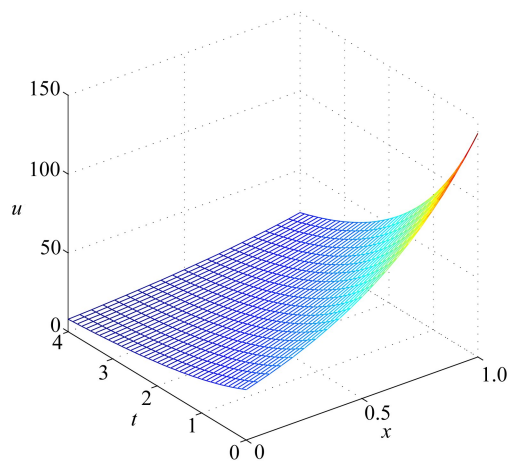
Table 5 Accuracy analysis at $t = 1$ ($\Delta t = 0.001, n = 1.2, a = 0.1$)

N	scheme 1					scheme 2				
	τ	E_{MAE}	order	E_{GRE}	order	τ	E_{MAE}	order	E_{GRE}	order
10	0.515	1.409 5		8.080 8E-003		0.515	1.397 2		7.957 9E-003	
20	0.560	3.928 5E-001	1.843 1	2.469 2E-003	1.710 5	0.560	3.880 9E-001	1.848 1	2.425 4E-003	1.714 2
40	0.744	7.629 0E-002	2.364 4	6.667 0E-004	1.888 9	0.743	7.511 9E-002	2.369 1	6.559 4E-004	1.886 6
80	0.978	2.769 2E-003	4.784 0	3.052 0E-005	4.449 2	0.979	2.586 8E-003	4.859 9	3.340 8E-005	4.295 3



(a) 数值解

(a) The numerical results



(b) 精确解

(b) The exact results

图 1 $n = 1.2, a = 0.1$ 时的数值解与精确解

Fig. 1 The numerical results and exact results for $n = 1.2, a = 0.1$

为了检测此格式的空间精度能否达到理论精度,对参数 $n = 1.2$ 和 $a = 0.1$, 保持计算区域 $[0, 1]$ 不变,对格子数 10, 20, 40 和 80 分别进行数值模拟.表 5 列出了详细的精度分析.精度的阶数是对数坐标系下格子步长与误差做直线拟合后直线的斜率.可以看出该计算格式的实际精度基本上是大于 2 阶的.

3 总 结

本文对含有非线性扩散项和非线性源项的一般形式的热传导方程构造了新的格子 Boltzmann 求解模型.首先在演化方程中增加了两个关于源项分布函数的微分算子,对演化方程实施 Chapman-Enskog 展开,在恢复的宏观方程中为消除多余的误差项,进一步改进演化方程的形式,最终给出了两个方案,均可得到 3 阶精度的宏观方程.在不同的参数选取下,用 D1Q4 速度模型进行了数值模拟.数值结果表明两种方案都得到精度较高的数值解,且两种方案的数值解非常接近.随着时间步长的减小,数值解的精度提高,且实际数值精度基本大于 2 阶.

参考文献 (References):

- [1] Benzi R, Succi S, Vergassola M. The lattice Boltzmann equation: theory and applications[J]. *Physics Reports*, 1992, **222**(3): 145-197.
- [2] CHEN Shi-yi, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, **30**: 329-364.
- [3] Qian Y H, Succi S, Orszag S A. Recent advances in lattice Boltzmann computing[J]. *Annual Reviews of Computational Physics*, 1995, **3**: 195-242.
- [4] Dawson S P, Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann computations for reaction-diffusion equations[J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1993, **98**(2): 1514-1523.
- [5] Ginzburg I. Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation[J]. *Advances in Water Resources*, 2005, **28**(11): 1171-1195.
- [6] Shi B, Guo Z. Lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations[J]. *Physical Review E*, 2009, **79**(1/2): 016701.
- [7] Liu F, Shi W P. Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by lattice Boltzmann method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(1): 150-157.
- [8] YANG Xu-guang, SHI Bao-chang, CHAI Zhen-hua. Coupled lattice Boltzmann method for generalized Keller-Segel chemotaxis model[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2014, **68**(12): 1653-1670.
- [9] 谢驰宇, 张建影, 王沫然. 液滴在固体平表面上均匀蒸发过程的格子 Boltzmann 模拟[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(3): 247-253. (XIE Chi-yu, ZHANG Jian-ying, WANG Mo-ran. Lattice Boltzmann simulation of droplet evaporation on flat solid surface[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(3): 247-253. (in Chinese))
- [10] 黄俊涛, 张力, 雍稳安, 王沫然. 格子 Boltzmann 方法解扩散方程的复杂边界条件研究[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(3): 305-312. (HUANG Jun-tao, ZHANG Li, YONG Wen-an, WANG Mo-ran. On complex boundary conditions of the lattice Boltzmann method for the diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(3): 305-312. (in Chinese))
- [11] Wazwaz A-M. The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **169**(1): 321-338.

- [12] Becker M. Nonlinear transient heat conduction using similarity groups[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2000, **122**(1): 33-39.
- [13] Parlange J Y, Hogarth W L, Parlange M B, Haverkamp R, Barry D A, Ross P J, Steenhuis T S. Approximate analytical solution of the nonlinear diffusion equation for arbitrary boundary conditions[J]. *Transport in Porous Media*, 1998, **30**(1): 45-55.
- [14] Zel'Dovich Y B, Raizer Y P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*[M]. New York: Academic Press, 1966.
- [15] GUO Zhao-li, ZHENG Chu-guang, SHI Bao-chang. Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method[J]. *Chinese Physics B*, 2002, **11**(4): 366-374.

Simulation of the Nonlinear Heat Conduction Equation With the Lattice Boltzmann Method

LIU Fang¹, SHI Wei-ping²

(1. School of Basic Sciences, Changchun University of Technology,
Changchun 130012, P.R.China;

2. Mathematics School, Jilin University, Changchun 130012, P.R.China)

Abstract: A lattice Boltzmann model for the heat conduction equation with a nonlinear source term and a nonlinear diffusion term was presented. 2 differential operators related to the source term distribution function were added to the evolution equation, on which the Chapman-Enskog expansion was carried out. Then, through some further improvement of the evolution equation the macroscopic differential equation was recovered in 2 schemes with high-order truncation errors. Detailed numerical simulations of the nonlinear heat conduction equation with different parameter selections were performed. The numerical results agree well with the exact solutions. This model can also be directly used to numerically solve other partial differential equations in similar forms.

Key words: lattice Boltzmann model; nonlinear heat conduction equation; lattice Bhatnagar-Gross-Krook model; nonlinear source term

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11401046)