文章编号:1000-0887(2015)12-1315-09

$\mathcal{H}$-张量判定的新迭代准则及其应用*

王 峰, 孙德淑

(贵州民族大学 理学院, 贵阳 550025)

摘要: $\mathcal{H}$-张量在科学和工程实际中具有重要应用,但在实际中要判定 $\mathcal{H}$-张量是比较困难的.通过构造不同的正对角阵,结合不等式的放缩技巧,给出了 $\mathcal{H}$-张量判定的几个新迭代准则.作为应用,给出了判定偶数阶实对称张量正定性的条件,相应的数值例子说明了结果的有效性.

关 键 词: $\mathcal{H}$-张量; 实对称张量; 正定性; 不可约

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A

doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2015.12.010

引 言

张量是矩阵的高阶推广, 在许多科学领域, 如信号图像处理、数据挖掘与处理、非线性优化、物理学中的弹性分析和高阶统计学等中有着重要的应用.近年来,很多专家和学者都对其进行了广泛探讨[1-12], 比如张量的 P-F 性质、张量特征值的估计与定位、特殊张量的判定及其应用等问题.本文在文献[12]的基础上, 讨论了 $\mathcal{H}$-张量的判定问题, 得到了一些新的判别方法.最后, 利用对 $\mathcal{H}$-张量的讨论给出偶数阶实对称张量, 即偶次齐次多项式正定性的判定条件.

$\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 表示 n 阶全体复(实)数的集合, $N=\{1,2,\cdots,n\}$.记$\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]$,若 $a_{i_1i_2\cdots i_m}\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$, 其中 $i_j=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$, 则称$\mathcal{A}$为一个 m 阶 n 维的复(实)张量, 记作$\mathcal{A}\in C^{[m,n]}(R^{[m,n]})$.显然,向量是一阶张量, 矩阵是二阶张量.若存在 λ 和非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足多元齐次方程:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=\lambda\boldsymbol{x}^{[m-1]},$$

则称 λ 为$\mathcal{A}$的特征值,$\boldsymbol{x}$ 为相应于 λ 的特征向量, 其中$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}$和 $\boldsymbol{x}^{[m-1]}$ 为 n 维向量, 它们的第 i 个元素分别为

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i=\sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m\in N}a_{ii_2i_3\cdots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m},\ (\boldsymbol{x}^{[m-1]})_i=x_i^{m-1}.$$

若 λ 和 $\boldsymbol{x}$ 的元素都是实数, 则称 λ 为$\mathcal{A}$的 H-特征值, $\boldsymbol{x}$ 为相应于 λ 的 H-特征向量[1].进一步,若对任意的 $\pi\in\Pi_m$, $a_{i_1i_2\cdots i_m}=a_{\pi(i_1i_2\cdots i_m)}$, 则称$\mathcal{A}$为对称张量[1], 其中 Π_m 是指标为 m 的置换群.令 $\delta_{i_1i_2\cdots i_m}$ 为 Kronecker 符号[2],即

* **收稿日期:** 2015-03-30; **修订日期:** 2015-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(11361074);贵州省科学技术基金([2015]2073);贵州省科技厅联合基金([2015]7206);贵州省教育厅自然科学基金([2015]420)

作者简介: 王峰(1981—),男,山东临沂人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: wangf991@163.com).

$$\delta_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{cases}1, & i_1=i_2=\cdots=i_m,\\ 0, & \text{other}.\end{cases}$$

为讨论方便，先给出如下符号：设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$，记

$$R_i(\mathcal{A})=\sum_{\substack{i_2,i_3,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|=\sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m\in N}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|-|a_{ii\cdots i}|,$$

$$N_1=\{i\in N:0<|a_{ii\cdots i}|=R_i(\mathcal{A})\},\ N_2=\{i\in N:0<|a_{ii\cdots i}|<R_i(\mathcal{A})\},$$

$$N_3=\{i\in N:|a_{ii\cdots i}|>R_i(\mathcal{A})\},\ \mu_i=\frac{R_i(\mathcal{A})-|a_{ii\cdots i}|}{R_i(\mathcal{A})},$$

$$r_0=1,\ r_1=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{R_i(\mathcal{A})}{|a_{ii\cdots i}|}\right\},\ r_{k+1}=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\sigma_{k+1,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right\},\qquad k=1,2,3,\cdots,$$

$$\sigma_{k+1,i}=\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+$$
$$r_k\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|,\qquad \forall i\in N_3,\ k\in\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\},$$

$$S^{m-1}=\{i_2i_3\cdots i_m:i_j\in S,j=2,3,\cdots,m\},\ \varnothing\neq S\subseteq N,$$

$$N^{m-1}\backslash S^{m-1}=\{i_2i_3\cdots i_m:i_2i_3\cdots i_m\in N^{m-1},\ i_2i_3\cdots i_m\notin S^{m-1}\},$$

$$N_0^{m-1}=N^{m-1}\backslash(N_2^{m-1}\cup N_3^{m-1}).$$

1 预备知识

定义 1(见文献[3]定义 2.7) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$.若

$$|a_{ii\cdots i}|\geqslant R_i(\mathcal{A}),\qquad \forall i\in N,\tag{1}$$

则称 $\mathcal{A}$ 为对角占优张量.若式(1)中严格不等号均成立,则称 $\mathcal{A}$ 为严格对角占优张量.

定义 2(见文献[12]定义 2) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$.若存在正向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，使得

$$|a_{ii\cdots i}|x_i^{m-1}>\sum_{\substack{i_2,i_3,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m},\qquad \forall i\in N,$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量.

定义 3(见文献[2]定义 2.1) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$.如果存在 N 的非空子集 I，满足

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=0,\qquad \forall i_1\in I,\ \forall i_2,i_3,\cdots,i_m\notin I,$$

则称 $\mathcal{A}$ 是可约的.否则,称 $\mathcal{A}$ 是不可约的.

定义 4(见文献[3]定义 2.5) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$,$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.令

$$\mathcal{B}=[b_{i_1i_2\cdots i_m}]=\mathcal{A}\boldsymbol{X}^{m-1},\ b_{i_1i_2\cdots i_m}=a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m},\qquad i_j\in N,j\in N,$$

则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的积.

引理 1(见文献[12]引理 7) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$.若 $\mathcal{A}$ 是严格对角占优张量,则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量.

引理 2(见文献[12]定理 14) 设 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]\in C^{[m,n]}$.若 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量,则 $N_3\neq\varnothing$.

由引理 1 知，若 $N_1\cup N_2=\varnothing$，则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量；由引理 2 知，若 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量，则 $N_3\neq\varnothing$.因此，我们总假定 $N_1\cup N_2\neq\varnothing$，$N_3\neq\varnothing$.另外,本文还假定 $\mathcal{A}$ 满足:$a_{ii\cdots i}\neq 0$,$R_i(\mathcal{A})\neq$

$0, \forall i \in N$.

引理 3(见文献[11]命题 29) 设 $\mathcal{A} = [a_{i_1 i_2 \cdots i_m}] \in C^{[m,n]}$.若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\mathcal{A}\boldsymbol{X}^{m-1}$ 为$\mathcal{H}$ - 张量, 则$\mathcal{A}$ 为$\mathcal{H}$ - 张量.

引理 4(见文献[12]引理 8) 设 $\mathcal{A} = [a_{i_1 i_2 \cdots i_m}] \in C^{[m,n]}$ 不可约.若

$$|a_{ii\cdots i}| \geqslant R_i(\mathcal{A}), \qquad \forall i \in N$$

且上式中至少有一严格不等式成立, 则 $\mathcal{A}$ 为$\mathcal{H}$ - 张量.

2 主要结果

本节我们给出 $\mathcal{H}$ - 张量的判定条件,并用数值例子说明了结果的有效性.

定理 1 设 $\mathcal{A} = [a_{i_1 i_2 \cdots i_m}] \in C^{[m,n]}$.如果存在非负整数 $k \in \mathbf{Z}_+$, 使得

$$|a_{ii\cdots i}| > \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_0^{m-1} \\ \delta_{i i_2 i_3 \cdots i_m} = 0}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_2^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}|, \qquad \forall i \in N_1 \tag{2}$$

且

$$|a_{ii\cdots i}|\mu_i > \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_0^{m-1}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| + \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_2^{m-1} \\ \delta_{i i_2 i_3 \cdots i_m} = 0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| + \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}|, \qquad \forall i \in N_2, \tag{3}$$

则 $\mathcal{A}$ 为$\mathcal{H}$ - 张量.

证明 令

$$M_i = \frac{1}{\sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}|} \Bigg(|a_{ii\cdots i}| - \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_0^{m-1} \\ \delta_{i i_2 i_3 \cdots i_m} = 0}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| - \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_2^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| - \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| \Bigg), \qquad \forall i \in N_1$$

且

$$M_i = \frac{1}{\sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}|} \Bigg(|a_{ii\cdots i}|\mu_i - \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_0^{m-1}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| - \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_2^{m-1} \\ \delta_{i i_2 i_3 \cdots i_m} = 0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| - \sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| \Bigg), \qquad \forall i \in N_2.$$

如果 $\sum_{i_2 i_3 \cdots i_m \in N_3^{m-1}} |a_{i i_2 i_3 \cdots i_m}| = 0$,则令 $M_i = +\infty$.由式(2) 和式(3) 知 $M_i > 0 (i \in N_1 \cup N_2)$.因此,

可取得充分小的正数 $\varepsilon>0$, 使得

$$0<\varepsilon<\min\left\{\min_{i\in N_1\cup N_2} M_i,\ 1-\max_{j\in N_3}\frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|}\right\}. \tag{4}$$

构造矩阵 $\boldsymbol{X}=\operatorname{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中

$$x_i=\begin{cases}1, & i\in N_1,\\ (\mu_i)^{1/(m-1)}, & i\in N_2,\\ \left(\varepsilon+\dfrac{\sigma_{k+1,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right)^{1/(m-1)}, & i\in N_3.\end{cases}$$

由式(4)知

$$\left(\varepsilon+\frac{\sigma_{k+1,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right)^{1/(m-1)}<1\quad(i\in N_3).$$

因为 $\varepsilon\neq+\infty$, 所以 $x_i\neq+\infty$,进而知 $\boldsymbol{X}$ 为正对角阵.令$\mathcal{B}=[b_{i_1i_2\cdots i_m}]=\mathcal{A}\boldsymbol{X}^{m-1}$.下面,证明$\mathcal{B}$是严格对角占优张量.

当 $i\in N_1$ 时, 如果 $\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|=0$, 由式(2)知

$$\begin{aligned}R_i(\mathcal{B})=&\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}+\\ &\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|(\mu_{i_2})^{1/(m-1)}\cdots(\mu_{i_m})^{1/(m-1)}\leqslant\\ &\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|<\\ &|a_{ii\cdots i}|=|b_{ii\cdots i}|.\end{aligned}\tag{5}$$

如果 $\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\neq0$, 由式(2)和式(4)得

$$\begin{aligned}R_i(\mathcal{B})=&\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}+\\ &\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|(\mu_{i_2})^{1/(m-1)}\cdots(\mu_{i_m})^{1/(m-1)}+\\ &\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\left(\varepsilon+\frac{\sigma_{k+1,i_2}}{|a_{i_2i_2\cdots i_2}|}\right)^{1/(m-1)}\cdots\left(\varepsilon+\frac{\sigma_{k+1,i_m}}{|a_{i_mi_m\cdots i_m}|}\right)^{1/(m-1)}\leqslant\\ &\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\\ &\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\left(\varepsilon+\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{\sigma_{k+1,j}}{|a_{jj\cdots j}|}\right)<\\ &|a_{ii\cdots i}|=|b_{ii\cdots i}|.\end{aligned}\tag{6}$$

当 $i\in N_2$ 时, 如果 $\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|=0$, 由式(3)知

$$R_i(\mathcal{B})=\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}+$$

$$\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|(\mu_{i_2})^{1/(m-1)}\cdots(\mu_{i_m})^{1/(m-1)}\leqslant$$
$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|<$$
$$|a_{ii\cdots i}|\mu_i=|b_{ii\cdots i}|. \tag{7}$$

如果 $\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\neq 0$, 则由式(3)和式(4)得

$$R_i(\mathcal{B})=\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}+$$
$$\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|(\mu_{i_2})^{1/(m-1)}\cdots(\mu_{i_m})^{1/(m-1)}+$$
$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\left(\varepsilon+\frac{\sigma_{k+1,\,i_2}}{|a_{i_2i_2\cdots i_2}|}\right)^{1/(m-1)}\cdots\left(\varepsilon+\frac{\sigma_{k+1,\,i_m}}{|a_{i_mi_m\cdots i_m}|}\right)^{1/(m-1)}\leqslant$$
$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+$$
$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\left(\varepsilon+\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|}\right)<$$
$$|a_{ii\cdots i}|\mu_i=|b_{ii\cdots i}|. \tag{8}$$

当 $i\in N_3$ 时,因为 $|a_{ii\cdots i}|>R_i(\mathcal{A})$, 所以

$$|a_{ii\cdots i}|-\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|>0. \tag{9}$$

再由 $\sigma_{k+1,\,j}/|a_{jj\cdots j}|\leqslant r_{k+1}\leqslant r_k$, $\forall k\in\mathbf{Z}_+$, $\forall j\in N_3$ 得

$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}\ |a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+$$
$$\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|-\sigma_{k+1,\,i}=$$
$$\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|-r_k\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|\leqslant 0. \tag{10}$$

从而, 由式(9)、(10)和 $\varepsilon>0$ 得

$$\varepsilon>\frac{1}{|a_{ii\cdots i}|-\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|}\left\{\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_0^{m-1}}|a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+\right.$$
$$\sum_{i_2i_3\cdots i_m\in N_2^{m-1}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\{\mu_j\}\ |a_{ii_2i_3\cdots i_m}|+$$
$$\left.\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\in N_3^{m-1}\\ \delta_{ii_2i_3\cdots i_m}=0}}\max_{j\in\{i_2,i_3,\cdots,i_m\}}\frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|}\ |a_{ii_2i_3\cdots i_m}|-\sigma_{k+1,\,i}\right\}. \tag{11}$$

由式(11)知，对任意的 $i \in N_3$，有

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii\cdots i}| - R_i(\mathcal{B}) = \\
&\quad |a_{ii\cdots i}|\left(\varepsilon + \frac{\sigma_{k+1,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right) - \sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_0^{m-1}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_m} - \\
&\quad \sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_2^{m-1}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| (\mu_{i_2})^{1/(m-1)} \cdots (\mu_{i_m})^{1/(m-1)} - \\
&\quad \sum_{\substack{i_2 i_3\cdots i_m \in N_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2 i_3\cdots i_m}=0}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| \left(\varepsilon + \frac{\sigma_{k+1,\,i_2}}{|a_{i_2 i_2\cdots i_2}|}\right)^{1/(m-1)} \cdots \left(\varepsilon + \frac{\sigma_{k+1,\,i_m}}{|a_{i_m i_m\cdots i_m}|}\right)^{1/(m-1)} \geqslant \\
&\quad |a_{ii\cdots i}|\left(\varepsilon + \frac{\sigma_{k+1,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right) - \sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_0^{m-1}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| - \\
&\quad \sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_2^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| - \\
&\quad \sum_{\substack{i_2 i_3\cdots i_m \in N_3^{m-1} \\ \delta_{ii_2 i_3\cdots i_m}=0}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| \left(\varepsilon + \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots,\, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|}\right) > 0.
\end{aligned} \tag{12}
$$

综上所述，由式(5)~(8)、(12)知 $|b_{ii\cdots i}| > R_i(\mathcal{B})\ (\forall i \in N)$，即$\mathcal{B}$是严格对角占优的，由引理 1 知$\mathcal{B}$是$\mathcal{H}$ - 张量.进而由引理 3 知$\mathcal{A}$是$\mathcal{H}$ - 张量.证毕. □

定理 2 设 $\mathcal{A} = [a_{i_1 i_2\cdots i_m}] \in C^{[m,\,n]}$ 不可约.如果存在非负整数 $k \in \mathbf{Z}_+$，使得

$$
\begin{aligned}
|a_{ii\cdots i}| \geqslant &\sum_{\substack{i_2 i_3\cdots i_m \in N_0^{m-1} \\ \delta_{ii_2 i_3\cdots i_m}=0}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| + \sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_2^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| + \\
&\sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots,\, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}|, \qquad \forall i \in N_1
\end{aligned} \tag{13}
$$

且

$$
\begin{aligned}
|a_{ii\cdots i}|\mu_i \geqslant &\sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_0^{m-1}} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| + \sum_{\substack{i_2 i_3\cdots i_m \in N_2^{m-1} \\ \delta_{ii_2 i_3\cdots i_m}=0}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots, i_m\}} \{\mu_j\} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}| + \\
&\sum_{i_2 i_3\cdots i_m \in N_3^{m-1}} \max_{j \in \{i_2, i_3, \cdots,\, i_m\}} \frac{\sigma_{k+1,\,j}}{|a_{jj\cdots j}|} |a_{ii_2 i_3\cdots i_m}|, \qquad \forall i \in N_2,
\end{aligned} \tag{14}
$$

且上式中至少有一严格不等式成立，则 $\mathcal{A}$ 为$\mathcal{H}$ - 张量.

证明 构造矩阵 $\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中

$$
x_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1, \\ (\mu_i)^{1/(m-1)}, & i \in N_2, \\ \left(\dfrac{\sigma_{k+1,\,i}}{|a_{ii\cdots i}|}\right)^{1/(m-1)}, & i \in N_3. \end{cases}
$$

由 $\mathcal{A}$ 的不可约性知 $x_i \neq +\infty$ ，故 $\boldsymbol{X}$ 是正对角阵.令 $\mathcal{B} = [b_{i_1 i_2\cdots i_m}] = \mathcal{A}\boldsymbol{X}^{m-1}$.

类似于定理 1 的证明，可证得 $|b_{ii\cdots i}| \geqslant R_i(\mathcal{B})\ (\forall i \in N)$，且由定理条件知至少存在一个指标 $i \in N_1 \cup N_2$，使得 $|b_{ii\cdots i}| > R_i(\mathcal{B})$.

综上所述，$|b_{ii\cdots i}| \geqslant R_i(\mathcal{B})\ (\forall i \in N)$ 且至少有一严格不等式成立.因 $\mathcal{A}$ 是不可约的，故 $\mathcal{B}$ 也是不可约的.由引理 4 知$\mathcal{B}$是$\mathcal{H}$ - 张量，进而由引理 3 知 $\mathcal{A}$ 是$\mathcal{H}$ - 张量.证毕. □

例 1 设 $\mathcal{A}=[\boldsymbol{A}(1,:,:),\boldsymbol{A}(2,:,:),\boldsymbol{A}(3,:,:)]$，其中

$$\boldsymbol{A}(1,:,:)=\begin{pmatrix}12&1&0\\1&10&0\\1&1&10\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}(2,:,:)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&18&0\\1&0&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}(3,:,:)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&15\end{pmatrix}.$$

可见

$$|a_{111}|=12,\ R_1(\mathcal{A})=24,\ |a_{222}|=18,\ R_2(\mathcal{A})=6,\ |a_{333}|=15,\ R_3(\mathcal{A})=5,$$

故 $N_1=\varnothing$, $N_2=\{1\}$, $N_3=\{2,3\}$.计算得

$$\mu_1=\frac{1}{2},\ \frac{\sigma_{3,2}}{|a_{222}|}=\frac{37}{216},\ \frac{\sigma_{3,3}}{|a_{333}|}=\frac{19}{180}.$$

因为

$$\sum_{jk\in N_0^2}|a_{1jk}|+\sum_{\substack{jk\in N_2^2\\ \delta_{1jk}=0}}\max_{l\in\{j,k\}}\{\mu_l\}|a_{1jk}|+\sum_{jk\in N_3^2}\max_{l\in\{j,k\}}\frac{\sigma_{k+1,l}}{|a_{ll\cdots l}|}|a_{1jk}|=$$

$$(1+0+1+1)+\frac{37}{216}+10\times\frac{37}{216}+10\times\frac{19}{180}=$$

$$\frac{1\,283}{216}<6=|a_{11\cdots 1}|\mu_1,$$

所以 $\mathcal{A}$ 满足本文定理 1 的条件,故 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{H}$-张量.

3 应 用

2005 年, Qi(祈力群)等[1]利用张量特征值研究多项式的正定性判定问题,即对一个多项式 f, 如何判断对任意的 $x\in R^n\backslash\{0\}$, $f(x)>0$ 是否成立? 他们指出对任意一个 m 次齐次多项式 $f(x)$ 都存在实对称张量 $\mathcal{A}=[a_{i_1i_2\cdots i_m}]$, 使得

$$f(x)=\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m\in N}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$,并且当 m 是偶数时给出下面的判定结果.

定理 3(见文献[1]定理 5) 设 $f(x)$ 如式(15)所示.若 m 为偶数, 则下述命题等价:

1) $f(x)$ 是正定的; 2) $\mathcal{A}$ 是正定的; 3) $\mathcal{A}$ 的所有 H-特征值是正的.

根据定理 3,实对称张量 $\mathcal{A}$(或由 $\mathcal{A}$ 定义的多项式)的正定性可以通过计算 $\mathcal{A}$ 的所有 H-特征值来判断.然而, 当阶数或维数很大时,计算 $\mathcal{A}$ 的 H-特征值非常困难.因此,寻找其它简单有效的判定正定性的方法是非常有意义的.Li 等[12]给出了齐次多项式正定性的判定不等式.

定理 4(见文献[12]定理 9) 设 $f(x)$ 如式(15)所示.令 m 为偶数,若 $a_{ii\cdots i}>R_i(\mathcal{A})$ $(\forall i\in N)$,则 $f(x)$ 是正定的.

定理 5(见文献[12]定理 6) 设 $f(x)$ 如式(15)所示.令 m 为偶数,若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$-张量,则 $\mathcal{A}$ 是正定的, 即 $f(x)$ 是正定的.

由定理 5 即得:

定理 6 设 $f(x)$ 如式(15)所示.令 m 为偶数,若 $\mathcal{A}$ 满足定理 1 或定理 2 的条件,则 $\mathcal{A}$ 是正定的,即 $f(x)$ 是正定的.

例 2 考虑 4 次齐次多项式

$$f(x)=\mathcal{A}\boldsymbol{x}^4=2x_1^4+x_2^4+30x_3^4+30x_4^4-8x_1x_3^3+8x_2x_4^3-12x_3^3x_4,$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}\in R^4$, $\mathcal{A}=[a_{ijkl}]\in R^{[4,4]}$ 是一个对称张量,且

$$a_{1111}=2,\ a_{2222}=1,\ a_{3333}=30,\ a_{4444}=30;$$
$$a_{1333}=a_{3133}=a_{3313}=a_{3331}=-2;$$
$$a_{2444}=a_{4244}=a_{4424}=a_{4442}=2;$$
$$a_{3334}=a_{3343}=a_{3433}=a_{4333}=-3,$$

其余 $a_{ijkl}=0$.经验证,$\mathcal{A}$ 满足本文定理 1 的条件,由定理 6 知$\mathcal{A}$ 是正定的, 即 $f(x)$ 是正定的.

4 结 论

文中讨论了 $\mathcal{H}$ - 张量的判定问题,得到了几个新的判定条件,并给出了其在偶数阶实对称张量,即偶次齐次多项式正定性判定中的应用,数值例子说明了本文所得结果的有效性.故所得结论是对有关文献的一个有益补充.

致谢 感谢贵州民族大学引进人才科研基金(15XRY004)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] QI Li-qun. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor[J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2005, **40**(6): 1302-1324.

[2] YANG Yu-ning, YANG Qing-zhi. Further results for Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2010, **31**(5): 2517-2530.

[3] LI Chao-qian, LI Yao-tang, KONG Xu. New eigenvalue inclusion sets for tensors[J]. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 2014, **21**(1): 39-50.

[4] Kolda T G, Mayo J R. Shifted power method for computing tensor eigenpairs[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2011, **32**(4): 1095-1124.

[5] Lim L H. Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach[C]//*Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, 2005, **1**: 129-132.

[6] QI Li-qun. Eigenvalues and invariants of tensors[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **325**(2): 1363-1377.

[7] QI Li-qun, WANG Fei, WANG Yi-ju. Z-eigenvalue methods for a global polynomial optimization problem[J]. *Mathematical Programming*, 2009, **118**(2): 301-316.

[8] NI Qin, QI Li-qun, WANG Fei. An eigenvalue method for the positive definiteness identification problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 1096-1107.

[9] NI Gu-yan, QI Li-qun, WANG Feng, WANG Yi-ju. The degree of the E-characteristic polynomial of an even order tensor[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **329**(2): 1218-1229.

[10] ZHANG Li-ping, QI Li-qun, ZHOU Guang-lu. *M*-tensors and some applications[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, **35**(2): 437-452.

[11] DING Wei-yang, QI Li-qun, WEI Yi-min. *M*-tensors and nonsingular *M*-tensors[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2013, **439**(10): 3264-3278.

[12] LI Chao-qian, WANG Feng, ZHAO Jian-xing, ZHU Yan, LI Yao-tang. Criterions for the positive definiteness of real supersymmetric tensors[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, **255**(1): 1-14.

New Iterative Judging Criteria for $\mathcal{H}$ - Tensors and Some Applications

WANG Feng, SUN De-shu

(*College of Science*, *Guizhou Minzu University*, *Guiyang* 550025, *P.R.China*)

Abstract: $\mathcal{H}$ - tensors have wide applications in science and engineering, but it is difficult to determine whether a given tensor is an $\mathcal{H}$ - tensor or not in practice. Several new iterative judging criteria were given for $\mathcal{H}$ - tensors through construction of different positive diagonal matrices and introduction of some techniques of inequalities. For application, some sufficient conditions of the positive definiteness for an even-order real symmetric tensor were given. Results of the numerical examples illustrate the effectiveness of the presented criteria.

Key words: $\mathcal{H}$ - tensor; real symmetric tensor; positive definiteness; irreducible

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11361074)