

多间隙二级齿轮非线性振动 分岔特性研究*

王树国¹, 张艳波¹, 刘文亮², 郭丽峰¹, 廖鹏泰¹, 齐立美¹

(1. 塔里木大学 信息工程学院, 新疆 阿拉尔 843300;
2. 塔里木大学 机械电气化工程学院, 新疆 阿拉尔 843300)

摘要: 采用集中质量法,建立了多间隙二级齿轮系统的五自由度非线性振动模型,模型考虑了各齿轮副间变刚度、齿侧间隙、支承间隙以及传动误差等非线性因素,推导出系统量纲振动微分方程,并利用分岔图、Poincaré 截面图,全面地分析了系统转速、阻尼比对系统分岔特性的影响.结果发现系统在各种非线性因素的综合影响下,表现出丰富复杂的分岔特性.系统随着参数的变化先后出现短周期运动、长周期运动、拟周期运动及混沌运动.在不同阻尼比下,系统随着转速的逐渐减小,由稳定的周期1运动,倍化分岔变为稳定的周期2运动,再经过 Hopf 分岔变为拟周期运动,通过激变又变为稳定的周期1运动,最终通过 Hopf 分岔-锁相进入混沌.随着转速的逐渐增大,系统随阻尼比变化的混沌运动范围减小,出现稳定的周期1运动、长周期和拟周期运动,并且长周期和拟周期运动范围逐渐变小而稳定的周期1运动的范围逐渐变大.

关键词: 非线性振动; Hopf 分岔; 多间隙; 齿轮

中图分类号: TH113 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.02.006

引 言

在齿轮传动设计之初,设计者从提高动态性能的目的出发,主动地进行参数、结构、材料、润滑及安装等方面的选择,同时对传动型式、布局型式等方面进行预估,以期以较低的成本取得最优的动态性能,提高齿轮传动系统乃至整个机器的综合技术经济性能.基于这些方面的考虑,设计者有必要对齿轮传动系统动力学开展研究,这不仅对齿轮传动系统设计有重要的理论价值,而且还有很重要的社会和技术经济意义^[1].姚文席、魏任之^[2]在渐开线直齿轮的啮合冲击方面作了不少的研究工作.鄂中凯等^[3]认为在多级齿轮传动系统中,不能只对一对互相啮合的齿轮加以分析,而必须考虑前后几级传动齿轮间的相互影响.唐增宝等^[4]提出了多级齿轮传动系统的动态仿真技术,重点论述了如何建立齿轮传动系统的多自由度时变非线性动力学方程.

二级齿轮传动系统构成复杂、结构紧凑、动力传动平稳高效,被广泛用于汽车、火车、飞机、

* 收稿日期: 2015-09-16; 修订日期: 2015-11-02

作者简介: 王树国(1986—),男,讲师,硕士(E-mail: wsgjtdx@163.com);

张艳波(1985—),男,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: zhangyanbo219@163.com).

船舶及工厂传动系统中,随着现代工业化的迅速发展,对二级齿轮系统的工作效能要求不断提高,更快更准地预测二级齿轮系统的动力学行为变得更加重要.由于二级齿轮系统都存在齿侧间隙、轴侧间隙,所以二级齿轮系统都是强非线性振动系统^[5-6].齿轮振动会影响二级齿轮系统的寿命和工作效能,有必要对二级齿轮系统的振动响应进行深入研究.本文通过建立二级齿轮传动系统的数学模型,全面分析各个参数对二级齿轮系统的动态影响,为二级齿轮传动系统的设计和稳定工作提供必要的参考参数^[7-10].只有在了解了二级齿轮传动系统的动力学行为和动态性能的基础上,才能设计出高性能的二级齿轮系统,才能满足当今高速、重载、高性能机械化设备的要求^[11-13].

1 力学模型

本文以二级直齿轮传动系统为研究对象^[14-15],系统简图如图 1 所示.系统由 3 根轴(轴 O_1-O_1 ,轴 O_2-O_2 ,轴 O_3-O_3)、两对齿轮及轴承组成.系统的力学模型如图 2 所示.齿轮 2、齿轮 3 在中间轴 O_2-O_2 上, $M_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为齿轮 i 的质量, $R_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为齿轮 i 的基圆半径, $I_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为齿轮 i 的转动惯量, $Z_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为齿轮 i 的齿数, $G_i(i = 1, 2)$, $F_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 分别为第 i 个齿侧间隙和第 j 个轴侧间隙构成的非线性位移函数, c_1, c_2 为各齿轮对啮合处的啮合阻尼, $K_1(\bar{t}), K_2(\bar{t})$ 为各齿轮对啮合处的时变啮合刚度, $\bar{e}_1(\bar{t}), \bar{e}_2(\bar{t})$ 分别为各齿轮对的综合啮合误差, $c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}$ 和 $k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{41}$ 分别为轴 O_1-O_1 、轴 O_2-O_2 和轴 O_3-O_3 两端轴承等效元件的阻尼和平均刚度, $Y_i, \theta_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 分别为第 i 个齿轮轴心的横向振动位移和扭转振动位移, $T_1(\bar{t}), T_4(\bar{t})$ 分别为系统的输入和输出扭矩, F_a, F_b, F_c 分别为各轴承对齿轮的作用力, $2b_{11}, 2b_{21}, 2b_{31}, 2b_{41}$ 分别为各轴承与各齿轮间的间隙, $2\bar{b}_1, 2\bar{b}_2$ 分别为各齿轮对间的齿侧间隙.

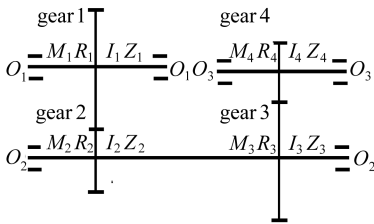


图 1 传动系统简图

Fig. 1 Schematic of the gear transmission system diagram

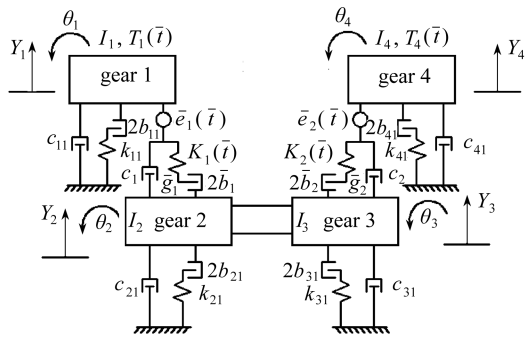


图 2 系统动力学模型图

Fig. 2 The system dynamics model

1.1 系统振动方程

在不考虑齿面摩擦^[16]和中间轴 O_2-O_2 的扭转弯曲和传动轴质量,并假设齿轮 2 和齿轮 3 的轴心横向振动位移相同的情况下,可知 $\theta_2 = \theta_3, Y_2 = Y_3$,根据系统力学模型图 2 可得如下振动微分方程:

$$\begin{cases} M_1 Y_1'' + c_{11} Y_1' + k_{11} F_1(Y_1, b_{11}) - D_{12} - Q_{12} = F_a, \\ (M_2 + M_3) Y_2'' + c_{21} Y_2' + k_{21} F_2(Y_2, b_{21}) + c_{31} Y_2' + \\ \quad k_{31} F_3(Y_2, b_{31}) + D_{12} + Q_{12} - D_{34} - Q_{34} = F_c, \\ M_4 Y_4'' + c_{41} Y_4' + k_{41} F_4(Y_4, b_{41}) + D_{34} + Q_{34} = F_b, \\ I_1 \theta_1'' + R_1 D_{12} + R_1 Q_{12} = T_1(\bar{t}), \\ (I_2 + I_3) \theta_2'' + R_2 D_{12} + R_2 Q_{12} + R_3 D_{34} + R_3 Q_{34} = 0, \\ I_4 \theta_4'' + R_4 D_{34} + R_4 Q_{34} = T_4(\bar{t}), \end{cases} \quad (1)$$

式中, $(\)'$, $(\)''$ 是对时间 \bar{t} 求导, D_{12} 是齿轮 1 和齿轮 2 间的弹性啮合力, D_{34} 是齿轮 3 和齿轮 4 间的弹性啮合力, Q_{12} 是齿轮 1 和齿轮 2 间的粘性啮合力, Q_{34} 是齿轮 3 和齿轮 4 间的粘性啮合力, 并且有

$$D_{12} = K_1(\bar{t}) G_1(R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2, b_1),$$

$$Q_{12} = c_1(R_1 \theta_1' + R_2 \theta_2' + \bar{e}_1'(\bar{t}) - Y_1' + Y_2'),$$

$$D_{34} = K_2(\bar{t}) G_2(R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3, b_2),$$

$$Q_{34} = c_2(R_3 \theta_2' + R_4 \theta_4' + \bar{e}_2'(\bar{t}) - Y_2' + Y_3').$$

齿轮系统间隙非线性位移函数可表示为

$$G_1(R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2, b_1) = \begin{cases} R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2 - b_1, \\ \quad R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2 > b_1, \\ 0, \quad |R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2| \leq b_1, \\ R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2 + b_1, \\ \quad R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}) - Y_1 + Y_2 < -b_1, \end{cases}$$

$$G_2(R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3, b_2) = \begin{cases} R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3 - b_2, \\ \quad R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3 > b_2, \\ 0, \quad |R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3| \leq b_2, \\ R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3 + b_2, \\ \quad R_3 \theta_2 + R_4 \theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t}) - Y_2 + Y_3 < -b_2. \end{cases}$$

齿轮啮合刚度 $K_1(\bar{t})$, $K_2(\bar{t})$ 随时间周期变化, 可表示成谐波级数形式, 在此取三次谐波^[2]形式如下:

$$\begin{cases} K_1(\bar{t}) = k_{1m} + k_{a11} \cos(\omega_{h1} \bar{t} + \tau_{11}) + \\ \quad k_{a12} \cos(2\omega_{h1} \bar{t} + \tau_{12}) + k_{a13} \cos(3\omega_{h1} \bar{t} + \tau_{13}), \\ K_2(\bar{t}) = k_{2m} + k_{a21} \cos(\omega_{h2} \bar{t} + \tau_{21}) + \\ \quad k_{a22} \cos(2\omega_{h2} \bar{t} + \tau_{22}) + k_{a23} \cos(3\omega_{h2} \bar{t} + \tau_{23}), \end{cases}$$

其中, k_{im} , ω_{hi} , k_{aj} , τ_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) 分别为平均啮合刚度、啮合频率、谐波分量系数和对应的相位角。

啮合阻尼表达式分别为

$$c_1 = 2\xi_1 \sqrt{k_{1m}/(1/M_1 + 1/M_2)}, c_2 = 2\xi_2 \sqrt{k_{2m}/(1/M_3 + 1/M_4)},$$

式中, ξ_1, ξ_2 分别为齿轮 1 和齿轮 2 的相对阻尼比及齿轮 3 和齿轮 4 的相对阻尼比。

为了降低方程(1)的维数,令 $p_1 = R_1\theta_1 + R_2\theta_2 + \bar{e}_1(\bar{t}), p_2 = R_3\theta_2 + R_4\theta_4 + \bar{e}_2(\bar{t})$, 则式(1)变为

$$\left\{ \begin{aligned} & Y_1'' + \frac{c_{11}}{M_1} Y_1' + \frac{k_{11}}{M_1} F_1(Y_1, b_{11}) - \frac{D_{12}}{M_1} - \frac{Q_{12}}{M_1} = \frac{F_a}{M_1}, \\ & Y_2'' + \frac{c_{21}}{M_{23}} Y_2' + \frac{k_{21}}{M_{23}} F_2(Y_2, b_{21}) + \frac{c_{31}}{M_{23}} Y_2' + \frac{k_{31}}{M_{23}} F_3(Y_2, b_{31}) + \\ & \quad \frac{D_{12}}{M_{23}} + \frac{Q_{12}}{M_{23}} - \frac{D_{34}}{M_{23}} - \frac{Q_{34}}{M_{23}} = \frac{F_c}{M_{23}}, \\ & Y_4'' + \frac{c_{41}}{M_4} Y_4' + \frac{k_{41}}{M_4} F_4(Y_3, b_{41}) + \frac{D_{34}}{M_4} + \frac{Q_{34}}{M_4} = \frac{F_b}{M_4}, \\ & p_1'' + \left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_{23}} \right) D_{12} + \left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_{23}} \right) Q_{12} + \frac{R_2 R_3}{I_{23}} D_{34} + \frac{R_2 R_3}{I_{23}} Q_{34} = \\ & \quad \frac{R_1 T_1(\bar{t})}{I_1} - \bar{e}_1''(\bar{t}), \\ & p_2'' + \left(\frac{R_3^2}{I_{23}} + \frac{R_4^2}{I_4} \right) D_{34} + \left(\frac{R_3^2}{I_{23}} + \frac{R_4^2}{I_4} \right) Q_{34} + \frac{R_2 R_3}{I_{23}} D_{12} + \frac{R_2 R_3}{I_{23}} Q_{12} = \\ & \quad \frac{R_4 T_4(\bar{t})}{I_4} - \bar{e}_2''(\bar{t}), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

其中

$$M_{23} = M_2 + M_3, I_{23} = I_2 + I_3.$$

1.2 系统量纲一方程

由于系统参数的数量级差别很大,需对方程(2)进行量纲处理,引入量纲一时间 $t = \omega_c \bar{t}$, ω_c 为系统的频率, b_c 为位移标称尺度,则量纲一位移为

$$y_1 = \frac{Y_1}{b_c}, y_2 = \frac{Y_2}{b_c}, y_3 = \frac{Y_4}{b_c}, x_i = \frac{p_i}{b_c} \quad (i = 1, 2),$$

量纲一综合啮合误差为

$$e_i(\bar{t}) = \frac{\bar{e}_i(\bar{t})}{b_c} \quad (i = 1, 2),$$

量纲一转速为

$$\omega_i = \frac{\omega_{hi}}{\omega_c} \quad (i = 1, 2),$$

$$u = \frac{z_2}{z_3}, \omega_2 = u\omega_1, m_1 = \frac{I_1 I_{23}}{R_1^2 I_{23} + R_2^2 I_1}, m_2 = \frac{I_{23}}{R_2 R_3}, m_3 = \frac{I_4 I_{23}}{R_4^2 I_{23} + R_3^2 I_4},$$

则量纲一方程($\dot{}$), ($\ddot{}$)是对时间 t 求导):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 + 2(\zeta_{11} + \zeta_{12})\dot{y}_1 - 2\zeta_{12}\dot{y}_1 - 2\zeta_{12}\dot{x}_1 + l_{11}F_1\left(y_1, \frac{b_{11}}{b_c}\right) - l_{12}k_1(t)g_1(t) = f_a, \\ \ddot{y}_2 - 2\zeta_{21}\dot{y}_1 + 2(\zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} + \zeta_{24})\dot{y}_2 - 2\zeta_{22}\dot{y}_3 + 2\zeta_{23}\dot{x}_1 - 2\zeta_{24}\dot{x}_2 + \\ \quad l_{21}F_2\left(y_2, \frac{b_{21}}{b_c}\right) + l_{22}F_3\left(y_2, \frac{b_{31}}{b_c}\right) + l_{23}k_1(t)g_1(t) - l_{24}k_2(t)g_2(t) = f_c, \\ \ddot{y}_3 - 2\zeta_{31}\dot{y}_2 + 2(\zeta_{31} + \zeta_{32})\dot{y}_3 + 2\zeta_{31}\dot{x}_2 + l_{31}F_4\left(y_3, \frac{b_{41}}{b_c}\right) + l_{32}k_2(t)g_2(t) = f_b, \\ \ddot{x}_1 - 2\zeta_{41}\dot{y}_1 + 2(\zeta_{41} - \zeta_{42})\dot{y}_2 + 2\zeta_{42}\dot{y}_3 + 2\zeta_{41}\dot{x}_1 + 2\zeta_{42}\dot{x}_2 + \\ \quad l_{41}k_1(t)g_1(t) + l_{42}k_2(t)g_2(t) = f_1, \\ \ddot{x}_2 - 2\zeta_{51}\dot{y}_1 + 2(\zeta_{51} - \zeta_{52})\dot{y}_2 + 2\zeta_{52}\dot{y}_3 + 2\zeta_{51}\dot{x}_1 + 2\zeta_{52}\dot{x}_2 + \\ \quad l_{51}k_1(t)g_1(t) + l_{52}k_2(t)g_2(t) = f_2, \end{array} \right.$$

其中

$$\zeta_{11} = \frac{c_{31}}{2M_1\omega_c}, \zeta_{12} = \frac{c_1}{2M_1\omega_c}, \zeta_{21} = \frac{c_1}{2M_{23}\omega_c}, \zeta_{22} = \frac{c_2}{2M_{23}\omega_c}, \zeta_{23} = \frac{c_{21}}{2M_{23}\omega_c},$$

$$\zeta_{24} = \frac{c_{31}}{2M_{23}\omega_c}, \zeta_{31} = \frac{c_2}{2M_4\omega_c}, \zeta_{32} = \frac{c_{41}}{2M_4\omega_c}, \zeta_{41} = \frac{c_1}{2m_1\omega_c}, \zeta_{42} = \frac{c_2}{2m_2\omega_c},$$

$$\zeta_{51} = \frac{c_1}{2m_2\omega_c}, \zeta_{52} = \frac{c_2}{2m_3\omega_c}, l_{11} = \frac{k_{11}}{M_1\omega_c^2}, l_{12} = \frac{k_{1m}}{M_1\omega_c^2}, l_{21} = \frac{k_{21}}{M_{23}\omega_c^2},$$

$$l_{22} = \frac{k_{31}}{M_{23}\omega_c^2}, l_{23} = \frac{k_{1m}}{M_{23}\omega_c^2}, l_{24} = \frac{k_{2m}}{M_{23}\omega_c^2}, l_{31} = \frac{k_{41}}{M_4\omega_c^2}, l_{32} = \frac{k_{2m}}{M_4\omega_c^2},$$

$$l_{41} = \frac{k_{1m}}{m_1\omega_c^2}, l_{42} = \frac{k_{2m}}{m_2\omega_c^2}, l_{51} = \frac{k_{1m}}{m_2\omega_c^2}, l_{52} = \frac{k_{2m}}{m_3\omega_c^2},$$

$$f_a = \frac{F_a}{M_1\omega_c^2 b_c}, f_c = \frac{F_c}{M_{23}\omega_c^2 b_c}, f_b = \frac{F_b}{M_4\omega_c^2 b_c},$$

$$f_1 = \frac{R_1 T_1(t)}{I_1 \omega_c^2 b_c} - \ddot{e}_1, f_2 = \frac{R_2 T_4(t)}{I_4 \omega_c^2 b_c} - \ddot{e}_2,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{im}} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3),$$

$$k_1(t) = 1 + \varepsilon_{11}\cos(\omega_1 t + \tau_{11}) + \varepsilon_{12}\cos(2\omega_1 t + \tau_{12}) + \varepsilon_{13}\cos(3\omega_1 t + \tau_{13}),$$

$$k_2(t) = 1 + \varepsilon_{21}\cos(u\omega_1 t + \tau_{21}) + \varepsilon_{22}\cos(2u\omega_1 t + \tau_{22}) + \varepsilon_{23}\cos(3u\omega_1 t + \tau_{23}),$$

$$g_1(t) = \begin{cases} x_1 - y_1 + y_2 - \frac{b_1}{b_c}, & x_1 - y_1 + y_2 > \frac{b_1}{b_c}, \\ 0, & |x_1 - y_1 + y_2| \leq \frac{b_1}{b_c}, \\ x_1 - y_1 + y_2 + \frac{b_1}{b_c}, & x_1 - y_1 + y_2 < -\frac{b_1}{b_c}, \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} x_2 - y_2 + y_3 - \frac{b_2}{b_c}, & x_2 - y_2 + y_3 > \frac{b_2}{b_c}, \\ 0, & |x_2 - y_2 + y_3| \leq \frac{b_2}{b_c}, \\ x_2 - y_2 + y_3 + \frac{b_2}{b_c}, & x_2 - y_2 + y_3 < -\frac{b_2}{b_c}, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} y_i - \frac{b_{i1}}{b_c}, & y_i > \frac{b_{i1}}{b_c}, i = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & |y_i| \leq \frac{b_{i1}}{b_c}, i = 1, 2, 3, 4, \\ y_i + \frac{b_{i1}}{b_c}, & y_i < -\frac{b_{i1}}{b_c}, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

2 系统运动分岔分析

表 1 齿轮传动系统实际参数

Table 1 The actual parameters of the gear transmission system

parameter	gear 1	gear 2	gear 3	gear 4	shaft 1	shaft 2	shaft 3
base circle radius r/m	0.1	0.05	0.1	0.05			
moment of inertia $I/(kg \cdot m^2)$	0.074	0.004 6	0.037 5	0.002 3			
meshing stiffness $k/(N \cdot m^{-1})$	5×10^8	5×10^8	2.5×10^8	2.5×10^8			
meshing damping $c/(N \cdot s \cdot m^{-1})$	2 721	2 721	1 360	1 360			
average stiffness $K/(N \cdot m^{-1})$					1×10^7		5×10^8
average stiffness $C/(N \cdot s \cdot m^{-1})$						2 721	

为进行齿轮系统运动分岔特性的研究,本文取系统的一组基本参数为

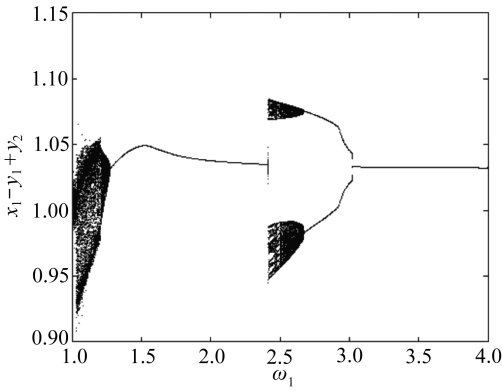
$$\varepsilon_{11} = 0.3, \varepsilon_{12} = -0.18, \varepsilon_{13} = 0.04, \varepsilon_{21} = 0.3, \varepsilon_{22} = -0.18, \varepsilon_{23} = 0.04, \\ f_1 = 0.046 2, f_2 = 0.185, f_a = 0, f_b = 0, f_c = 0, \omega_c = 9 874, Z_2 = 2Z_3.$$

2.1 系统随参数量纲一转速 ω_1 变化的分岔特性

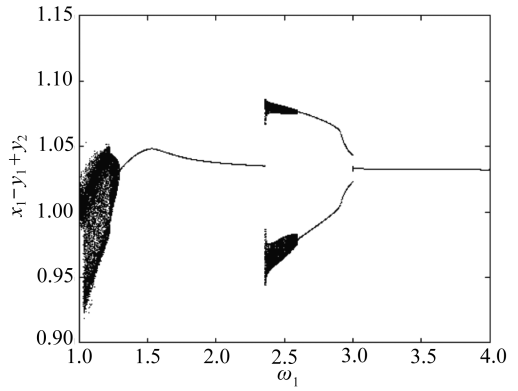
其他参数不变,相对阻尼比 ξ_1 分别取 0.040, 0.045, 0.050 和 0.055 时系统运动方程的解随 ω_1 变化的分岔特性如图 3 所示。

图 3 展现了系统随 ω_1 变化而表现出的复杂多样的分岔特性。从图 3(a) 可知,当 $\omega_1 > 3.022 5$ 时,系统为稳定的周期 1 运动;随后, $\omega_1 = 3.022 5$ 时发生倍化分岔,系统由稳定的周期 1 运动分岔为稳定的周期 2 运动;随着 ω_1 的继续减小,当 $\omega_1 = 2.677 5$ 时发生 Hopf 分岔,系统由稳定的周期 2 运动分岔为概周期运动;当 $\omega_1 = 2.412 5$ 时发生激变,系统由概周期运动变为稳定的周期 1 运动,随后系统一直处于稳定的周期 1 运动中,直到 $\omega_1 = 1.272 5$ 时再次发生 Hopf 分岔,系统由稳定的周期 1 运动分岔为概周期运动;随着 ω_1 的继续减小,系统最终通过 Hopf 分岔-锁相进入混沌。图 4 进一步展示了这一变化过程。

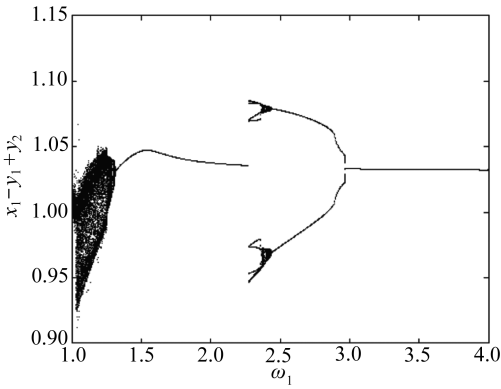
从图 3 还能看出,随着 ξ_1 的增加,系统在 $\omega_1 \in [2.3, 2.65]$ 内的长周期运动和拟周期运动范围在逐渐缩小,由 3 图(d) 可知,最终变成稳定的周期 1 运动。另外,随着 ξ_1 的增加,系统由稳定的周期 1 运动进入稳定的周期 2 运动的分岔点处 ω_1 的取值在逐渐降低,图 3(a) ~ 图 3(c) 的分岔临界点处 ω_1 的取值分为 3.022 5, 3.002 5, 2.967 5。



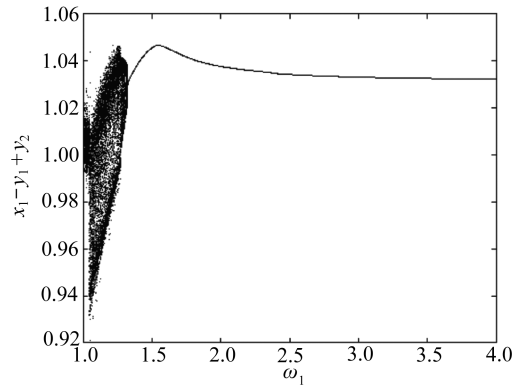
(a) $\xi_1 = 0.040$



(b) $\xi_1 = 0.045$



(c) $\xi_1 = 0.050$

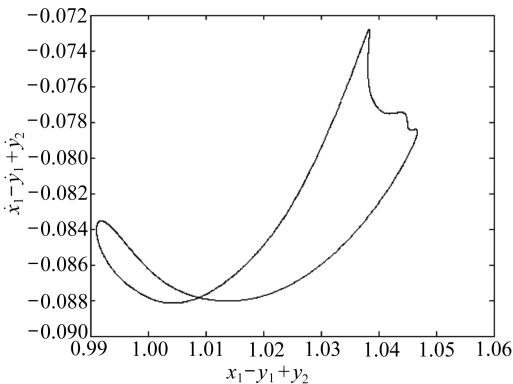


(d) $\xi_1 = 0.055$

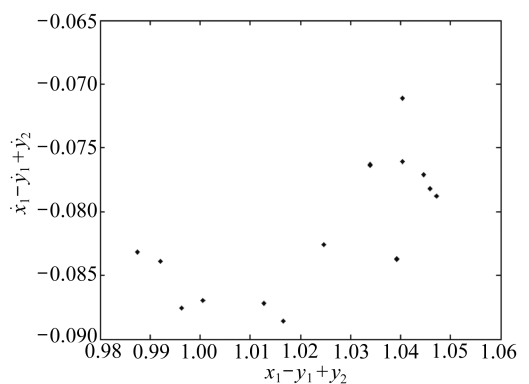
图3 分岔图

Fig. 3 The bifurcation map of the system displacement

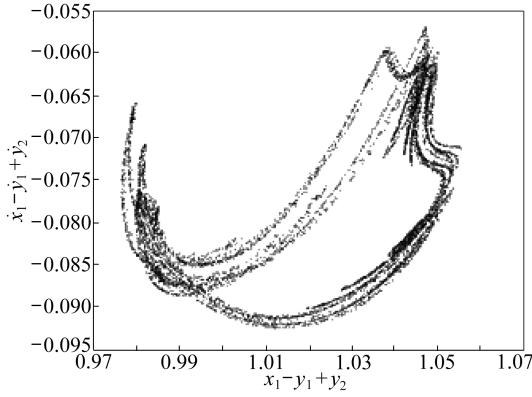
机械系统中的混沌意味着系统运动不再具有可预测性和可控性,它总是从一个运动轨道跳变到另一个轨道上去,对于机械系统来说,这就意味着疲劳寿命的降低和噪音的增加.通过以上分岔图的分析,得到混沌运动及多周期运动的 ω_1 取值范围和临界值,从而有助于人为地避开不可控和不可预测性运动.



(a) $\xi_1 = 0.040, \omega_1 = 1.21$



(b) $\xi_1 = 0.040, \omega_1 = 1.205$



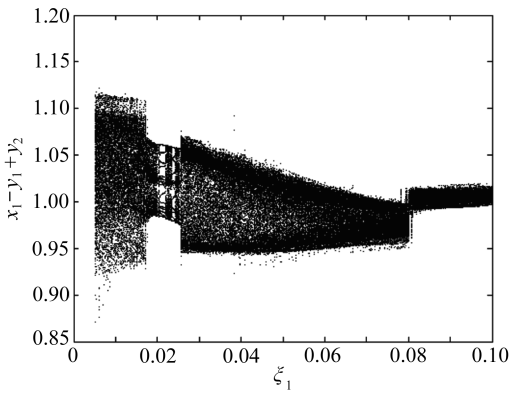
(c) $\xi_1 = 0.040, \omega_1 = 1.2025$

图4 Poincaré 截面图

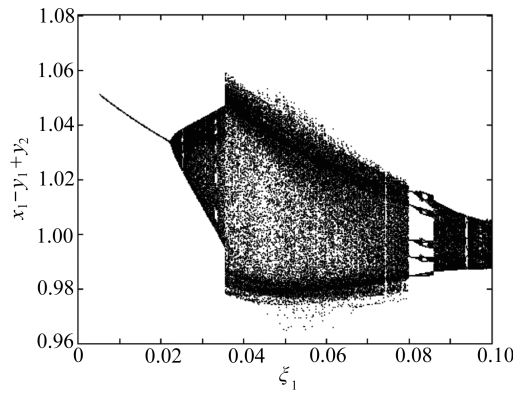
Fig. 4 The Poincaré map of the system motion

2.2 系统随阻尼比 ξ_1 变化的分岔特性

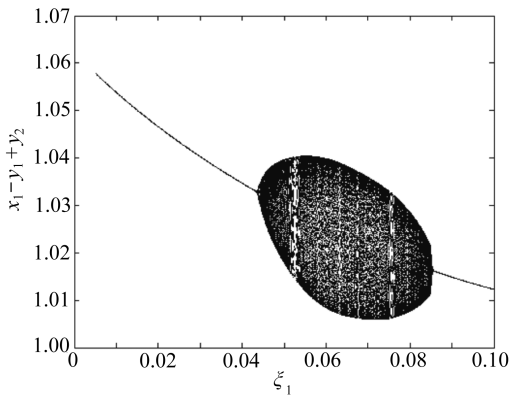
其他参数不变, ω_1 分别取 1.1, 1.2, 1.3 和 1.35 时运动方程的解随相对阻尼比 ξ_1 变化的分岔特性如图 5 所示.



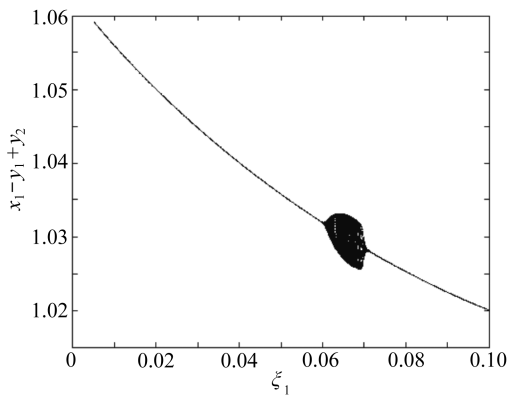
(a) $\omega_1 = 1.1$



(b) $\omega_1 = 1.2$



(c) $\omega_1 = 1.3$



(d) $\omega_1 = 1.35$

图5 分岔图

Fig. 5 The bifurcation map of the system displacement

从图 5(a)可知,当 $\omega_1 = 1.1$ 时,系统主要以混沌运动为主,稳定的周期轨道窗口范围很小;从图 5(b)可知, ω_1 增大变为 1.2 时,系统的混沌运动范围开始变小,系统在 $\xi_1 \in [0.005, 0.0354]$ 的范围内出现拟周期、长周期及稳定的周期 1 运动,在 $\xi_1 = 0.0221$ 处发生倒 Hopf 分岔;从图 5(c)可知,当 ω_1 增大为 1.3 时,系统不再出现混沌运动,主要为稳定的周期 1 运动,其中夹杂拟周期和长周期运动,在 $\xi_1 = 0.0856$ 发生 Hopf 分岔,在 $\xi_1 = 0.0433$ 发生倒 Hopf 分岔;从图 5(d)可知,当 ω_1 增大为 1.35 时,系统的拟周期和长周期运动的逐渐范围缩小,而稳定的周期 1 运动的范围相对变大,并在 $\xi_1 = 0.0711$ 发生 Hopf 分岔,在 $\xi_1 = 0.0598$ 发生倒 Hopf 分岔。

以上分析了系统在 ω_1 取不同值时的分岔特性,当 ω_1 逐渐增大时系统的混沌运动、拟周期运动及长周期运动的范围逐渐变小,最终变为稳定的周期 1 运动。最后,得到了 ξ_1 在混沌运动及多周期运动时的取值范围和临界值,从而有助于人为地避开不可控和不可预测性运动。

3 小 结

1) 多间隙二级齿轮系统在各种非线性因素的综合影响下,表现出丰富复杂的分岔特性,随着参数的变化先后出现了短周期运动、长周期运动、拟周期运动及混沌运动。

2) 在不同阻尼比 ξ_1 下,转速 ω_1 的变化对系统的分岔特性有显著的影响。随着 ω_1 的逐渐减小,系统主要经过稳定的周期 1 运动,倍化分岔变为稳定的周期 2 运动,再经过 Hopf 分岔变为拟周期运动,通过激变又变为稳定的周期 1 运动,最终通过 Hopf 分岔-锁相进入混沌。而随着阻尼比 ξ_1 的增大,系统长周期运动和拟周期运动范围在逐渐缩小,最终变为稳定的周期 1 运动。

3) 转速 ω_1 在不同取值时,阻尼比 ξ_1 的变化对系统的分岔特性也有较大的影响。当 ω_1 逐渐增大时,系统的混沌运动范围逐渐减小,出现稳定的周期 1 运动、长周期和拟周期运动,并且长周期和拟周期运动范围逐渐变小而稳定的周期 1 运动的范围相对变大。

以上结论可为二级齿轮系统的参数选取和非线性动力学行为预测提供有效的参考,对二级齿轮系统的动力设计有一定的指导意义。

参考文献(References):

- [1] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学——振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学技术出版社, 1997. (LI Run-fang, WANG Jian-jun. *Gear System Dynamics—Vibration Impact Noise*[M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese))
- [2] 姚文席, 魏任之. 渐开线直齿轮的啮合冲击研究[J]. 振动与冲击, 1990, 9(4): 25, 57-61. (YAO Wen-xi, WEI Ren-zhi. The study of damping vibration in compound automobile plates[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1990, 9(4): 25, 57-61. (in Chinese))
- [3] 鄂中凯, 蔡春源, 刘鹤然. 轮系振动基本方程[J]. 振动与冲击, 1990, 9(1): 43-44. (E Zhong-kai, CAI Chun-yuan, LIU Hu-ran. Basic equation of gear train vibration[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1990, 9(1): 43-44. (in Chinese))
- [4] 唐增宝, 钟毅芳, 刘伟忠. 多级齿轮传动系统的动态仿真[J]. 机械传动, 1993, 17(1): 37-41. (TANG Zeng-bao, ZHONG Yi-fang, LIU Wei-zhong. Multistage dynamic simulation of gear transmission system[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 1993, 17(1): 37-41. (in Chinese))
- [5] 唐进元, 陈思雨, 钟掘. 一种改进的齿轮非线性动力学模型[J]. 工程力学, 2008, 25(1): 217-223. (TANG Jin-yuan, CHEN Si-yu, ZHONG Jue. A improved nonlinear model for a spur gear

- pair system[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(1): 217-223.(in Chinese))
- [6] 圣国梁. 基于 MATLAB 的齿轮间隙非线性动力学仿真研究[J]. 电子机械工程, 2008, **24**(5): 58-60.(SHENG Guo-liang. Simulated study on the gear gap non-linear dynamics based on MATLAB[J]. *Electro-Mechanical Engineering*, 2008, **24**(5): 58-60.(in Chinese))
- [7] 罗冠炜, 谢建华. 一类冲击振动系统在强共振条件下的亚谐分叉与 Hopf 分叉[J]. 爆炸与冲击, 2003, **23**(1): 67-73.(LUO Guan-wei, XIE Jian-hua. Subharmonic and Hopf bifurcation of a vibra-impact system in a strong resonance case[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2003, **23**(1): 67-73.(in Chinese))
- [8] 盛冬平, 朱如鹏, 陆凤霞, 靳广虎. 多间隙弯扭耦合齿轮非线性振动的分岔特性研究[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(19): 116-122.(SHENG Dong-ping, ZHU Ru-peng, LU Feng-xia, JIN Guang-hu. Bifurcation characteristics of bending-torsional coupled gear nonlinear vibration with multi-clearance[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(19): 116-122.(in Chinese))
- [9] 孙智民, 沈允文, 王三民, 李华. 星形齿轮传动系统分岔与混沌的研究[J]. 机械工程学报, 2001, **37**(12): 11-15.(SUN Zhi-ming, SHEN Yun-wen, WANG San-ming, LI Hua. Bifurcations and chaos of star gear system[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2001, **37**(12): 11-15.(in Chinese))
- [10] 王三民, 沈允文, 董海军. 含摩擦和间隙直齿轮副的混沌与分叉研究[J]. 机械工程学报, 2002, **38**(9): 8-11.(WANG San-min, SHEN Yun-wen, DONG Hai-jun. Chaos and bifurcation analysis of a spur gear pair with combine friction and clearance[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2002, **38**(9): 8-11.(in Chinese))
- [11] 罗红, 梁波, 吴志华, 史石荣. 半车车辆-道路耦合动力分析模型的研究与应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(7): 737-749.(LUO Hong, LIANG Bo, WU Zhi-hua, SHI Shi-rong. Study and application of a 4-DOF 1/2 vehicle-road coupling dynamic model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 737-749.(in Chinese))
- [12] 李倩, 刘俊卿, 陈诚诚. 随机激励下四自由度车辆-道路耦合系统动力分析[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 460-473.(LI Qian, LIU Jun-qing, CHEN Cheng-cheng. Dynamic analysis of the 4-DOF vehicle-road coupling system under random excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 460-473.(in Chinese))
- [13] 李军, 陈予恕. 低压-发电机转子系统弯扭耦合情况下的组合共振研究[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(8): 895-911.(LI Jun, CHEN Yu-shu. Study on combined resonance of low pressure cylinder-generator rotor system with bending-torsion coupling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(8): 895-911.(in Chinese))
- [14] Lin J, Parker R G. Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, **124**: 68-76.
- [15] 杨富春, 周晓军, 胡宏伟. 两级齿轮减速器非线性振动特性研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2009, **43**(7): 1243-1248.(YANG Fu-chun, ZHOU Xiao-jun, HU Hong-wei. Nonlinear vibration characteristics of two-stage gear reducer[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2009, **43**(7): 1243-1248.(in Chinese))
- [16] 陈思雨, 唐进元. 间隙对含摩擦和时变刚度的齿轮系统动力学响应的影响[J]. 机械工程学报, 2009, **45**(8): 119-124.(CHEN Si-yu, TANG Jin-yuan. Effect of backlash on dynamics of spur gear pair system with friction and time-varying stiffness[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, **45**(8): 119-124.(in Chinese))

Nonlinear Vibration Bifurcation Characteristics of Multi-Clearance 2-Stage Gear Systems

WANG Shu-guo¹, ZHANG Yan-bo¹, LIU Wen-liang²,
GUO Li-feng¹, LIAO Peng-tai¹, QI Li-mei¹

(1. *College of Information Engineering, Tarim University,
Aral, Xinjiang 843300, P.R.China;*

2. *College of Mechanical and Electronic Engineering,
Tarim University, Aral, Xinjiang 843300, P.R.China)*

Abstract: A 5-DOF nonlinear vibration model for multi-clearance 2-stage gear systems was established with the lumped-mass method. In view of transmission errors, time-varying meshing stiffness and multiple gear clearances, the dimensionless dynamic equations for the system were derived. By means of the Poincaré maps and bifurcation diagrams, the bifurcation properties of the system were discussed under the effects of the rotation rate and the damping ratio. Given the various nonlinear factors, the 2-stage gear system exhibits rich and complex bifurcation characteristics. With the changes of the related parameters, the system will be in short-period motion, or long-period motion, or quasi-periodic motion or chaotic motion. For different damping ratios, with the decrease of the rotation rate, the system state changes from stable period-1 motion into stable period-2 motion through period-doubling bifurcation; then the system state changes into quasi-periodic motion through the Hopf bifurcation, in turn changes into stable period-1 motion after a catastrophe; finally the system enters into chaos through the Hopf bifurcation-phase locking. Moreover, with the increase of the rotation rate, the system damping ratio range corresponding to chaotic motions reduces, and the system will be in stable period-1 motion, or long-period motion or quasi-periodic motion, while the damping ratio range corresponding to long-period motion and quasi-periodic motion shortens and that corresponding to period-1 motion lengthens.

Key words: nonlinear vibration; Hopf bifurcation; multi-clearance; gear

引用本文/Cite this paper:

王树国, 张艳波, 刘文亮, 郭丽峰, 廖鹏泰, 齐立美. 多间隙二级齿轮非线性振动分岔特性研究[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(2): 173-183.

WANG Shu-guo, ZHANG Yan-bo, LIU Wen-liang, GUO Li-feng, LIAO Peng-tai, QI Li-mei. Nonlinear vibration bifurcation characteristics of multi-clearance 2-stage gear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(2): 173-183.