应用数学和力学, 第 28 卷 第 12 期
2007 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 12, Dec. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 12-1441-07

基于向量 Liapunov 函数不连续系统的稳定性研究*

慕小武, 程桂芳, 悲帅

(郑州大学 数学系, 郑州 450052)

(郭兴明推荐)

摘要: 基于局部 Lipschitz 连续且正则(Clarke 意义下) 的向量 Liapunov 函数, 讨论不连续自治系统的稳定性(Filippov 解意义下)• 通过定义一类新的向量 Liapunov 函数的"集值导数", 给出了关于不连续系统的广义比较原理• 基于 Lipschitz 连续且正则的向量 Liapunov 函数, 进一步的给出不连续自治系统的 Liapunov 稳定性定理•

关 键 词: Filippov 解; 比较原理; 稳定性; 向量 Liapunov 函数; 不连续系统
中图分类号: O231.2 文献标识码: A

引 言

近年来不连续系统受到广泛关注与重视, 因此关于右端不连续的系统有许多进展• 它来源于力学、自动控制与电子工程的许多问题的数学模型表现为右端不连续的微分方程, 例如变结构控制系统、含有摩擦力的动力系统等[1]• 1994 年, D. Shevitz 和 B. Paden 在文献[2] 中研究了非光滑系统在 Filippov 解意义下的 Liapunov 稳定性及相应的 Lasalle 不变原理• 1997 年 E. P. Ryan 讨论了微分集值映射所定义的系统的 Byrnes-Martin 型积分不变原理[3]• 1999 年, A Bacciottic 和 F Ceragioli 在文献[4] 中通过定义 一类新的"集值导数", 在更一般的微分包含框架下, 实质推广了文献[2-3] 中的结果•

另一方面, 为了更好的研究非线性动力系统, 许多研究用向量 Liapunov 函数取代标量 Liapunov 函数[5-8]• 向量 Liapunov 函数提供了更广泛的框架, 并且放宽了分析稳定性时所应用的标量 Liapunov 函数的假设条件• 2006 年, S. G. Nersesov 和 W. M. Haddad[5] 通过构造广义比较系统, 推广了向量 Liapunov 函数的相关结果, 并且基于经典的 Krasovskii-Lasalle 不变原理给出了广义收敛结果• 更进一步的, 文献[5] 证明了非线性动力系统的渐近镇定与控制向量 Liapunov 函数存在性的等价性•

众所周知, 比较原理在经典的 Liapunov 稳定性理论中起着十分重要的作用, 然而关于不连续系统的比较原理的结果却很少• 本文基于向量 Liapunov 函数, 给出了关于不连续自治系统的比较原理, 并基于向量 Liapunov 函数, 实质性推广了不连续自治系统的相关稳定性结果•

---

* 收稿日期: 2006-07-04; 修订日期: 2007-10-12
作者简介: 慕小武(1963—), 男, 河南温县人, 教授(联系人. Tel: +86-371-67762897; Fax: +86-371-67766220; E-mail: muxiaowu@zzu.edu.cn).

这里介绍本文所必需的数学记号和定义[5]• 对于 $\boldsymbol{v} \in R^q$, $\boldsymbol{v} \geqslant\geqslant \boldsymbol{0}$($\boldsymbol{v} \gg \boldsymbol{0}$) 表示向量 $\boldsymbol{v}$ 的任意分量都是非负的(正的), 此时称向量 $\boldsymbol{v}$ 为非负的(正的)向量• $\boldsymbol{v} \in R^q_+$ 与 $\boldsymbol{v} \in R^q_+$ 分别等价于 $\boldsymbol{v} \geqslant\geqslant \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{v} \gg \boldsymbol{0}$• 令 $\mathscr{B}_\varepsilon(\alpha)$ ($\alpha \in R^n$, $\varepsilon > 0$) 为以 α 为中心, ε 为半径的开球邻域•

本文结构如下: 第 1 节给出问题的陈述及其相关数学基础知识, 第 2 节是主要结论, 证明了关于不连续自治系统的广义比较原理• 最后基于向量 Liapunov 函数, 给出不连续自治系统的相关稳定性结果•

1 问题的陈述与数学基础

首先回顾关于右端不连续的微分方程的 Filippov 解, 非光滑系统的 Clarke 广义梯度以及关于可微正则函数沿着解轨线的链法则• 另外, 回顾 $\mathscr{W}$ 类逆单调递增函数的概念•

考虑向量微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ t \in I_{\boldsymbol{x}_0}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D} \subseteq R^n$($\mathscr{D}$为包含原点的开邻域) 为状态向量, $t \in \mathbf{R}$ 是时间变量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = [f_1(\boldsymbol{x}(t)), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}(t))]^{\mathrm{T}}$ 是 Lebegue 可测的局部有界函数•

定义 1.1[2] 区间 $I_{\boldsymbol{x}_0}$ 上的绝对连续函数 $\boldsymbol{x}(t)$, 称为是系统(1) 的 Filippov 解, 如果对于几乎处处的 $t \in I_{\boldsymbol{x}_0}$

$$\dot{\boldsymbol{x}} \in K[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

其中

$$K[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}) \equiv \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu \mathscr{N} = 0} \overline{\mathrm{co}} \boldsymbol{f}(B_\delta(\boldsymbol{x}) - \mathscr{N})• \tag{3}$$

注 当 Filippov 解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对几乎处处的 $t \in I_{\boldsymbol{x}_0}$ 满足 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 时, 称 Filippov 解为 Caratheodory 解• 一般情况下, Filippov 解不是 Caratheodory 解[9]•

对于式(2), 以任意 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 为初值的解在区间 $I_{\boldsymbol{x}_0}$ 都是存在的[4], 然而一般情况下解都是不唯一的•

假定 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为微分包含式(2) 的平衡点, 且用 $\boldsymbol{x}(t)$ 来表示以 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 为初值的微分包含式(2) 的解•

定义 1.2[10] (Clarke's generalized gradient) 对于局部 Lipschitz 连续的函数 $V: R^n \to \mathbf{R}$, 在 $\boldsymbol{x}$ 处的广义梯度定义为

$$\partial V(\boldsymbol{x}) = \overline{\mathrm{co}}\left\{ \lim_{i \to +\infty} \nabla V(\boldsymbol{x}_i) \mid \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_i \bar{\in} \Omega_V \right\}, \tag{4}$$

其中 Ω_V 为包含所有 V 不可导的点的零测集, 梯度 ∇ 为相对于时间的导数($\partial/\partial t$)•

定义 1.3[10] 函数 $g: R^n \to \mathbf{R}$ 关于方向为 $\boldsymbol{u} \in R^n$ 的广义方向导数定义为

$$g^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \lim_{t \to 0^+} \sup_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} \frac{g(\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{y})}{t}• \tag{5}$$

定义 1.4[10] $g: R^n \to \mathbf{R}$ 称为正则函数(Clarke 意义下), 如果满足

(i) 对于 $\forall \boldsymbol{u} \in R^n$, 单侧方向导数 $g'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 存在;

(ii) 对于 $\forall \boldsymbol{u} \in R^n$, $g'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = g^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$•

引理 1.1[2,10] (Chain rule) 令 $\boldsymbol{x}(t)$ 为系统(1) 在包含 t 的区间 $I_{\boldsymbol{x}_0}$ 上的 Filippov 解, $V: R^n \to \mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 连续的正则函数• 则 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 是绝对连续的, $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}(t)) \overset{\text{a.e.}}{\in} \dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{6}$$

其中

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) := \bigcap_{\xi \in \partial V(\boldsymbol{x}(t))} \xi^{\mathrm{T}} K[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}(t)) \cdot \tag{7}$$

定义 1.5[5] $\boldsymbol{w} = [w_1, \cdots, w_q]^{\mathrm{T}}: R^q \times \mathscr{V} \to R^q$ (其中 $\mathscr{V} \subseteq R^s$) 称为 $\mathscr{W}$ 类函数, 如果对于任意固定的 $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$, 对于所有满足 $z_j' \leqslant z_j''$, $z_i' = z_i''$, $j = 1, \cdots, q$, $j \neq i$) 的 $\boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'' \in R^q$, 成立 $w_i(\boldsymbol{z}', \boldsymbol{y}) \leqslant w_i(\boldsymbol{z}'', \boldsymbol{y})$ ($i = 1, \cdots, q$) 其中 z_i 表示 $\boldsymbol{z}$ 的第 i 个分量.

定义 1.6[5] $\boldsymbol{w} = [w_1, \cdots, w_q]^{\mathrm{T}}: R^q \times \mathscr{V} \to R^q$ (其中 $\mathscr{V} \subseteq R^s$), 称为 $\mathscr{W}_d$ 类函数, 如果对于任意固定的 $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$, 对于所有满足 $\boldsymbol{z}' \leqslant\leqslant \boldsymbol{z}''$ 的 $\boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'' \in R^q$, 成立 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}', \boldsymbol{y}) \leqslant\leqslant \boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}'', \boldsymbol{y})$.

2 非光滑系统的比较原理

这一部分我们推广链法则, 并且给出关于不连续系统的广义比较原理.

定义 2.1 向量函数 $\boldsymbol{V} = [v_1, \cdots, v_q]^{\mathrm{T}}$ 称为局部 Lipschitz 连续的(在点 $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 处), 如果存在两个常数 $\delta > 0$ 及 $L > 0$ 使得

$$\| \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_2) \| \leqslant L \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|, \qquad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{B}_\delta(\boldsymbol{x}_0) \cdot \tag{8}$$

命题 2.1 令 $\boldsymbol{x}(t)$ 为系统(1) 在包含 t 的区间 $I_{\boldsymbol{x}_0}$ 上的 Filippov 解. v_i ($i = 1, \cdots, q$) 均为具有同一 Lipschitz 常数为 $L/\sqrt{q}$ 的局部 Lipschitz 连续的正则函数. 构造向量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = [v_1, \cdots, v_q]^{\mathrm{T}}$.

则 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 是 Lipschitz 常数为 L 的局部 Lipschitz 连续函数, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))$ 是绝对连续的, $\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) \overset{\text{a.e.}}{\in} \dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{9}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{V}} := \dot{v}_1 \times \dot{v}_2 \times \cdots \times \dot{v}_q, \tag{10}$$

且

$$\dot{v}_i := \bigcap_{\xi \in \partial v_i(\boldsymbol{x})} \xi^{\mathrm{T}} K[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}) \cdot \tag{11}$$

证明 由 v_i ($i = 1, \cdots, q$) 的局部 Lipschitz 连续性可得, 对于 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{B}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$,

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_2) \| &= \sqrt{(v_1(\boldsymbol{x}_1) - v_1(\boldsymbol{x}_2))^2 + \cdots + (v_q(\boldsymbol{x}_1) - v_q(\boldsymbol{x}_2))^2} \leqslant \\ &\sqrt{\frac{L^2}{q} \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|^2 + \cdots + \frac{L^2}{q} \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|^2} = \\ &L \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|, \end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 是 Lipschitz 常数为 L 的局部 Lipschitz 连续函数, 从而 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))$ 是绝对连续的, $\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在. 注意到 v_i ($i = 1, \cdots, q$) 均为正则函数, 由引理 1.1, 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_1(\boldsymbol{x}(t)) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_q(\boldsymbol{x}(t)) \end{pmatrix} \overset{\text{a.e}}{\in} \dot{v}_1 \times \dot{v}_2 \times \cdots \times \dot{v}_q = \dot{\boldsymbol{V}},$$

其中

$$\dot{v}_i := \bigcap_{\xi \in \partial v_i(\boldsymbol{x})} \xi^{\mathrm{T}} K[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}) \cdot$$

下面,当向量函数不满足连续可微条件时来推广比较原理• 考虑如下非线性比较系统:

$$\dot{z}(t)=w(z(t),y(t)),\qquad z(t_0)=z_0,\ t\in I_{z_0},\tag{12}$$

这里 $z(t)\in\mathcal{Q}\subseteq R^q(t\in I_{z_0})$ 为比较系统的状态向量, $y:\mathcal{T}\to\mathcal{V}\subseteq R^s$ 是一个给定的连续函数,系统(12)的解 $z(t)$ 的最大存在区间是 $I_{z_0}\subseteq\mathcal{T}\subseteq\mathbf{R}_+$, $\mathcal{Q}$是包含原点的开集,且 $w:\mathcal{Q}\times\mathcal{V}\to R^q$• 假定 $w(\cdot,y(t))$ 是关于 t 连续且以L' 为 Lipschitz 常数的局部 Lipschitz 连续的,即

$$\|w(z',y(t))-w(z'',y(t))\|\leqslant L'\|z'-z''\|,\qquad\forall z',z''\in\mathcal{B}_\delta(z_0),\tag{13}$$

因此存在 $\tau>0$ 使得式(12)在区间$[t_0,t_0+\tau]$ 上存在唯一的解•

定理 2.1　考虑非线性系统(12)• 假定 $w:\mathcal{Q}\times\mathcal{V}\to R^q$ 连续且$w(\cdot,y)$ 是 $\mathcal{W}$类函数• 若存在局部Lipschitz 连续的正则函数$v_i(i=1,\cdots,q)$• 构造向量函数 $V=[v_1,\cdots,v_q]^{\mathrm{T}}:I_{z_0}\to\mathcal{Q}$,使得

$$\dot{V}(t)\ll w(V(t),y(t)),\qquad t\in I_{z_0},\tag{14}$$

则 $V(t_0)\ll z_0$, $z_0\in\mathcal{Q}$意味着

$$V(t)\ll z(t),\qquad t\in I_{z_0},\tag{15}$$

其中 $z(t)\ (t\in I_{z_0})$ 为系统(12)的解•

证明　$v_i(i=1,\cdots,q)$ 均为局部 Lipschitz 连续的正则函数,则由命题 2.1 知向量函数 $V(t)$ 亦为局部Lipschitz 连续的• 从而对于充分小的 $\tau>0$,成立

$$V(t)\ll z(t),\qquad t\in[t_0,t_0+\tau]•\tag{16}$$

现在假定不等式(15)在区间 I_{z_0} 上不成立• 则存在 $\hat{t}\in I_{z_0}$ 使得 $V(t)\ll z(t)$, $t\in[t_0,\hat{t})$,以及至少存在一个 $i\in\{1,\cdots,q\}$,

$$v_i(\hat{t})=z_i(\hat{t}),\tag{17}$$

$$v_j(\hat{t})\leqslant z_j(\hat{t}),\qquad j\neq i,j=1,\cdots,q•\tag{18}$$

因为 $w(\cdot,y)$ 是 $\mathcal{W}$类函数,则由式(14)、(17)及(18)得到

$$\dot{v}_i(\hat{t})<w_i(V(\hat{t}),y(\hat{t}))\leqslant w_i(z(\hat{t}),y(\hat{t}))=\dot{z}_i(\hat{t})•\tag{19}$$

另一方面,$v_i(i=1,\cdots,q)$ 均为局部Lipschitz 连续的正则函数,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_i\overset{\text{a. e.}}{\in}\dot{v}_i\quad\text{即}\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_i(\hat{t})<\dot{z}_i(\hat{t})•$$

结合式(17),对于充分小的 $\tau>0$,成立 $v_i(t)>z_i(t)$, $t\in[\hat{t}-\tau,\hat{t})$• 与式(16)矛盾•　□

由上面定理直接可以得到定理 2.2:

定理 2.2　考虑系统(12)• 假定 $w:\mathcal{Q}\times\mathcal{V}\to R^q$ 是连续的且$w(\cdot,y)$ 是 $\mathcal{W}$类函数• 令 $z(t)(t\in I_{z_0})$ 为式(12)的解且$[t_0,t_0+\tau]\subseteq I_{z_0}$• 若存在局部 Lipschitz 连续的正则函数 $v_i(i=1,\cdots,q)$• 构造向量函数 $V=[v_1,\cdots,v_q]^{\mathrm{T}}:[t_0,t_0+\tau]\to\mathcal{Q}$,使得

$$\dot{V}(t)\leqslant\leqslant w(V(t),y(t)),\qquad t\in[t_0,t_0+\tau],\tag{20}$$

则已知 $V(t_0)\leqslant\leqslant z_0$, $z_0\in\mathcal{Q}$,可得到

$$V(t)\leqslant\leqslant z(t),\qquad t\in[t_0,t_0+\tau]•\tag{21}$$

定理 2.3　考察非线性系统(1)• 假定存在局部 Lipschitz 连续的正则函数 $v_i(i=1,\cdots,q)$• 构造向量函数 $V=[v_1,\cdots,v_q]^{\mathrm{T}}:\mathcal{D}\to\mathcal{Q}\subseteq R^q$,使得

$$\dot{V}(x)\leqslant\leqslant w(V(x),x),\qquad x\in\mathcal{D},\tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{w}:\mathscr{Q}\times\mathscr{D}\to R^q$ 连续且 $\boldsymbol{w}(\cdot,\boldsymbol{x})$ 是 $\mathscr{W}$ 类函数. 另外假定

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}(t),\boldsymbol{x}(t)),\qquad \boldsymbol{z}(t_0)=\boldsymbol{z}_0,\ t\in I_{\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0}\tag{23}$$

有唯一的解 $\boldsymbol{z}(t),(t\in I_{\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0})$, 其中 $\boldsymbol{x}(t)(t\in I_{\boldsymbol{x}_0})$ 是系统(1)的任意 Filippov 解. 若 $[t_0,t_0+\tau]\subseteq I_{\boldsymbol{x}_0}\cap I_{\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0}$.

则由 $\boldsymbol{V}(t_0)\leqslant\leqslant\boldsymbol{z}_0,\ \boldsymbol{z}_0\in\mathscr{Q}$, 可得到

$$\boldsymbol{V}(t)\leqslant\leqslant\boldsymbol{z}(t),\qquad t\in[t_0,t_0+\tau].\tag{24}$$

证明　注意到 $v_i(i=1,\cdots,q)$ 均为局部 Lipschitz 连续和正则的, 则由命题 2.1 可知, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))$ 绝对连续, $\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\overset{\text{a.e.}}{\in}\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t)).$$

结合式(22), 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\leqslant\boldsymbol{w}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)),\boldsymbol{x}),\qquad \text{a.e. } t\in[t_0,t_0+\tau].\tag{25}$$

令 $\xi(t):=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)),\ t\in I_{\boldsymbol{x}_0}$, 则式(22)意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t)\leqslant\leqslant\boldsymbol{w}(\xi(t),\boldsymbol{x}),\qquad \text{a.e. } t\in I_{\boldsymbol{x}_0}.\tag{26}$$

更进一步地, 若 $[t_0,t_0+\tau]\subseteq I_{\boldsymbol{x}_0}\cap I_{\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0}$ 是紧区间, 则由定理2.2, 以及 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_0)=\xi(t_0)\leqslant\leqslant\boldsymbol{z}_0$, 成立

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\leqslant\boldsymbol{z}(t),\qquad \text{a.e. } t\in[t_0,t_0+\tau].$$

3　基于向量 Liapunov 函数的稳定性定理

基于第 2 节给出的广义比较原理, 下面讨论非线性不连续系统的稳定性. 考虑如下非线性系统:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}(t),\boldsymbol{x}(t)), & \boldsymbol{z}(t_0)=\boldsymbol{z}_0,\ t\geqslant t_0,\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), & \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}\tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{z}_0\in\mathscr{Q}\subseteq R^q,\ \boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}\subseteq R^n,\ [\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}(t\geqslant t_0)$ 是系统(27)的解, $\boldsymbol{w}:\mathscr{Q}\times\mathscr{D}\to R^q$ 连续且 $\boldsymbol{w}(\cdot,\boldsymbol{x})$ 是 $\mathscr{W}$ 类函数, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}:\mathscr{D}\to R^n$ 为 Lebegue 可测的有界函数, 满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

首先, 给出有关稳定性的定义.

定义 3.1

1) 非线性系统 Σ 对 $\boldsymbol{z}$ Liapunov 稳定, 若对任意 $\varepsilon>0$ 与 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,\boldsymbol{x}_0)>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{z}_0\|<\delta$, 成立 $\|\boldsymbol{z}(t)\|<\varepsilon,\ \forall t\geqslant t_0$.

2) 非线性系统 Σ 对 $\boldsymbol{z}$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致 Liapunov 稳定, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{z}_0\|<\delta$, 成立 $\|\boldsymbol{z}(t)\|<\varepsilon,\ \forall t\geqslant t_0$ 及 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$.

3) 非线性系统 Σ 对 $\boldsymbol{z}$ 渐近稳定, 若(i) Σ 对 $\boldsymbol{z}$ Liapunov 稳定; (ii) 对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$, 存在 $\delta=\delta(\boldsymbol{x}_0)>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{z}_0\|<\delta$, 成立 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{0}$.

4) 非线性系统 Σ 对 $\boldsymbol{z}$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致渐近稳定, 若(i) Σ 对 $\boldsymbol{z}$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致 Liapunov 稳定; (ii) 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{z}_0\|<\delta$, 成立 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{z}(t)=0,\ \forall\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$.

5) 非线性系统 Σ 对 $\boldsymbol{z}$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致指数稳定, 若存在正常数 a、b 与 δ, 使得当 $\|\boldsymbol{z}_0\|<\delta$, 成立 $\|\boldsymbol{z}(t)\|\leqslant a\|\boldsymbol{z}_0\|\mathrm{e}^{-b(t-t_0)},\ t\geqslant t_0,\ \forall\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$.

6) 非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致全局渐近(指数)稳定, 若前面叙述的定义对 $\forall \boldsymbol{z}_0 \in \mathbf{R}^q$ 及 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 均成立•

类似于文献[2, 5], 我们基于非光滑向量 Liapunov 函数, 建立下述稳定性定理:

定理 3.1 考察系统(1)• 假定存在局部 Lipschitz 连续的正则函数 $v_i(i = 1, \cdots, q)$• 构造向量函数 $\boldsymbol{V} = [v_1, \cdots, v_q]^{\mathrm{T}}: \mathscr{D} \to \mathscr{Q} \cap R_+^q$ 及正向量 $\boldsymbol{p} \in R^q$, 使得 $\boldsymbol{V}(0) = \mathbf{0}$, 标量函数 $v: \mathscr{D} \to \mathbf{R}_+$ 定义为 $v(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}$, 使得 $v(\boldsymbol{x}) > 0$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 且

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}) \leqslant\leqslant \boldsymbol{w}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{w}: \mathscr{Q} \times \mathscr{D} \to R^q$ 是满足 $\boldsymbol{w}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 的连续函数, 且 $\boldsymbol{w}(\cdot, \boldsymbol{x})$ 是 $\mathscr{W}$ 类函数• 则下列陈述成立:

1) 若非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致 Liapunov 稳定, 则系统(1) 的零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是 Liapunov 稳定的•

2) 若非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致渐近稳定, 则系统(1) 的零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是渐近稳定的•

3) 若 $\mathscr{D} = R^n$, $\mathscr{Q} = R^q$, $v: R^n \to \mathbf{R}_+$ 是径向无界的, 且非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致全局渐近稳定, 则系统(1) 的零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的•

4) 若存在常数 $\gamma \geqslant 1$, $a > 0$ 和 $b > 0$ 使得 $v: \mathscr{D} \to \mathbf{R}_+$,

$$a \|\boldsymbol{x}\|^{\gamma} \leqslant v(\boldsymbol{x}) \leqslant b \|\boldsymbol{x}\|^{\gamma}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \tag{29}$$

非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致指数稳定, 则系统(1) 的零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是指数稳定的•

5) 如果 $\mathscr{D} = R^n$, $\mathscr{Q} = R^q$, 若存在常数 $\gamma \geqslant 1$, $a > 0$ 和 $b > 0$ 使得 $v: R^n \to \mathbf{R}_+$ 满足式(29), 且若非线性系统 Σ 对 z 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 一致全局指数稳定, 则系统(1) 的零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是全局指数稳定的•

[参考文献]

[1] Filippov A F. Differential equations with discontinuous right-hand side[J]. Amer Math Soc Translations, 1964, **42**(2): 199-231.

[2] Shevitz Daniel, Paden Brad. Liapunov stability theory of nonsmooth systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, **39**(9): 1910-1914.

[3] Ryan E P. An integral invariance principle for differential inclusions with application in adaptive control[J]. SIAM J Control and Optimization, 1997, **36**(3): 960-980.

[4] Bacciotti A, Ceragioli F. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Liapunov function[J]. Esaim Cocv, 1999, **4**(2): 361-376.

[5] Nersesov S G, Haddad W M. On the stability and control of nonlinear dynamical systems via vector Liapunov functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, **51**(2): 203-215.

[6] Matrosov V M. Method of vector Liapunov functions of interconnected systems with distributed parameters (survey)[J]. Avtomatikai Telemekhanika, 1977, **33**(1): 63-75.

[7] Lakshnikantham V, Matrosov V M, Sivasundaram S. Vector Liapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems[M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

[8] Drici Z. New directions in the method of vector Liapunov functions[J]. J Math Anal Appl, 1994, **184**(2): 317-325.

[9] Kim S J, Ha I J. Existence of caratheodory solutions in nonlinear systems with discontinuous switching feedback controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, **49**(7): 1167-1171.

[10] Clarke F H, Ledyaev Yu S, Stern R J, et al. Nonsmooth Analysis and Control Theory [M]. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1998.

[11] Bhaskar T Gnana, Devi J Vasundhara. Set differential systems and vector Liapunov functions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, **165**(3): 539-548.

[12] Andreyev A S, Peregudova O A. The comparison method in asymptotic stability problems[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2006, **70**(6): 865-875.

[13] 贺建勋. 关于不连续系统稳定性的比较原理[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1982, **13**(2): 117-126.

On the Stability of Discontinuous Systems via Vector Liapunov Functions

MU Xiao-wu, CHENG Gui-fang, DING Zhi-shuai

(Department of Mathematics, Zhengzhou University,
Zhengzhou 450052, P. R. China)

Abstract: The stability of systems with discontinuous right-hand side (with solutions in Filippov's sense) via locally Lipschitz continuous and regular vector Liapunov functions are discussed. A new type of "set-valued derivative" of vector Liapunov functions was introduced, some generalized comparison principles on discontinuous systems were shown. Furthermore Liapunov stability theory was developed for a class of discontinuous systems based on locally Lipschitz continuous and regular vector Liapunov functions.

Key words: Filippov solutions; comparison principles; stability; vector Liapunov functions; discontinuous systems