应用数学和力学,第 28 卷 第 12 期
2007 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 12, Dec. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 12-1468-07

关于双曲衰减的违约相关模型及 CDS 定价*

白云芬[1,2], 胡新华[3,4], 叶中行[1]

(1. 上海交通大学 数学系, 上海 200240;
2. 石家庄学院 数学系, 石家庄 050035;
3. 北京大学 光华管理学院, 北京 100032;
4. 中国工商银行 博士后科研工作站 北京 100036)

摘要: 引进一个双曲类型的衰减函数来表示一方违约对另一方违约强度的影响. 若交易双方为竞争对手(合作公司), 当一方的违约时, 另一方的违约强度将减小(增大). 随着时间的推移, 这种影响将逐渐减小, 直至为零. 在这个模型下, 通过测度变换, 可以得到两公司违约时间的联合分布及各自的边际分布, 从而可以对违约互换进行定价.

关 键 词: 违约相关; 双曲衰减函数; 测度变换; 信用违约互换

中图分类号: O211.9; F830 文献标识码: A

引 言

近几年来, 信用衍生产品市场的迅速发展使得包括信用违约互换(CDS) 在内的信用违约产品的公平定价问题成为一个热点. Jarrow 和 Yu(2001)[1] 指出: 对信用衍生产品定价时不考虑交易对手违约风险是不全面的. 而参照资产和衍生产品的发行公司都具有不同程度的违约风险, 而且它们之间可能存在违约相关性. 在约化模型下研究信用风险相关性的方法很多: 第 1 种方法是 Copula 函数法, Copula 函数用辅助的连接量, 把单变量的边际分布和多变量的联合分布联系起来. Li(2000)[2] 第 1 个将 Gauss Copula 函数引入篮子违约衍生品中描述违约相关性. 这种方法的扩展还有 Schonbucher 和 Schubert (2001)[3], Laurent 和 Gregory 等人(2005)[4] 的研究. 第 2 种方法是在公司的违约强度中引入相关性, 其违约相关性体现在违约强度依赖一组共同的变量 X_t 和公司特有的因素. 此方法又被称为条件独立违约模型(conditionally independent defaults), 这是因为在状态变量 X_t 已知的条件下, 公司的违约强度是独立的, 从而与此相关的违约事件也是独立的, 如 Duffie 和 Singleton(1999)[5] 及 Lando(1994)[6]. 第 3 种方法是基于 Jarrow 和 Yu(2001)[1], Davis 和 Lo (2001)[7] 的违约传染模型. 其基本思想是, 当一个公司违约时, 与之相关的公司违约强度将发生跳跃. 在这种模型下, 违约的相关性来自于公司的直接

---

* 收稿日期: 2007-01-30; 修订日期: 2007-11-09
基金项目: 国家重点基础研究发展计划 973 资助项目(2007CB814903); 国家自然科学基金资助项目(70671069)
作者简介: 白云芬(1973—), 女, 石家庄人, 博士生(联系人. Tel: + 86-21-34200619; E-mail: baiyun200588@126.com).

联系(如竞争对手或生产商与供货商)，一个公司的违约将增加与之相关的公司的违约概率，甚至会使得某些公司破产• Leung 和 Kwok (2005)[8]运用 Collin-Dufresne 等人(2004)[9]提出的测度变换的方法，解决了 Jarrow 和 Yu(2001)[1]模型中有交易对手违约的信用违约互换定价问题• 但是他们在模型中假设一方的违约使得另一方的违约强度有一个常数的跳跃，这显然与事实不符• 本文引进一个双曲类型的衰减函数来表示一方的违约对另一方违约强度的影响逐渐衰弱的过程，违约的影响随着时间的推移而逐渐变小，直至为零• 也就是说经过一段时间后，另一方的违约强度将只依赖自身，而违约方对其影响将微乎其微，这更符合现实•

本文以下内容是这样的：第 1 节引进一个双曲类型的衰减函数来描述双方违约的相关性，并着重分析了交易双方为竞争对手时一方违约对另一方违约强度的影响• 在第 2 节中，利用测度变换方法，得到了两公司违约时间的联合分布及各自的边际分布• 第 3 节利用第 2 节的结论对 CDS 这种衍生产品定价，得到了解析解• 第 4 节是结论•

1　双曲衰减的违约相关模型

考虑在 $[0, T^*]$ 时间段上具有不确定性的经济体系，其概率空间为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，其中，P 为 Harison Pliska(1981)[10]意义下的风险中性测度，也就是说，任意证券关于无风险利率的贴现价格过程均为 P 鞅•

本节构建两个公司违约相关的模型• 设有两个公司 B、C，他们或为竞争对手，或为合作关系，相关性比较高• 公司 $i\,(i = \mathrm{B}, \mathrm{C})$ 的违约时间用 τ^i 来表示，其违约强度过程 λ_t^i 为关于 $\mathscr{F}_t$ 可料的非负过程，其中 $\left\{\mathscr{F}_t\right\}_{t=0}^{T^*}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子滤子流• 注意，此处的 $\mathscr{F}_t$ 只是在 t 时刻公司所获得的与违约强度有关的信息，是 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 代数•

令 $N_t^i = I_{(\tau^i \leqslant t)}$ 表示公司 i 的违约示性函数，即在 t 时刻，如果公司 i 已经违约，那么 $N_t^i = 1$，否则为 0•

令

$$\mathscr{H}_t = \sigma(N_s^{\mathrm{B}}, 0 \leqslant s \leqslant t) \vee \sigma(N_s^{\mathrm{C}}, 0 \leqslant s \leqslant t)$$

是由在 t 时刻及以前观察到的公司 B、C 违约与否所生成的 σ 代数(在本文中，它实际上是整个经济中不确定性 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 代数)•

本文主要考虑交易对手的违约传染风险的衰减效应，故不妨假设 $\left\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\right\}$ 仅仅是由违约时间 τ^{B} 和 τ^{C} 生成，即 $\left\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\right\}$ 就是 $\left\{\mathscr{H}_t, t \geqslant 0\right\}$，这与前边的假设是相容的•

B、C 两公司的违约相关性表现在违约强度的相关性上：

$$\lambda_t^{\mathrm{B}} = b_0 + I_{(\tau^{\mathrm{C}} \leqslant t)} \frac{b_1}{b_2(t - \tau^{\mathrm{C}}) + 1}, \tag{1}$$

$$\lambda_t^{\mathrm{C}} = c_0 + I_{(\tau^{\mathrm{B}} \leqslant t)} \frac{c_1}{c_2(t - \tau^{\mathrm{B}}) + 1}, \tag{2}$$

其中，b_0、c_0、b_2、c_2 均为非负实数，b_1、c_1 为实数，满足 $b_0 + b_1 > 0$，$c_0 + c_1 > 0$• 在此模型下，公司 C(B) 的违约给 B(C) 的违约强度带来实质性的变化：若 B、C 为竞争对手，$b_1 < 0$，当 C 公司违约时，B 公司的违约强度由 b_0 减小为 $b_0 + b_1$，但是随着时间的推移，C 的违约对 B 违约强度的影响越来越弱，直至 B 的违约强度最终恢复到 b_0• 若 B、C 为合作关系，$b_1 > 0$，当 C 公司违约时，B 公司的违约强度由 b_0 增加为 $b_0 + b_1$，但是随着时间的推移，C 的违约对 B 的影响越来越弱，直至 B 的违约强度最终恢复到 b_0• 式(1)、(2) 中的分式分别是关于公司 C、B 违约后

时间 $t-\tau^{C}$、$t-\tau^{B}$ 的反比例函数, 其图像均为双曲线的一支, 故我们称之为"双曲衰减"。其中参数 b_1、c_1 是反映对手违约时的冲击强度, 若 $b_1=0$、$c_1=0$ 说明两个公司是违约独立的, 任何一方的违约对另一方都没有影响。参数 b_2、c_2 为非负实数, 反映一方违约对另一方违约强度影响的衰减速度, 当 $b_2=0, c_2=0$ 时, 此模型就为 Jarrow 和 Yu(2001) 的文献[1] 和 Leung 和 Kwok 的文献[8] 中的模型。

由 λ_t^i 的定义可知,

$$M_t^i := N_t^i - \int_0^{t\wedge\tau^i} \lambda_s^i \mathrm{d}s \tag{3}$$

为 $(\mathscr{F}_t, P)$ 鞅, 并且 i 公司的条件存活概率为

$$P(\tau^i > T \mid \mathscr{F}_t) = I_{(\tau^i > t)} E\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_s^i \mathrm{d}s\right)\right]。 \tag{4}$$

2 违约时间的联合生存概率和边际生存概率

为计算两公司在 $[0, T]$ (其中 $T < T^*$) 上违约时间的联合分布, 采用 Collin-Dufresne 等人(2004)[9] 中提出的测度变换的方法。定义新测度 P^i $(i = \mathrm{B}, \mathrm{C})$, 使得公司 i 在 T 时刻以前违约的概率在测度 P^i 下为 0。测度 P^i 关于 P 的 Radon-Nikodym 导数定义为

$$Z_t^i \triangleq \left.\frac{\mathrm{d}P^i}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_t} \approx I_{(\tau^i > t)} \exp\left(\int_0^T \lambda_s^i \mathrm{d}s\right), \tag{5}$$

其中 P^i 是依赖 i 公司的概率测度, 在 $[0, \tau^i)$ 上关于测度 P 绝对连续, 在 $[\tau^i, +\infty)$ 上几乎处处为 0。可以证明 Z_t^i 为 $(\mathscr{F}_t, P)$- 鞅(参见 Collin-Dufresne 等人(2004) 的文献[9]), 在 $[0, \tau^i)$ 上几乎处处严格正。为了在测度 P^i 下进行计算, 令 $\mathscr{F}^i = (\mathscr{F}_t^i)_{t\geqslant 0}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 和 P^i 零测集的扩充。在式(1)、(2) 给出的违约风险结构下, 公司 B 和公司 C 的存活概率是循环定义的, 这种现象称为"环形违约"。在由式(5) 定义的新测度 P^{C} 下, 公司 B 的违约强度 $\lambda_t^{B} = b_0$(当 $t < \tau^{C}$ 时), 这样就有效地消除了公司 C 违约对公司 B 的影响, 这种环形违约在新测度下就不再存在。同样的结论在测度 P^{B} 下也成立。

定理 1 在由式(1)、(2) 定义的违约强度下, 当 $-b_1 = b_2 = b > 0, -c_1 = c_2 = c > 0$ 时, 违约时间 (τ^{B}, τ^{C}) 在 $[0, T] \times [0, T]$ 上的联合分布为

$$P(\tau^{B} > t_1, \tau^{C} > t_2) = \begin{cases} c\left(t_2 - t_1 + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b_0}\right) \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2} + \dfrac{c}{b_0} \mathrm{e}^{-(b_0 + c_0) t_2}, & \text{当 } t_1 \leqslant t_2 \leqslant T, \\ b\left(t_1 - t_2 + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c_0}\right) \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2} + \dfrac{b}{c_0} \mathrm{e}^{-(b_0 + c_0) t_1}, & \text{当 } t_2 < t_1 \leqslant T, \end{cases} \tag{6}$$

其联合密度为

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} c b_0 c_0\left[(t_2 - t_1) + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c_0}\right] \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2}, & \text{当 } t_1 \leqslant t_2 \leqslant T, \\ b b_0 c_0\left[(t_1 - t_2) + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b_0}\right] \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2}, & \text{当 } t_2 < t_1 \leqslant T。 \end{cases} \tag{7}$$

引理(Shreve[11]) 设概率空间为 $(\Omega, \mathscr{G}, \{\mathscr{G}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$, Q 是关于 P 绝对连续的一个测度, $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 为 Radon-Nikodym 导数过程。如果 X 为 $\mathscr{G}_t$- 可测的, 那么

$$E^{Q}[X] = E^{P}[X, Z_t]。$$

定理 1 证明

当 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ 时, 由于

$$(\tau^{B} > t_1, \tau^{C} > t_2) \in \mathscr{F}_{t_2}, \tag{8}$$

故由引理可知

$$\begin{aligned}
&P(\tau^{B} > t_1, \tau^{C} > t_2) = \\
&\quad E^{C}\left[I_{(\tau^{B} > t_1)} \exp\left\{ -\int_0^{t_2} \left(c_0 + I_{(\tau^{B} \leqslant t)} \frac{-c}{c(t-\tau^{B})+1} \mathrm{d}t \right) \right\} \right] = \\
&\quad E^{C}\left[I_{(\tau^{B} > t_1)} \mathrm{e}^{-c_0 t_2} \exp\left\{ I_{(\tau^{B} \leqslant t_2)} \ln[c(t_2 - \tau^{B}) + 1] \right\} \right] = \\
&\quad \mathrm{e}^{-c_0 t_2} E^{C}[I_{(t_1 < \tau^{B} \leqslant t_2)}(c(t_2 - \tau^{B}) + 1) + I_{(\tau^{B} > t_2)}] = \\
&\quad \mathrm{e}^{-c_0 t_2}\left[\int_{t_1}^{t_2} b_0 \mathrm{e}^{-b_0 t}[c(t_2 - t) + 1] \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-b_0 t_2} \right] = \\
&\quad c\left(t_2 - t_1 + \frac{1}{c} - \frac{1}{b_0} \right) \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2} + \frac{c}{b_0} \mathrm{e}^{-(b_0 + c_0) t_2},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 E^{C} 代表在测度 P^{C} 下的期望算子•

同理可得, 当 $t_2 < t_1 \leqslant T$ 时,

$$P(\tau^{B} > t_1, \tau^{C} > t_2) = b\left(t_1 - t_2 + \frac{1}{b} - \frac{1}{c_0} \right) \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2} + \frac{b}{c_0} \mathrm{e}^{-(b_0 + c_0) t_1}• \tag{10}$$

对式(9)、(10) 关于 t_1 和 t_2 求导可得 τ^{B} 和 τ^{C} 的联合密度函数式(7)•

定理得证• □

注 1　当 $cb_0 \neq bc_0$ 时, $f(t_1, t_2)$ 在 $t_1 = t_2$ 这个平面上是不连续的•

推论 1　当 $b_1 = c_1 = 0$ 时, (τ^{B}, τ^{C}) 在 $[0, T] \times [0, T]$ 上的联合分布为

$$P(\tau^{B} > t_1, \tau^{C} > t_2) = \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2}, \tag{11}$$

即, 当 $b_1 = c_1 = 0$ 时, (τ^{B}, τ^{C}) 在 $[0, T] \times [0, T]$ 上是独立的•

证明　在式(9) 或式(10) 中令 $c \to 0^{+}$ 可得式(11)• □

推论 2　当 $-b_1 = b_2 = b > 0, -c_1 = c_2 = c > 0$ 时, τ^{B}、τ^{C} 在 $[0, T]$ 上的边际分布为

$$P(\tau^{B} > t_1) = \mathrm{e}^{-b_0 t_1} + \frac{b}{c_0} \mathrm{e}^{-b_0 t_1}[\mathrm{e}^{-c_0 t_1} - 1 + c_0 t_1], \qquad t_1 \leqslant T, \tag{12}$$

$$P(\tau^{C} > t_2) = \mathrm{e}^{-c_0 t_2} + \frac{c}{b_0} \mathrm{e}^{-c_0 t_2}[\mathrm{e}^{-b_0 t_2} - 1 + b_0 t_2], \qquad t_2 \leqslant T• \tag{13}$$

证明　分别在式(9)、(10) 中取 $t_1 = 0, t_2 = 0$, 可得式(12)、(13)• □

注 2　式(12) 中右边第 1 项是表示 B 公司自身因素而产生的生存概率, 第 2 项表示由于 C 公司的违约使得 B 公司生存概率增大量, 或看作为违约概率减小量•　由简单计算可得

$$\frac{b}{c_0} \mathrm{e}^{-b_0 t_1}[\mathrm{e}^{-c_0 t_1} - 1 + c_0 t_1] \leqslant \frac{1}{2} b c_0 t_1^2 \mathrm{e}^{-b_0 t_1} \leqslant \begin{cases} \dfrac{2c_0}{b_0} \mathrm{e}^{-2}, & \text{若} \dfrac{2}{b_0} \leqslant T, \\ \dfrac{1}{2} b c_0 T^2 \mathrm{e}^{-b_0 T}, & \text{若} \dfrac{2}{b_0} > T• \end{cases}$$

由上式可以看出, 由于这种“环形违约”及对方违约冲击的双曲衰减使得 B 公司在 t 时刻的生存概率增大量是不大于 $bc_0 t_1^2 \mathrm{e}^{-b_0 t_1}/2$ 的•　同样的理论也适用于 C 公司•

3　CDS 定价

利用第 2 节的结论对信用违约互换进行定价•　信用违约互换是违约保护买方和卖方之间

的协议, 其中违约保护的买方定期向卖方支付一定的费用(swap premium)或利差(spread), 以换取参照资产违约时获得补偿的权利• 信用违约互换将参照资产的信用风险剥离, 转移这些资产因信用事件而产生的潜在损失, 因而被广泛地用于转移、规避和对冲信用风险, 为信用风险管理的一种重要工具•

假设利率 r 为常数• 公司 A 持有公司 C 发行的高收益债券(参照资产), 由于公司 C 可能违约, 公司 A 面临信用风险• 为了对冲公司 C 的违约风险, A 和 B(B 和 C 为竞争对手)签订一份信用违约互换, A(信用保护买方)定期支付保护费用给 B(信用保护卖方)• 作为交换, B 答应在参照资产违约时补偿 A 的损失• 不失一般性, 不妨设参照资产 C 票面价值为 1, 当 C 违约时, 其偿付率为 0(zero recovery), 而公司 B 在 C 违约后 δ 时间内按票面价值补偿 A 的损失• 假设在整个合同过程中, 公司 A 不违约, 公司 B、C 的违约强度为式(1)、(2)的特殊情况

$$\lambda_t^{\mathrm{B}} = b_0 - I_{(\tau^{\mathrm{C}} \leqslant t)} \frac{b}{b(t - \tau^{\mathrm{C}}) + 1}, \tag{1$'$}$$

$$\lambda_t^{\mathrm{C}} = c_0 - I_{(\tau^{\mathrm{B}} \leqslant t)} \frac{c}{c(t - \tau^{\mathrm{B}}) + 1}• \tag{2$'$}$$

另外, S.Y.Leung, Y.K.Kwok 在文献[8]中得出结论: 保护买方的违约风险对保护费的影响甚微• 由于双方进入信用违约互换合同都不需任何费用, 由无套利原理知信用互换费 $S(\Delta T)$ 应满足

$$\sum_{i=1}^{n} E[\mathrm{e}^{-rT_i} S(\Delta T) I_{(\tau^{\mathrm{B}} \wedge \tau^{\mathrm{C}} > T_i)}] + S(\Delta T) A(\Delta T) = E[\mathrm{e}^{-r(\tau^{\mathrm{C}} + \delta)} I_{(\tau^{\mathrm{C}} \leqslant T)} I_{(\tau^{\mathrm{B}} > \tau^{\mathrm{C}} + \delta)}], \tag{14}$$

其中 $\{T_1, \cdots, T_n\}$ 为互换费用的支付日, $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = T$, $T_i - T_{i-1} = \Delta T$, $T + \delta < T^*$, δ 为清算时间段的长度• 式(14)中等号左边的第 1 个和式给出的是保护买方 A 在参考资产 C 违约前定期支付给保护卖方的互换总费用在无风险利率下的贴现, 第 2 项 $S(\Delta T)A(\Delta T)$ 为互换费用在 τ^{C} 和最后一次实际支付日之间的自然累积互换费的贴现, 即

$$S(\Delta T) A(\Delta T) = S(\Delta T) \sum_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{-r\tau^{\mathrm{C}}} \frac{\tau^{\mathrm{C}} - T_{i-1}}{\Delta T} I_{(T_{i-1} < \tau^{\mathrm{C}} \leqslant T_i)} I_{(\tau^{\mathrm{B}} > \tau^{\mathrm{C}})}\right]• \tag{15}$$

为简单起见, 记 $\beta := b_0 + c_0 + r$• 下面分别计算出式(14)中各个的期望•

由式(6)可得

$$E[I_{(\tau^{\mathrm{B}} \wedge \tau^{\mathrm{C}} > T_i)}] = P(\tau^{\mathrm{B}} > T_i, \tau^{\mathrm{C}} > T_i) = \mathrm{e}^{-(b_0 + c_0)T_i}, \tag{16}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} E[\mathrm{e}^{-rT_i} S(\Delta T) I_{(\tau^{\mathrm{B}} \wedge \tau^{\mathrm{C}} > T_i)}] = S(\Delta T) \frac{\mathrm{e}^{-\beta \Delta T}(1 - \mathrm{e}^{-\beta T})}{1 - \mathrm{e}^{-\beta \Delta T}}• \tag{17}$$

由式(7)可得

$$\begin{aligned} & E[\mathrm{e}^{-r(\tau^{\mathrm{C}} + \delta)} I_{(\tau^{\mathrm{C}} \leqslant T)} I_{(\tau^{\mathrm{B}} > \tau^{\mathrm{C}} + \delta)}] = \\ & \quad \int_0^T \int_{t_2 + \delta}^{+\infty} \mathrm{e}^{-r(t_2 + \delta)} b b_0 c_0 \left[t_1 - t_2 + \frac{1}{b} - \frac{1}{b_0}\right] \mathrm{e}^{-b_0 t_1 - c_0 t_2} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \\ & \quad \frac{b c_0}{\beta} \left(\frac{1}{b} + \delta\right) \mathrm{e}^{-(r + b_0)\delta} [1 - \mathrm{e}^{-\beta T}] \end{aligned} \tag{18}$$

和

$$E\left[\mathrm{e}^{-r\tau^{\mathrm{C}}} \frac{\tau^{\mathrm{C}} - T_{i-1}}{\Delta T} I_{(T_{i-1} < \tau^{\mathrm{C}} \leqslant T_i)} I_{(\tau^{\mathrm{B}} > \tau^{\mathrm{C}})}\right] =$$

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i}\int_{t_2}^{+\infty} e^{-rt_2}\frac{t_2-T_{i-1}}{\Delta T}bb_0c_0\left[t_1-t_2+\frac{1}{b}-\frac{1}{b_0}\right]e^{-b_0t_1-c_0t_2}dt_1dt_2=$$

$$\frac{c_0}{\beta\Delta T}\left[-T_ie^{-\beta T_i}+T_{i-1}e^{-\beta T_i}+\frac{1}{\beta}e^{-\beta T_{i-1}}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta T_i}\right]=$$

$$\frac{c_0}{\beta^2\Delta T}(e^{\beta\Delta T}-1-\beta\Delta T)e^{-\beta T_i},\tag{19}$$

由此可计算出

$$A(\Delta T)=\frac{c_0}{\beta^2\Delta T}(1-e^{-\beta\Delta T}-\beta\Delta Te^{-\beta\Delta T})\sum_{i=1}^{n}e^{-T_i}=$$

$$\frac{c_0}{\beta^2\Delta T}(1-e^{-\beta\Delta T}-\beta\Delta Te^{-\beta\Delta T})\frac{1-e^{-\beta T}}{1-e^{-\beta\Delta T}}.\tag{20}$$

将式(17)、(18)、(20)分别代入式(14)的两边, 可得

定理2　假设信用违约互换保护的买方不违约, 保护的卖方和参考资产的违约强度由式(1)′、(2)′给出, 则信用违约互换的公平价格为

$$S(\Delta T)=(1+b\delta)e^{-(r+b_0)\delta}\cdot\frac{\beta\Delta T(e^{\beta\Delta T}-1)}{e^{\beta\Delta T}-1-\beta\Delta T+(\beta^2/c_0)\Delta T}.\tag{21}$$

4 结　论

本文引进一个双曲类型的衰减函数来表示一方违约对另一方违约强度的影响, 并着重分析交易双方为竞争对手时一方违约对另一方的冲击. 通过测度变换方法, 得到了两公司违约时间的联合分布及各自的边际分布, 并对"环形违约"及双曲衰减对另一方违约概率的影响做了估计. 在此模型下对 CDS 这种衍生产品定价, 得到了解析解.

[参 考 文 献]

[1] Jarrow R A, Yu F. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities[J]. Journal of Finance, 2001, **56**(5): 1765-1799.

[2] Li D X. On default correlation: A copula function approach[J]. Journal of Fixed Income, 2000, **9**(Mar): 43-54.

[3] Schonbucher P, Schubert D. Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models[Z]. Working paper: Bonn University, 2001.

[4] Laurent J-P, Gregory J. Basket default swaps, CDO′s and factor copulas[J]. The Journal of Risk, 2005, **7**(4): 103-122.

[5] Duffie D, Singleton K. Modeling term structures of defaultable bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, **12**(4): 687-720.

[6] Lando D. On cox processes and credit risky securities[J]. Review of Derivatives Research, 1998, **2**(2): 99-120.

[7] Davis M, Lo V. Infectious defaults[J]. Quantitive Finance, 2001, **1**(4): 383-387.

[8] Leung S Y, Kwok Y K. Credit default swap valuation with counterparty risk[J]. Kyoto Economic Review, 2005, **74**(1): 25-45.

[9] Collin-Dufresne P, Goldstein R S, Hugonnier J. A general formula for valuing defaultable securities[J]. Econometrica, 2004, **72**(5): 1377-1407.

[10] Harrison M, Pliska S. Martingales and stochastic integrals in the theorey of continuous trading[J]. Stochastics Processes and Their Applications, 1981, **11**: 215-260.

[11] Shreve S E. Stochastic Calculus for Finance Ⅰ: The Binomial Asset Pricing Model [M]. New York: Springer, 2004.

Model for Dependent Default With Hyperbolic Attenuation Effect and the Valuation of CDS

BAI Yun-fen[1,2], HU Xin-hua[3,4], YE Zhong-xing[1]

(1. Department of Mathmatics, Shanghai Jiaotong Univeristy, Shanghai 200240, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang 050035, P. R. China;

3. Guanghua Institute of Management, Peking University, Beijing 100032, P. R. China;

4. Postdoctoral Workstation of ICBC, Beijing 100036, P. R. China)

Abstract: A hyperbolic attenuation function was introduced to reflect the effect of one firm's default to its partner. If the two firms are competitors (copartners), the default intensity of one firm will decrease (increase) abruptly when the other firm defaults. As time goes on, the impact will decrease gradually until extinction. In this model, the joint distribution and marginal distributions of default times are derived by employing the change of measure, so the fair swap premium of a CDS can be valued.

Key words: dependent default; hyperbolic attenuation function; change of measure; credit default swap (CDS)