应用数学和力学, 第 28 卷 第 12 期
2007 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 12, Dec. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 12-1493-09

L_p 截面体*

朱先阳, 冷岗松

(上海大学 数学系, 上海 200444)

摘要: 通过利用 Brunn-Minkowski-Firey 混合体积及对偶混合体积理论, 研究了 L_p- 截面体和对偶混合体积的相互关系, 建立了关于正规化 L_p- 径向加及 L_p- 径向线性组合的 L_p- 截面体的 Brunn-Minkowski 形不等式及其隔离形式, 且获得了算子 I_p 的一些性质·

关 键 词: 星体; L_p- 截面体; 性质; Brunn-Minkowski 不等式

中图分类号: O184 文献标识码: A

引 言

在 n- 维欧氏空间 R^n 中, 一个紧的星形(关于原点) L 的径向函数定义为 $\rho(L, \boldsymbol{u}) = \max\left\{\lambda \geqslant 0: \lambda\boldsymbol{u} \in L\right\}$, $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, 其中 S^{n-1} 表示 R^n 中的单位球面· 当 ρ_L 是正的连续函数时, 称 L 是一个星体(关于原点)· 我们记 $V_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 R^n 中的 i- 维 Lebesgue 测度· 通常将 V_n 和 V_{n-1} 简记为 V 和 v· Lutwak 在文献[1] 中引入了一个与星体 L 相关的截面体 IL 的概念, 它在方向 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$ 上的径向函数等于星体 L 与垂直于方向 $\boldsymbol{u}$ 的超平面 $\boldsymbol{u}^{\perp}$ 相切而成的一个 $n-1$ 维体的体积, 即, 对每一个 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$,

$$\rho(IL, \boldsymbol{u}) = v(L \cap \boldsymbol{u}^{\perp}) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap \boldsymbol{u}^{\perp}} \rho_L^{n-1}(\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}·$$

由 Busemann 定理(见文献[2]· 定理 8.1.10) 可知, 如果 L 是一个关于原点对称的凸体, 那么截面体 IL 也是凸体·

在文献[3] 中, Gardner 和 Giannopoulos 给出了一个定义, 这里我们使用不同的符号来重写它, 而且与文献[4] 中的定义只是相差一个常数· 即就是

定义 如果 C 是一个星体, 且非零的实数 $p < 1 (p \neq 0)$, 那么 L_p- 截面体 I_pC 由径向函数定义如下: 对任意的 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$

$$\rho(I_pC, \boldsymbol{u})^p = \int_C |\boldsymbol{u}·\boldsymbol{x}|^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}·\boldsymbol{x}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的内积, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 表示星体 C 的 n- 维体积微元·

* 收稿日期: 2006-11-07; 修订日期: 2007-11-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671117)

作者简介: 朱先阳(1969—), 男, 湖南湘潭人, 博士(E-mail: xyzhu17@163.com);
冷岗松(1961—), 男, 湖南平江人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel/Fax: +86-21-66132398; E-mail: gleng@staff.shu.edu.cn).

同时,我们注意到文献[3]中的命题3.1,得到当 C 是一个星体,且 $p\to 1^-$ 时,有

$$\frac{1-p}{2}\rho(I_pC,\boldsymbol{u})^p\to\rho(IC,\boldsymbol{u}).$$

换句话说,当 $p\to 1^-$ 时,L_p-截面体 I_pC 就是截面体 IC,因此上述这种重写的定义是合理的.

在2006年,尽管没有使用这个符号,Yaskin 和 Yaskina 在文献[5]中还是讨论了当 $-1<p<1$ 时的情况,获得了一些结果. 同年,Haberl 和 Ludwig 在文献[4]中定义了一个当星体 C 是一个包括原点是其内点的多胞形时,L_p-截面体 I_pC 的概念,得到了一些结论. 明显地,这只是我们上述重写定义的一个特例. 也可参考文献[6-10].

用 $\mathscr{S}_0^n$ 表示所有含有原点的星体的集合. 对于 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$,用 $K\hat{+}_pL$, $K\tilde{+}_pL$ 分别表示 K 和 L 的正规化的 L_p-径向加及 L_p-径向线性组合,$\widetilde{W}_i(K)$ 表示 K 的第 i 阶对偶均质积分.

在本文的第2节,结合 L_p-截面体和对偶混合体积的概念及 Jessen 不等式,获得了算子 I_p 的一些性质;在第3节建立了关于正规化的 L_p-径向加及 L_p-径向线性组合的 L_p-截面体的 Brunn-Minkowski 形不等式,用定理表达如下:

定理A 如果 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$, $p\leqslant 1$,那么

$$\frac{V(I_p(K\hat{+}_{-p}L))^{p/n}}{V(K\hat{+}_{-p}L)}\geqslant\frac{V(I_pK)^{p/n}}{V(K)}+\frac{V(I_pL)^{p/n}}{V(L)},$$

当且仅当 K 和 L 是互相伸缩时等号成立.

定理B 如果 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$, $p\leqslant 1$ 及实数 $i<n$ 或 $n<i<n-p$,那么

$$\widetilde{W}_i(I_p(K\tilde{+}_{n-p}L))^{p/(n-i)}\geqslant\widetilde{W}_i(I_pK)^{p/(n-i)}+\widetilde{W}_i(I_pL)^{p/(n-i)},$$

当且仅当 K 和 L 是互相伸缩时等号成立. 当 $i>n-p$ 时,上述不等式的不等号反向.

1 预 备 知 识

在这节,我们回顾一些基本的定义及性质.

从径向函数的定义可知:对于 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$,任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,有[2,11]

(i) 当 $c>0$ 时,$\rho_K(c\boldsymbol{x})=c^{-1}\rho_K(\boldsymbol{x})$;

(ii) 当 $\phi\in GL_n$ 时,$\rho_{\phi K}(\boldsymbol{x})=\rho_K(\phi^{-1}\boldsymbol{x})$,其中 ϕ^{-1} 表示 ϕ 的逆变换;

(iii) 当 $\lambda>0$,对任意的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$, $\rho_K(\boldsymbol{u})\leqslant\lambda\rho_L(\boldsymbol{u})$ 成立当且仅当 $K\subseteq\lambda L$.

如果两个星体 K 和 L 的径向函数的比值 $\rho_K(\boldsymbol{u})/\rho_L(\boldsymbol{u})$ 与方向 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 的选取无关,则称 K 和 L 是互相伸缩的.

在命题2.1的证明中,我们将用到内积的一个性质[2]:

(iv) 当 $\phi\in GL_n$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,则 $\boldsymbol{x}\cdot\phi\boldsymbol{y}=\phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$,其中 ϕ^{T} 表示 ϕ 的转置.

如果 $p\neq 0$,μ 是一个定义在集合 X 上的有限 Borel 测度,f 是一个定义在 X 上的非负 μ 可积函数,就可定义 f 的第 p 次平均 M_pf 为

$$M_pf=\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f(\boldsymbol{x})^p\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right)^{1/p}.$$

很容易证明

$$\lim_{p\to\infty}M_pf=\operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in X}f(\boldsymbol{x})$$

和

$$\lim_{p\to 0}M_pf=\exp\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X\ln f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right).$$

(也可参考文献[12],第 6 章•)

Jenesen 不等式是指: 如果上述 $M_p f$ 存在, 且 $p, q \neq 0$, 和 $p \leqslant q$, 则

$$M_p f \leqslant M_q f, \tag{2}$$

当且仅当 f 是常数函数或 $p = q$ 时等号成立•

如果 $K, L \in \mathscr{S}_0^n, p > 0$, 我们引入关于 K 和 L 的正规化 L_p- 径向加 $K \tilde{+}_p L \in \mathscr{S}_0^n$ 的概念•首先定义一个 $\xi > 0$ 如下:

$$\xi^{1/(n+p)} = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}[V(K)^{-1}\rho(K, \boldsymbol{u})^{n+p} + V(L)^{-1}\rho(L, \boldsymbol{u})^{n+p}]^{n/(n+p)}\mathrm{d}\boldsymbol{u}•$$

再通过径向函数来定义星体 $K \tilde{+}_p L \in \mathscr{S}_0^n$, 即是

$$\xi^{-1}\rho(K \tilde{+}_p L, \cdot)^{n+p} = V(K)^{-1}\rho(K, \cdot)^{n+p} + V(L)^{-1}\rho(L, \cdot)^{n+p}•$$

那么取 $\xi = V(K \tilde{+}_p L)$, 就可得到关系式

$$\frac{\rho(K \tilde{+}_p L, \cdot)^{n+p}}{V(K \tilde{+}_p L)} = \frac{\rho(K, \cdot)^{n+p}}{V(K)} + \frac{\rho(L, \cdot)^{n+p}}{V(L)}• \tag{3}$$

如果 $p > 0, K, L \in \mathscr{S}_0^n$, 及 $\lambda, \mu \geqslant 0$(不全为 0), 则 L_p- 径向线性组合 $\lambda \cdot K \tilde{+}_p \mu \cdot L \in \mathscr{S}_0^n$ 是:

$$\rho(\lambda \cdot K \tilde{+}_p \mu \cdot L, \cdot)^p = \lambda\rho(K, \cdot)^p + \mu\rho(L, \cdot)^p• \tag{4}$$

如果 $K, L \in \mathscr{S}_0^n, p \geqslant 1$ 和 $\varepsilon > 0$, 则 L_p- 调和径向组合 $K \tilde{+}_{-p} \varepsilon \cdot L \in \mathscr{S}_0^n$ 的径向函数定义为[13]:

$$\rho(K \tilde{+}_{-p} \varepsilon \cdot L, \cdot)^{-p} = \rho(K, \cdot)^{-p} + \varepsilon\rho(L, \cdot)^{-p}•$$

如果 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$, 当 $p \geqslant 1$ 时, 关于 K 和 L 的 L_p- 对偶混合体积 $V_{-p}(K, L)$ 定义为:

$$\frac{n}{-p}V_{-p}(K, L) = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{V(K \tilde{+}_{-p} \varepsilon \cdot L) - V(K)}{\varepsilon}•$$

同时由这个定义和体积的极坐标公式, 可以得到 L_p- 对偶混合体积 $V_{-p}(K, L)$ 有下面的积分表达式[13]:

$$V_{-p}(K, L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p}(v)\rho_L^{-p}(v)\mathrm{d}v, \tag{5}$$

其中 $\mathrm{d}v$ 表示 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度• 同时, 明显地, 对所有的 $p \geqslant 1$, 有[13]

$$V_{-p}(K, K) = V(K)• \tag{6}$$

当然, 与 L_p- 对偶混合体积 V_{-p} 相联系的, 是称为 L_p-Minkowski 的不等式[13]: 如果 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$ 且 $p \geqslant 1$, 则

$$V_{-p}(K, L) \geqslant V(K)^{(n+p)/n}V(L)^{-p/n}, \tag{7}$$

当且仅当 K 与 L 中一个是另一个的伸缩时等号成立•

如果 $K, L \in \mathscr{S}_0^n, p \geqslant 1, \varepsilon > 0$ 和实数 $i \neq n$, 则 L_p- 对偶混合均质积分 $W_{-p,i}(K, L)$ 定义如下[14]:

$$\frac{n-i}{-p}W_{-p,i}(K, L) = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{W_i(K \tilde{+}_{-p}\varepsilon \cdot L) - W_i(K)}{\varepsilon},$$

其中 $$W_i(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(K, \boldsymbol{u})^{n-i}\mathrm{d}\boldsymbol{u}•$$

同时由这个定义和体积的极坐标公式, 可以得到 L_p- 对偶混合均质积分 $W_{-p,i}(K, L)$ 有下面的积分表达式[14]: 如果 $p \geqslant 1$, 实数 $i \neq n$, 则

$$W_{-p,i}(K, L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p-i}(\boldsymbol{u})\rho_L^{-p}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \tag{8}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 表示 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度• 同时, 明显地, 有[14]

$$W_{-p,0}(K,L)=V_{-p}(K,L),\quad W_{-p,i}(K,K)=W_i(K)• \tag{9}$$

当然, 与 L_p- 对偶混合均质积分 $W_{-p,i}(K,L)$ 相联系的, 是称为 L_p-Minkowski 的不等式[14]: 如果 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$, $p\geqslant 1$ 和实数 $i<n$ 或 $i>n+p$, 则

$$W_{-p,i}(K,L)^{n-i}\geqslant W_i(K)^{n+p-i}W_i(L)^{-p}, \tag{10}$$

当且仅当 K 与 L 中一个是另一个的伸缩时等号成立• 当 $n<i<n+p$ 时, 上述不等式的不等号反向•

2 算子 I_p 的性质

命题 2.1 线性等价星体的 L_p- 截面体也是线性等价的• 也就是说, 如果 $K\in\mathscr{S}_0^n$, 非零实数 $p<1$, $\phi\in GL_n$, 那么

$$I_p\phi K=|\det\phi|^{1/p}\phi^{-\mathrm{T}}(I_pK)•$$

证明 设 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$• 利用径向函数的 3 个性质(i)、(ii)、(iii) 和内积的性质(iv), 我们得到

$$\rho^p_{I_p\phi K}(\boldsymbol{u})=\int_{\phi K}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$\int_K|\boldsymbol{u}\cdot\phi\boldsymbol{y}|^{-p}|\det\phi|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\qquad(\boldsymbol{y}=\phi^{-1}\boldsymbol{x})$$

$$\int_K|\phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}|^{-p}|\det\phi|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=|\det\phi|\,\rho^p_{I_pK}(\phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})=|\det\phi|\,\rho^p_{\phi^{-\mathrm{T}}(I_pK)}(\boldsymbol{u})•$$

即

$$I_p\phi K=|\det\phi|^{1/p}\phi^{-\mathrm{T}}(I_pK)•$$

证明完毕• □

命题 2.2 假设 $K,L\in\mathscr{S}_0^n$, $p\leqslant 1$, 那么

$$V_p(K,I_pL)=V_p(L,I_pK)• \tag{11}$$

证明 由 L_p- 截面体的定义式(1), L_p- 对偶混合体积 $V_p(K,L)$(注意到这里 $p\leqslant 1$) 的积分表达式(8), 利用球面极坐标变换, 得到

$$V_p(K,I_pL)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(\nu)\rho^p_{I_pL}(\nu)\,\mathrm{d}\nu=$$

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(\nu)\int_L|\nu\cdot\boldsymbol{x}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\nu=$$

$$\frac{1}{n(n-p)}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(\nu)\int_{S^{n-1}}\rho_L^{n-p}(\boldsymbol{u})|\nu\cdot\boldsymbol{u}|^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\nu=$$

$$V_p(L,I_pK)•$$

因此等式(11) 成立• □

设 Z_p 表示由算子 I_p 的值域构成的关于原点对称的星体的集合; 即 $Z_p=\left\{I_pK:K\in\mathscr{S}_0^n\right\}$• 这节的另一个目的是要建立算子 $I_p(p\leqslant 1)$ 的单调性, 其结果就是下面的命题:

命题 2.3 设 $K,L\in\mathscr{S}^n$, $p\leqslant 1$,

(a) 如果 $p\leqslant q\leqslant 1$, 那么 $I_qK/(nV(K))^{1/q}\subseteq I_pK/(nV(K))^{1/p}$, 当且仅当 $p=q$, 或 $p\neq q$, $n=1$, 且 K 是一条关于原点对称的线段时等号成立;

(b) 如果对所有的 $Q\in\mathscr{S}^n$, $V_p(K,Q)\leqslant V_p(L,Q)$ 成立, 那么 $V(I_pL)\leqslant V(I_pK)$, 当且仅当 $K=L$ 时等号成立;

(c) 如果 $I_pK \subseteq I_pL$, 且 $K \in Z_p$, 那么 $V(K) \geqslant V(L)$, 当且仅当 $K = L$ 时等号成立;

(d) 如果 $K \subseteq L$, 那么 $I_pL \subseteq I_pK$, 当且仅当 $K = L$ 时等号成立•

证明 (a) 设 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, 由 L_p- 截面体的定义(1), Jenesen 不等式(2) 和径向函数的性质(iii), 有

$$\rho^{-1}(I_pK, \boldsymbol{u}) = \left(\int_K |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-1/p} =$$

$$(nV(K))^{-1/p}\left(\frac{1}{nV(K)}\int_K |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-1/p} \leqslant$$

$$(nV(K))^{-1/p}\left(\frac{1}{nV(K)}\int_K |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|^{-q}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{-1/q} =$$

$$(nV(K))^{-1/p}(nV(K))^{1/q}\rho^{-1}(I_qK, \boldsymbol{u}),$$

即

$$(nV(K))^{1/p}\rho^{-1}(I_pK, \boldsymbol{u}) \leqslant (nV(K))^{1/q}\rho^{-1}(I_qK, \boldsymbol{u})•$$

因此我们得到

$$\frac{I_qK}{(nV(K))^{1/q}} \subseteq \frac{I_pK}{(nV(K))^{1/p}}•$$

很容易验证当且仅当 $p = q$ 时等号成立; 或者当 $p \neq q$, $n = 1$ 时, 按照Jenesen不等式(2)等号成立的条件可知, 当且仅当对 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, 任意的 $\boldsymbol{x} \in K$ 使得 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}|$ 是常数• 即就是当 $p \neq q$, $n = 1$ 时, K 是一条关于原点对称的线段等号成立•

(b) 因为对任意 $Q \in \mathscr{S}^n$, $p \leqslant -1$, 有 $V_p(K, Q) \leqslant V_p(L, Q)$, 于是取 $Q = I_pM$, $M \in \mathscr{S}^n$, 这就是

$$V_p(K, I_pM) \leqslant V_p(L, I_pM), \tag{12}$$

当且仅当 $K = L$ 时等号成立• 利用等式(11), 得到

$$V_p(M, I_pK) \leqslant V_p(M, I_pL)•$$

取 $M = I_pL$, 利用等式(6) 和 L_p- Minkowski 不等式(7), 上式可化为

$$V(I_pL)^n \geqslant V_p(I_pL, I_pK)^n \geqslant V(I_pL)^{n-p}V(I_pK)^p•$$

化简即有

$$V(I_pL) \leqslant V(I_pK), \tag{13}$$

当且仅当 I_pK 和 I_pL 是互相伸缩时等号成立•

按照在式(12) 和(13) 中等号成立的条件, 就可知当且仅当 $K = L$ 时, $V(I_pL) \leqslant V(I_pK)$ 中的等号成立•

(c) 因为 $I_pK \subseteq I_pL$, 所以对任意 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, $p \leqslant -1$, 有 $\rho_{I_pK}(\boldsymbol{u}) \geqslant \rho_{I_pL}(\boldsymbol{u})$• 通过式(5), 对任意 $M \in \mathscr{S}_0^n$, 我们获得

$$V_p(M, I_pK) \geqslant V_p(M, I_pL)•$$

由等式(11), 上式可化为

$$V_p(K, I_pM) \geqslant V_p(L, I_pM)•$$

因为 $K \in Z_p$, 所以取 $K = I_pM$, 并利用等式(6) 和 L_p- Minkowski 不等式(7), 我们得到

$$V(K)^n \geqslant V_p(L, K)^n \geqslant V(L)^{n-p}V(K)^p•$$

即就是

$$V(K) \geqslant V(L),$$

当且仅当 $K = L$ 时等号成立•

(d) 由性质(iii),可知对 $u \in S^{n-1}$, 有 $\rho_K(u) \leqslant \rho_L(u)$ 成立• 因为 L_p-截面体的定义式(1)可以化为

$$\rho(I_pC, u)^p = \int_C |u \cdot x|^{-p} \mathrm{d}x = \frac{1}{n-p}\int_{S^{n-1}} \rho_C^{n-p}(u) |u \cdot v|^{-p} \mathrm{d}v,$$

所以当 $p \leqslant 1$ 时, 有 $\rho^p_{I_pK}(u) \leqslant \rho^p_{I_pL}(u)$ 成立• 再利用性质(iii), 也就得到了 $I_pL \subseteq I_pK$, 当且仅当 $I_pK = I_pL$ 时等号成立• 如同在下面定理 3.1 的证明等号成立的方法一样, 就可获知当且仅当 $K = L$ 时等号成立•

这样, 就完整地证明了命题 2.3• □

3 关于 L_p-截面体的 Brunn-Minkowski 不等式

为了建立本文的主要定理, 在这节将证明两个比定理 A 和 B 更一般的结论, 需要下面的引理:

引理 3.1[14] 设 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$, $p \leqslant 1$• 如果对任意 $Q \in \mathscr{S}_0^n$, 有

$$V_p(Q, K) = V_p(Q, L), \text{ 或 } V_p(K, Q) = V_p(K, Q), \tag{14}$$

那么 $K = L$• 反之亦然•

引理 3.2 假设 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$, $p \leqslant 1$, 那么对任意 $u \in S^{n-1}$, 有

$$\frac{\rho^p_{I_p(K \tilde{+}_{-p} L)}(u)}{V(K \tilde{+}_{-p} L)} = \frac{\rho^p_{I_pK}(u)}{V(K)} + \frac{\rho^p_{I_pL}(u)}{V(L)}• \tag{15}$$

证明 由定义式(1), 利用球面极坐标变换和等式(3), 那么对每一个 $u \in S^{n-1}$ 有

$$\rho^p_{I_p(K \tilde{+}_{-p} L)}(u) = \int_{K \tilde{+}_{-p} L} |u \cdot x|^{-p} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{V(K \tilde{+}_{-p} L)}{n-p}\int_{S^{n-1}} \frac{\rho^{n-p}_{(K \tilde{+}_{-p} L)}(v)}{V(K \tilde{+}_{-p} L)} |u \cdot v|^{-p} \mathrm{d}v =$$

$$\frac{V(K \tilde{+}_{-p} L)}{n-p}\int_{S^{n-1}} \left(\frac{\rho_K^{n-p}(v)}{V(K)} + \frac{\rho_L^{n-p}(v)}{V(L)}\right) |u \cdot v|^{-p} \mathrm{d}v =$$

$$\frac{V(K \tilde{+}_{-p} L)}{V(K)} \rho^p_{I_pK}(u) + \frac{V(K \tilde{+}_{-p} L)}{V(L)} \rho^p_{I_pL}(u)•$$

由此, 就证明了等式(15)• □

引理 3.2 所建立的是关于正规化 L_p-径向加的 L_p-截面体的径向函数的一个等式• 同样地, 关于 L_p-径向线性组合, 我们建立起类似的等式:

引理 3.3 假设 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$, $\lambda, \mu \geqslant 0$(不全为 0), 且 $p \leqslant 1$, 那么对任意 $u \in S^{n-1}$, 有

$$\rho^p_{I_p(\lambda \cdot K +_{n-p} \mu \cdot L)}(u) = \lambda \rho^p_{I_pK}(u) + \mu \rho^p_{I_pL}(u)• \tag{16}$$

定理 3.1 假设 $K, L \in \mathscr{S}_0^n$, $p \leqslant 1$, 且实数 $i < n$ 或 $n < i < n-p$, 那么

$$\frac{W_i(I_p(K \tilde{+}_{-p} L))^{p/(n-i)}}{V(K \tilde{+}_{-p} L)} \geqslant \frac{W_i(I_pK)^{p/(n-i)}}{V(K)} + \frac{W_i(I_pL)^{p/(n-i)}}{V(L)}, \tag{17}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 中一个是另一个的伸缩• 当 $i > n-p$ 时, 不等式(17)是反向的•

证明 先证明当实数 $i < n$ 时的情况• 利用式(8)、(3), 引理 3.2 和不等式(10), 那么对任意 $Q \in \mathscr{S}_0^n$, 我们得到

$$W_{p,i}(Q, I_p(K \tilde{+}_{-p} L)) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_Q^{n-p-i}(u) \rho^p_{I_p(K \tilde{+}_{-p} L)}(u) \mathrm{d}u =$$

$$\frac{V(K\tilde{+}_{-p}L)}{V(K)}\cdot\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_Q^{n-p-i}(\boldsymbol{u})\rho^p_{I_p(K)}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}+$$
$$\frac{V(K\tilde{+}_{-p}L)}{V(L)}\cdot\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_Q^{n-p-i}(\boldsymbol{u})\rho^p_{I_p(L)}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}=$$
$$V(K\tilde{+}_{-p}L)\frac{W_{p,i}(Q,I_pK)}{V(K)}+V(K\tilde{+}_{-p}L)\frac{W_{p,i}(Q,I_pL)}{V(L)}\geqslant$$
$$V(K\tilde{+}_{-p}L)\frac{W_i(Q)^{(n-p-i)/(n-i)}W_i(I_pK)^{p/(n-i)}}{V(K)}+$$
$$V(K\tilde{+}_{-p}L)\frac{W_i(Q)^{(n-p-i)/(n-i)}W_i(I_pL)^{p/(n-i)}}{V(L)}.$$

即
$$\frac{W_{p,i}(Q,I_p(K\tilde{+}_{-p}L))}{V(K\tilde{+}_{-p}L)}\geqslant W_i(Q)^{(n-p-i)/(n-i)}\left(\frac{W_i(I_pK)^{p/(n-i)}}{V(K)}+\frac{W_i(I_pL)^{p/(n-i)}}{V(L)}\right).$$

取 $Q=I_p(K\tilde{+}_{-p}L)$，我们得到
$$\frac{W_i(I_p(K\tilde{+}_{-p}L))^{p/(n-i)}}{V(K\tilde{+}_{-p}L)}\geqslant\frac{W_i(I_pK)^{p/(n-i)}}{V(K)}+\frac{W_i(I_pL)^{p/(n-i)}}{V(L)}.$$

因此当实数 $i<n$ 时不等式(17)成立.

按照不等式(10)中等号成立的条件可知，不等式(17)等号成立当且仅当 I_pK 与 I_pL 中一个是另一个的伸缩. 设 $I_pK=\lambda I_pL$，其中 $\lambda>0$，利用 L_p- 对偶混合体积概念，对任意 $Q\in\mathscr{S}_o^n$，我们有
$$V_p(Q,I_pK)=V_p(Q,\lambda I_pL)=\lambda^p V_p(Q,I_pL).$$

利用命题 2.2，积分表达式(5)和径向函数的定义，对任意 $Q\in\mathscr{S}_o^n$，上式可化为
$$V_p(K,I_pQ)=\lambda^p V_p(L,I_pQ)=V_p(\lambda^{p/(n-p)}L,I_pQ).$$

再根据引理 3.1，就得到 $K=\lambda^{p/(n-p)}L$，即是说 K 与 L 中一个是另一个的伸缩.

同样地，能够证明当 $n<i<n-p$ 时，不等式(17)也成立. 当 $i>n-p$ 时，不等式(17)的不等号是反向的. □

注 如果在定理 3.1 中，取 $i=0$，利用等式(9)，我们就可获得定理 A.

定理 3.1 建立的是关于正规化 L_p- 径向加的一个关系式. 类似地，利用在定理 3.1 中的证明方法和引理 3.3，同样可以建立关于 L_p- 径向线性组合的关系式.

定理 3.2 假设 $K,L\in\mathscr{S}_o^n$，$\lambda,\mu\geqslant 0$（不全为 0），$p\leqslant 1$ 且实数 $i<n$ 或 $n<i<n-p$，那么
$$W_i(I_p(\lambda\cdot K\tilde{+}_{n-p}\mu\cdot L))^{p/(n-i)}\geqslant\lambda W_i(I_pK)^{p/(n-i)}+\mu W_i(I_pL)^{p/(n-i)},$$
等号成立当且仅当 K 与 L 中一个是另一个的伸缩. 当 $i>n-p$ 时，不等式是反向的.

注 如果在定理 3.2 中，取 $\lambda=\mu=1$，利用等式(9)，定理 B 就可立即得到.

结合定理 3.2 和定理 B，可以获得定理 B 的一种隔离形式如下:

定理 3.3 假设 $K,L\in\mathscr{S}_o^n$，$\alpha\in[0,1]$，$p\leqslant 1$ 且实数 $i<n$ 或 $n<i<n-p$，那么
$$W_i(I_p(K\tilde{+}_{n-p}L))^{p/(n-i)}\geqslant$$
$$W_i(I_p(\alpha\cdot K\tilde{+}_{n-p}(1-\alpha)\cdot L))^{p/(n-i)}+W_i(I_p((1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_{n-p}\alpha\cdot L))^{p/(n-i)}\geqslant$$
$$W_i(I_pK)^{p/(n-i)}+W_i(I_pL)^{p/(n-i)},$$
等号成立当且仅当 K 与 L 中一个是另一个的伸缩. 当 $i>n-p$ 时，不等式是反向的.

证明 对任意 $\alpha\in[0,1]$，设 $M=\alpha\cdot K\tilde{+}_{n-p}(1-\alpha)\cdot L$，$N=(1-\alpha)\cdot K\tilde{+}_{n-p}\alpha\cdot L$. 由于

$K, L \in \mathscr{S}_0^n$, 所以 $M, N \in \mathscr{S}_0^n$• 利用引理 3.3, 则有

$$
\begin{aligned}
W_i(I_p(K \tilde{+}_{n-p} L)) = {} & \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho(I_p(K \tilde{+}_{n-p} L), \boldsymbol{u})^{n-i} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left[\rho^p(I_p(K \tilde{+}_{n-p} L), \boldsymbol{u})\right]^{(n-i)/p} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} [\rho^p(I_pK, \boldsymbol{u}) + \rho^p(I_pL, \boldsymbol{u})]^{(n-i)/p} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} ([\alpha\rho^p(I_pK, \boldsymbol{u}) + (1-\alpha)\rho^p(I_pL, \boldsymbol{u})] + \\
& [(1-\alpha)\rho^p(I_pK, \boldsymbol{u}) + \alpha\rho^p(I_pL, \boldsymbol{u})])^{(n-i)/p} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} (\rho^p(I_p(\alpha \bullet K \tilde{+}_{n-p} (1-\alpha) \bullet L), \boldsymbol{u}) + \\
& \rho^p(I_p((1-\alpha) \bullet K \tilde{+}_{n-p} \alpha \bullet L), \boldsymbol{u}))^{(n-i)/p} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho(I_p(M \tilde{+}_{n-p} N), \boldsymbol{u})^{n-i} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \\
& W_i(I_p(M \tilde{+}_{n-p} N))•
\end{aligned}
$$

根据定理 B, 当 $i < n$ 或 $n < i < n-p$ 时, 我们得到

$$
\begin{aligned}
W_i(I_p(K \tilde{+}_{n-p} L))^{p/(n-i)} = {} & W_i(I_p(M \tilde{+}_{n-p} N))^{p/(n-i)} \geqslant \\
& W_i(I_pM)^{p/(n-i)} + W_i(I_pL)^{p/(n-i)},
\end{aligned} \tag{18}
$$

等号成立当且仅当 M 与 N 中一个是另一个的伸缩• 不等式(18) 恰好是所证定理左边的不等式•

因为 M 与 N 是互相伸缩的当且仅当对任意 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, $\rho_M^{n-p}(\boldsymbol{u}) = c\rho_N^{n-p}(\boldsymbol{u})(c > 0)$ 成立, 再利用式(4), 对 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, 就有

$$
\alpha\rho_K^{n-p}(\boldsymbol{u}) + (1-\alpha)\rho_L^{n-p}(\boldsymbol{u}) = c[(1-\alpha)\rho_K^{n-p}(\boldsymbol{u}) + \alpha\rho_L^{n-p}(\boldsymbol{u})]•
$$

即 $$(\alpha + c\alpha - c)\rho_K^{n-p}(\boldsymbol{u}) = (c\alpha + \alpha - 1)\rho_L^{n-p}(\boldsymbol{u})•$$

所以 M 与 N 是互相伸缩的当且仅当 K 与 L 是互相伸缩的• 如此, 定理 3.3 中左边不等式等号成立当且仅当 K 与 L 是互相伸缩的•

另一方面, 根据定理 3.2 中的不等式, 当实数 $i < n$ 或 $n < i < n-p$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
W_i(I_pM)^{p/(n-i)} = {} & W_i(I_p(\alpha \bullet K \tilde{+}_{n-p} (1-\alpha) \bullet L))^{p/(n-i)} \geqslant \\
& \alpha W_i(I_pK)^{p/(n-i)} + (1-\alpha) W_i(I_pL)^{p/(n-i)},
\end{aligned} \tag{19}
$$

以及 $$W_i(I_pN)^{p/(n-i)} \geqslant (1-\alpha) W_i(I_pK)^{p/(n-i)} + \alpha W_i(I_pL)^{p/(n-i)}, \tag{20}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 是互相伸缩的•

结合上述两个不等式(19) 和(20) , 则得到

$$
W_i(I_pM)^{p/(n-i)} + W_i(I_pL)^{p/(n-i)} \geqslant W_i(I_pK)^{p/(n-i)} + W_i(I_pL)^{p/(n-i)}, \tag{21}
$$

等号成立当且仅当 K 与 L 是互相伸缩的• 不等式(21) 恰好是定理 3.3 中右边的不等式•

类似地, 用上述证明的方法, 容易证明当 $i > n-p$ 时, 定理 3.3 中的不等号是反向的•

□

在定理 3.3 中取 $i = 0$, 利用等式(9) , 我们获得

推论 3.1 假设 $K, L \in \mathscr{S}_o^n$, $\alpha \in [0, 1]$, $p \leqslant -1$, 那么

$$
\begin{aligned}
V(I_p(K \tilde{+}_{n-p} L))^{p/n} \geqslant {} & \\
& V(I_p(\alpha \bullet K \tilde{+}_{n-p} (1-\alpha) \bullet L))^{p/n} + V(I_p((1-\alpha) \bullet K \tilde{+}_{n-p} \alpha \bullet L))^{p/n} \geqslant
\end{aligned}
$$

$$V(I_pK)^{p/n}+V(I_pL)^{p/n},$$

等号成立当且仅当 K 与 L 是互相伸缩的•

[参 考 文 献]

[1] Lutwak E. Intersection bodies and dual mixed volume[J]. Adv Math, 1988, **71**(2): 232-261.

[2] Gardner R J. Geometry Tomography [M]. New York: Cambridge University Press, 1995.

[3] Gardner R J, Giannopoulos A A. p-Cross-section bodies[J]. Indiana Univ Math J, 1999, **48**(2): 593-613.

[4] Haberl C, Ludwig M. A characterization of L_p intersection bodies[J]. International Mathematics Research Notices, Article ID 10548, 2006, 1-29.

[5] Yaskin V, Yaskina M. Centeriod bodies and comparison of volume[J]. Indiana Univ Math J, 2006, **55**(3): 1175-1194.

[6] Campi S, Gronchi P. The L_p-Busemann-Petty centroid inequakity[J]. Adv Math, 2002, **167**(1): 128-141.

[7] Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p affine isoperimetric inequalities[J]. J Differential Geom, 2000, **56**(1): 111-132.

[8] Lutwak E, Zhang G. Blaschke-Santal inequalities[J], J Differential Geom, 1997, **47**(1): 1-16.

[9] Grinberg E, Zhang G. Convolutions, transforms, and convex bodies[J]. Proc London Math Soc, 1999, **78**(3): 77-115.

[10] Yu W, Wu D, Leng G. Qusai L_p-intersection bodies[J]. Acta Math Sinica, 2007, **23**(11): 1937-1948.

[11] Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[12] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

[13] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firy theory Ⅱ: affine and geominimal surface areas[J]. Adv Math, 1996, **118**(2): 244-294.

[14] Wang W, Leng G. L_p-dual mixed quermassintegrals[J]. Pure Appl Math, 2005, **36**(4): 177-188.

On the L_p Intersection Body

ZHU Xian-yang, LENG Gang-song

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: By using Brunn-Minkowski-Firey mixed volume theory and dual mixed volume theory, associated with L_p intersection body and dual mixed volume, some dual Brunn-Minkowski inequalities and their isolate forms are established for L_p intersection body about the normalized L_p radial addition and L_p radial linear combination. Some properties of operator I_p are given.

Key words: star body; L_p intersection body; property; Brunn-Minkowski inequality