

# 基于非线性相位恢复的 X 射线 相位衬度断层成像算法\*

倪文磊, 周 铁

(北京大学 数学科学学院, 北京 100871)

(郭懋正推荐)

摘要: 对全息测量下的 X 射线相位衬度断层成像问题提出了一种新的重建算法. 该算法的主要想法是利用牛顿迭代法求解非线性的相位恢复问题. 我们证明了牛顿方向满足的线性方程是非适定的, 并利用共轭梯度法得到方程的正则化解. 最后利用模拟数据进行了数值实验, 数值结果验证了算法的合理性以及对噪声数据的数值稳定性, 同时通过与线性化相位恢复算法的数值结果比较说明了新算法对探测数据不要求限制在 Fresnel 区域的近场, 适用范围更广.

关键词: 相位衬度断层成像; 全息测量; 相位恢复

中图分类号: O29; O434. 19 文献标识码: A

## 引 言

传统的 X 射线成像是基于不同物质对 X 射线的吸收系数不同的原理来实现的, 因而对于弱吸收物体成像效果就不理想. 同时, 人们发现弱吸收物体的相位系数要比其吸收系数大 3 个量级<sup>[1]</sup>, X 射线穿过物体后相位变化比因吸收而产生的场强变化要明显的多. 因此, 基于相位衬度的成像技术就被提出并且应用在医学成像以及材料科学等领域. 通过比较, 对于人体的肺<sup>[2]</sup>、血管<sup>[3]</sup>以及乳腺<sup>[4-5]</sup>等软组织, 利用相位衬度成像技术得到的图像要比基于吸收的成像技术得到的图像更清晰.

X 射线相位衬度成像包括相位衬度照相术成像和相位衬度断层成像. 相位衬度照相术成像是通过重建 X 射线穿过物体前后的相位变化来成像, 而相位衬度断层成像则是重建物体的相位系数的三维分布. 利用不同的测量设备, 相位衬度成像有以下方法: 干涉法<sup>[6-7]</sup>、衍射增强法<sup>[8-9]</sup>、基于光栅的成像法<sup>[10-11]</sup>以及类同轴全息法<sup>[2, 12-16]</sup>. 相比而言, 全息法在实验设备上最容易实现. 本文讨论利用全息法实现相位衬度断层成像的重建方法.

在全息测量下, 入射的 X 射线为单色的相干波, 这可以由同步加速器(synchrotron)或微焦点 X 射线源(microfocus X-ray sources)产生<sup>[1]</sup>. 探测器位于物体的后面且垂直于入射方向. 在相

\* 收稿日期: 2007-08-03; 修订日期: 2007-12-17

基金项目: 科技部国家重点基础研究发展计划资助项目(2003CB716101); 国家自然科学基金(重点)资助项目(60532080); 教育部科学研究重大资助项目(306017)

作者简介: 倪文磊(1980—), 男, 山东人, 博士(联系人, E-mail: evenlying@gmail.com); 周铁(1963—), 男, 副教授, 博士生导师(E-mail: tzhou@math.pku.edu.cn).

位衬度断层成像中,一种描述射线场的模型为:在物体内部,由几何光学近似,X射线的传播路径被看作直线,在离开物体后的自由空间中,X射线的传播过程用 Fresnel 衍射<sup>[17]</sup>来描述.利用该模型,当探测数据在 Fresnel 衍射区域的近场范围时,文献[16]建立了场强与物体折射系数之间的线性关系,然后利用 Radon 变换得到了相位衬度断层成像算法.文献[14]则利用相位恢复方法<sup>[18]</sup>来得到 X 射线穿过物体后的相位分布,然后利用传统的 X 射线断层成像算法来得到对物体相位系数的重建.由于文献[18]中的相位恢复方法是基于对描述场强和相位的非线性方程的线性化近似提出的,而该近似只有在探测数据位于 Fresnel 衍射区域的近场范围时才有效,因此文献[14]中的相位衬度断层成像算法的适用范围也受到限制.全息测量下相位衬度断层成像的另一种模型是 Born 近似,文献[15]利用一阶 Born 近似来表示射线场,提出了 4 种方法来描述场强与物体的折射系数之间的关系以及相应的重建算法.本文讨论基于相位恢复的重建算法,而基于 Born 近似的重建算法将在接下来的工作中研究.

根据对相位衬度断层成像正问题的描述,本文利用牛顿迭代法求解非线性相位恢复问题,从而避免对问题的线性化带来的误差.然后根据 X 射线穿过物体后的相位变化,利用滤波反投影算法重建被测物体的相位系数.最后,数值实验讨论了在不同的探测距离下算法对于无噪声数据和有噪声数据的重建效果,同时对本文所提算法与文献[16]中的算法下的重建误差进行了量化比较.

## 1 正问题模型

设  $(x_1, x_2, x_3)$  为笛卡儿坐标系.入射的 X 射线为波长为  $\lambda$  且入射方向为  $\alpha = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  的平面波.探测器位于物体后,且垂直于入射方向.根据文献[16]的描述,在探测器平面上建立  $(x, y)$  坐标系,其中  $y$  轴与  $x_3$  轴的方向一致,如图 1 所示.定义  $z$  轴方向与入射方向  $\alpha$  一致,则  $(x, y, z)$  为新的笛卡儿坐标系,空间中的点可以由  $(x, y, z; \alpha)$  表示.因此,入射平面波有如下表示:

$$u_i(x, y, z; \alpha) = e^{ikz}$$

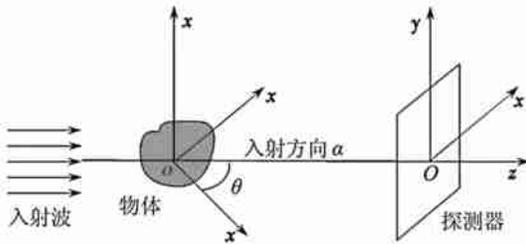


图 1 坐标系示意图

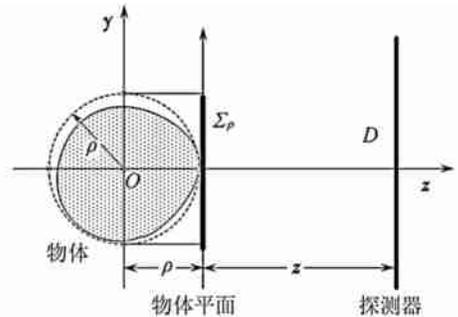


图 2 相位恢复方法的几何描述

其中  $k = 2\pi/\lambda$  为波数. 设  $u(x, y, z; \alpha)$  为入射波经过物体后产生的场,则场强

$$I(x, y, z; \alpha) = |u(x, y, z; \alpha)|^2.$$

物体对 X 射线的复折射系数有如下表示<sup>[19]</sup>:

$$n = 1 - \delta + i\beta$$

其中  $\delta$  和  $\beta$  分别决定了 X 射线的相位变化以及对 X 射线的吸收.对于弱吸收物体来说,相位系数  $\delta$  远大于与吸收相关的系数  $\beta$ ,例如在能量为 10 keV~ 100 keV 的 X 射线的照射下,人体

组织的系数  $\delta$  约为  $10^{-6} \sim 10^{-8}$ ,  $\beta$  约为  $10^{-9} \sim 10^{-11}$  [20].

相位衬度断层成像的目的就是利用在一组入射方向下测量到的场强数据  $I$  来重建系数  $\delta$  的三维分布, 从而得到弱吸收物体内部结构的图像. 文献[16] 给出了一个相位衬度断层成像的正问题模型, 下面给出该模型的详细推导.

设物体位于中心在原点且半径为  $\rho$  的球体  $\Omega_\rho$  内, 且物体周围的介质的折射系数  $n = 1$ . 记

$$f = n - 1 = -\delta + i\beta, \quad (1)$$

则  $f$  的支集为  $\Omega_\rho$ . 取一平面位于物体后并紧贴着物体且垂直于入射方向, 该平面被称为物体平面<sup>[21]</sup>, 则物体平面的位置可以取为  $z = \rho$ , 如图 2 所示. 由于 X 射线在物体内的传播方向与入射方向之间的偏转角度非常小, 大约是  $10^{-6}$  rad<sup>[9-10]</sup>, 射线在物体内的传播路径可以近似地看作直线, 所以物体平面上的场有如下描述

$$u(x, y, \rho; \alpha) = u_i(x, y, \rho; \alpha) e^{\phi_\alpha(x, y)} = e^{ik\rho} e^{\phi_\alpha(x, y)}, \quad (2)$$

其中  $\phi_\alpha$  为复相位扰动且满足

$$\phi_\alpha(x, y) = ikPf(x, y; \alpha), \quad (3)$$

其中  $Pf(x, y; \alpha)$  为  $f$  沿  $\alpha$  方向上的射线变换

$$Pf(x, y; \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z; \alpha) dz. \quad (4)$$

将式(1)代入到式(2)可得

$$u(x, y, \rho; \alpha) = \exp(-kP\beta) \exp(ik\rho - ikP\delta). \quad (5)$$

上式说明了  $\delta$  决定了场的相位, 而  $\beta$  由于与场的振幅有关, 所以决定了物体对射线的吸收.

如图 2 所示, 设  $z$  为物体平面与探测器平面之间的距离. 根据 Fresnel 衍射理论<sup>[17]</sup>, 探测器上的场可以表示为

$$u(x, y, \rho + z; \alpha) = e^{ikz} (h_z^* u(\cdot, \cdot, \rho; \alpha))(x, y), \quad (6)$$

其中

$$h_z(x, y) = \frac{k}{i2\pi z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right], \quad (7)$$

\* 为关于变量  $x, y$  的卷积. 将式(2)代入到式(6)中得到探测器上的场强

$$I(x, y, \rho + z; \alpha) = |h_z^* e^{\phi_\alpha(x, y)}|^2, \quad (8)$$

$$I(x, y, \rho + z; \alpha) = |h_z^* e^{iPf(x, y; \alpha)}|^2. \quad (9)$$

式(9)就建立了系数  $f = -\delta + i\beta$  与探测距离为  $\rho + z$  的探测器上的场强之间的关系.

## 2 重建算法

### 2.1 算法主要步骤

由传统的 X 射线断层成像方法可知, 如果各个方向上的射线变换  $Pf$  已知, 则  $f$  的三维分布可以由滤波反投影算法得到<sup>[23]</sup>. 因此, 本文提出的相位衬度断层成像算法可以由以下两个步骤实现:

#### 1) 非线性相位恢复

对于每个入射方向  $\alpha = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ , 通过求解方程(8) 得到相位  $\phi_\alpha$ , 然后根据式(3) 得到射线变换  $Pf$ ;

#### 2) 滤波反投影

利用滤波反投影算法

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{\mathbb{R}^2} | \xi | F P f(\xi, \eta; \alpha) e^{i(-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) \xi + i x_3 \eta} d\xi d\eta \quad (10)$$

得到对  $f$  的重建, 其中  $F$  为关于变量  $x, y$  的傅立叶变换算子

$$Fg(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy. \quad (11)$$

则相位系数  $\delta = -\operatorname{Re}(f)$ . 对弱吸收物体, 系数  $\beta = \operatorname{Im}(f) \ll \delta$ , 因而对  $\beta$  的重建效果比较差. 在本文中, 我们将不对  $\beta$  的重建结果进行讨论.

可以看到, 重建算法的关键步骤为相位恢复的实现. 下一节将给出相位恢复方法的推导.

## 2.2 非线性相位恢复

在本节中, 固定入射方向  $\alpha$ . 利用  $h_z^* 1 = 1$ , 关系式(8)可写为

$$I(x, y, \rho_+; z; \alpha) = | 1 + h_z^* (e^{\phi} - 1)(x, y) |^2. \quad (12)$$

由式(3)可得  $\phi_0$  的支集为  $f$  的支集  $\Omega_f$  在  $x-y$  平面上的投影, 也就是中心在原点且半径为  $\rho$  的圆盘, 记为  $\Sigma_\rho$ . 定义

$$\phi(x, y) = e^{\phi_0(x, y)} - 1, \quad (13)$$

则  $\phi$  的支集也为  $\Sigma_\rho$ . 定义算子  $A_z: L^2(\Sigma_\rho) \rightarrow L^2(D)$

$$A_z(g)(x, y) = | 1 + h_z^* g |^2(x, y). \quad (14)$$

其中  $D$  表示探测器在  $x-y$  平面上的区域. 则由式(12)

$$A_z(\phi)(x, y) = I(x, y, \rho_+; z; \alpha). \quad (15)$$

根据方程(15), 我们利用  $p$  个探测距离  $\rho_+ z_1, \dots, \rho_+ z_p$  下的数据  $I(\rho_+ z_1; \alpha), \dots, I(\rho_+ z_p; \alpha)$ , 通过求解如下的非线性方程组来得到  $\phi$

$$\begin{cases} A_{z_1}(\phi)(x, y) = I(x, y, \rho_+ z_1; \alpha), \\ \vdots \\ A_{z_p}(\phi)(x, y) = I(x, y, \rho_+ z_p; \alpha). \end{cases} \quad (16)$$

定义算子

$$K_p = (A_{z_1}, \dots, A_{z_p}). \quad (17)$$

则式(16)可以写为

$$K_p(\phi) = b_p, \quad (18)$$

其中  $b_p(x, y) = (I(x, y, \rho_+ z_1; \alpha), \dots, I(x, y, \rho_+ z_p; \alpha))$ .

首先有如下关于线性算子  $K_p$  的定理.

定理 1 设  $z_i > 0, i = 1, \dots, p$ . 则当  $p \geq 2$  时, 算子

$$K_p: L^2(\Sigma_\rho) \rightarrow \underbrace{L^2(D) \times \dots \times L^2(D)}_p$$

是单射.

证明 定义算子  $H_z: L^2(\Sigma_\rho) \rightarrow L^2(D)$

$$H_z g(x, y) = h_z^* g(x, y), \quad (19)$$

其中  $h_z$  在式(7)中定义,  $g$  是紧支集为  $\Sigma_\rho$  的函数. 则

$$H_z g(x, y) = \frac{k}{i2\pi z} \int_{\Sigma_p} e^{(ik/(2z))((x-x')^2+(y-y')^2)} g(x', y') dx' dy' = \frac{k}{i2\pi z} e^{(ik/(2z))(x^2+y^2)} \int_{\Sigma_p} e^{-(ik/z)(xx'+yy')} \cdot (e^{(ik/(2z))(x'^2+y'^2)} g(x', y')) dx' dy'. \quad (20)$$

上式右端的积分项是  $e^{(ik/(2z))(x^2+y^2)} g(x, y)$  的傅立叶变换. 由于函数  $g$  是有紧支集函数, 所以该积分项是解析的. 因此, 易得  $H_z g(x, y)$  是  $R^2$  空间上的解析函数.

由式(14)

$$A_z(\phi) = |1 + H_z \phi|^2 = (1 + H_z \phi)(1 + \overline{H_z \phi}), \quad (21)$$

可以得到  $A_z(\phi)(x, y)$  是解析函数.

设对  $(x, y) \in D$ , 存在  $\phi_1, \phi_2 \in L^2(\Sigma_p)$  满足

$$K_p(\phi_1)(x, y) = K_p(\phi_2)(x, y), \quad A_{z_j}(\phi_1)(x, y) = A_{z_j}(\phi_2)(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (22)$$

则对  $(x, y) \in R^2$ , 有

$$A_{z_j}(\phi_1)(x, y) = A_{z_j}(\phi_2)(x, y). \quad (23)$$

两边做傅立叶变换有

$$F(A_{z_j}(\phi_1) - A_{z_j}(\phi_2))(\xi, \eta) = 0. \quad (24)$$

下面证明  $\phi_1 = \phi_2$ , 这里参考了文献[15]中定理 3.3 的证明方法.

由式(21) 以及  $h_z$  的傅立叶变换的如下表达式

$$Fh_z(\xi, \eta) = e^{-(iz/(2k))(\xi^2 + \eta^2)}, \quad (25)$$

可以得到

$$F(A_{z_j}(\phi_1) - A_{z_j}(\phi_2))(\xi, \eta) = FH_{z_j}\phi(\xi, \eta) + \overline{FH_{z_j}\phi(\xi, \eta)} + T(\xi, \eta) = e^{-(iz_j/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} F\phi(\xi, \eta) + e^{(iz_j/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} \overline{F\phi(\xi, \eta)} + T(\xi, \eta), \quad (26)$$

其中

$$\phi = \phi_1 - \phi_2, \quad (27)$$

且

$$T(\xi, \eta) = F(H_{z_j}\phi_1 \cdot \overline{H_{z_j}\phi_1})(\xi, \eta) + F(\overline{H_{z_j}\phi_2} \cdot H_{z_j}\phi_2)(\xi, \eta) = e^{-(iz_j/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} \int_{\Sigma_p} \phi_1 \left[ x' + \frac{z_j \xi}{k} y' + \frac{z_j \eta}{k} \right] \phi_1(x', y') e^{-i(x' \xi + y' \eta)} dx' dy' + e^{-(iz_j/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} \int_{\Sigma_p} \phi_2 \left[ x' + \frac{z_j \xi}{k} y' + \frac{z_j \eta}{k} \right] \phi_2(x', y') e^{-i(x' \xi + y' \eta)} dx' dy'. \quad (28)$$

由于  $\phi_1$  和  $\phi_2$  有支集  $\Sigma_p$ , 所以当  $|\xi|, |\eta| > (2k/z_j)\rho$  时,

$$\phi_1 \left[ x' + \frac{z_j \xi}{k} y' + \frac{z_j \eta}{k} \right] = 0, \quad \phi_2 \left[ x' - \frac{z_j \xi}{k} y' + \frac{z_j \eta}{k} \right] = 0, \quad (29)$$

从而  $T(\xi, \eta) = 0$ . 将式(26)代入到式(24), 可得

$$\begin{cases} e^{-(iz/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} F\phi(\xi, \eta) + e^{(iz/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} \overline{F\phi(\xi, \eta)} = 0, \\ \vdots \\ e^{-(iz_p/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} F\phi(\xi, \eta) + e^{(iz_p/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} \overline{F\phi(\xi, \eta)} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

由已知  $p \geq 2$ , 则当  $\xi, \eta$  属于集合

$$\left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \exists m, q \in \{1, \dots, p\} m \neq q, \text{ s. t. } \sin\left(\frac{(z_m - z_q)(\xi^2 + \eta^2)}{2k}\right) \neq 0, \\ |\xi_j| > \frac{2k\rho}{z_j}, |\eta_j| > \frac{2k\rho}{z_j}, \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \right. \right\} \quad (31)$$

时, 方程组 (30) 的系数矩阵是满秩的, 因此  $F\phi(\xi, \eta) = 0$ . 由于  $\phi$  有紧支集, 所以  $F\phi(\xi, \eta)$  是解析函数. 对于任意的  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ , 有  $F\phi(\xi, \eta) = 0$ . 因此,  $\phi = 0$ , 也即  $\phi_1 = \phi_2$ . 这就证明了  $K_p$  是单射.

定理 1 说明了对于每个入射方向, 我们需要至少两个探测距离才能保证方程 (18) 解的唯一性. 对于一阶 Born 近似模型, 文献 [15] 证明了类似的结论.

我们考虑利用牛顿迭代法数值求解非线性方程 (18) 来重建相位改变量  $\phi_n$ , 步骤如下.

1) 取定初值  $\phi_0$ , 迭代地利用以下步骤

(a) 求解

$$K_p'(\phi_n) d(x, y) = b_p - K_p(\phi_n)(x, y), \quad (32)$$

其中  $d$  为牛顿方向,  $K_p'(\phi_n)$  为算子  $K_p$  在  $\phi_n$  处的 Frchet 导数.  $K_p'$  的表达式为

$$K_p' \phi_n = (A_{z_1}' \phi_n, \dots, A_{z_p}' \phi_n), \quad (33)$$

其中

$$A_{z_j}'(\phi_n) d = (1 + h_{z_j}^* \phi_n) \cdot \overline{(h_{z_j}^* d)} + \overline{(1 + h_{z_j}^* \phi_n)} \cdot (h_{z_j}^* d). \quad (34)$$

(b) 令  $\phi_{n+1} = \phi_n + d$ , 得到近似序列  $\phi_n$  来逼近  $\phi$ .

2) 根据式 (13), 由

$$\phi_n = \ln(\psi_n + 1) \quad (35)$$

得到相位函数  $\phi_n$ .

下面关于算子  $K_p'(\phi_n)$  的定理说明了方程 (32) 是非适定的.

定理 2 设  $\phi_n \in L^2(\Sigma_\rho)$  且  $z_i > 0, i = 1, \dots, p$ . 则算子

$$K_p'(\phi_n): L^2(\Sigma_\rho) \xrightarrow{\underbrace{\hspace{10em}}^p} L^2(D) \times \dots \times L^2(D)$$

是线性紧算子.

证明 根据定义式 (19), 对于固定的  $z > 0$ , 首先考察算子  $H_z$ . 由式 (25),

$$FH_z g(\xi, \eta) = FH_z(\xi, \eta) \cdot Fg(\xi, \eta) = e^{-i(z/(2k))(\xi^2 + \eta^2)} Fg(\xi, \eta). \quad (36)$$

因此

$$\begin{aligned} \|H_z g\|_{L^2(D)} &\leq \|H_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|FH_z g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \|Fg\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|g\|_{L^2(\Sigma_\rho)}. \end{aligned} \quad (37)$$

通过计算可得,  $H_z g(x, y)$  的一阶导数满足

$$\frac{\partial}{\partial x} H_z g(x, y) = \frac{ik}{z} (xH_z g(x, y) - H_z g(x, y)), \quad (38)$$

其中  $g(x, y) = xg(x, y)$ . 则由式 (37),

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} H_z g \right\|_{L^2(D)} \leq \frac{k}{z} (R_D + \rho) \cdot \|g\|_{L^2(\Sigma_\rho)}, \quad (39)$$

其中  $R_D$  为区域  $D$  上的点到原点的最大距离. 同理可得

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} H_z g \right\|_{L^2(D)} \leq \frac{k}{z} (R_D + \rho) \cdot \|g\|_{L^2(\Sigma_\rho)}.$$

所以,  $H_z$  是  $L^2(\Sigma_\rho)$  到 Sobolev 空间  $H^1(D)$  上的线性有界算子. 由于  $H^1(D)$  紧嵌入到  $L^2(D)$ , 因此  $H_z$  是  $L^2(\Sigma_\rho)$  到  $L^2(D)$  上的紧算子. 同时, 有

$$\|H_z g\|_\infty \leq \frac{k\rho}{2\sqrt{\pi}z} \|g\|_{L^2(\Sigma_\rho)}. \quad (40)$$

由式(34)

$$A'_z(\phi_n)d = BH_z d, \quad (41)$$

其中算子  $B: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  定义为

$$Bq = (1 + H_z \phi_n)q + \overline{(1 + H_z \phi_n)}q.$$

由式(40), 有

$$\begin{aligned} \|Bq\|_{L^2(D)} &\leq 2(1 + \|H_z \phi_n\|_\infty) \cdot \|q\|_{L^2(D)} \leq \\ &2 \left[ 1 + \frac{k\rho}{2\sqrt{\pi}z} \|\phi_n\|_{L^2(\Sigma_\rho)} \right] \cdot \|q\|_{L^2(D)}, \end{aligned} \quad (42)$$

根据已知条件  $\phi_n \in L^2(\Sigma_\rho)$  可得  $B$  是有界算子. 由  $H_z$  是紧算子可得,  $A'_z(\phi_n)$  是  $L^2(\Sigma_\rho)$  到  $L^2(D)$  上的紧算子. 因此, 根据式(33) 易得  $K'_p(\phi_n)$  是紧算子.  $\square$

定理 2 说明了  $K'_p$  由于是紧算子而没有有界逆. 因此, 我们考虑利用共轭梯度法通过求解

$$\min_{d \in L^2(\Sigma_\rho)} \|K'_p(\phi_n)d - (b_p - K_p(\phi_n))\|^2. \quad (43)$$

来得到方程(32)的正则化解.

注 1 利用共轭梯度法求解式(43)的实现过程需要  $K'_p(\phi_n)$  的伴随算子. 为此, 记  $d_r$  和  $d_i$  分别为  $d$  的实部和虚部, 并且将算子  $A'_z(\phi_n)$  和  $K'_p(\phi_n)$  看作为  $(d_r, d_i)$  上的算子. 由式(34), 对于  $j = 1, \dots, p$ ,

$$A'_z(\phi_n)(d_r, d_i) = (1 + h_{z_j}^* \phi_n) \cdot \overline{(h_{z_j}^* (d_r + id_i))} + \overline{(1 + h_{z_j}^* \phi_n)} \cdot (h_{z_j}^* (d_r + id_i)). \quad (44)$$

则对  $b_j \in L^2(D)$ ,  $A'_z(\phi_n)$  的伴随算子满足

$$A'_z(\phi_n)^* b_j = \underbrace{(2\text{Re}(h_{z_j}^* ((1 + \overline{h_{z_j}^* \phi_n}) b_j)), - 2\text{Im}(h_{z_j}^* ((1 + \overline{h_{z_j}^* \phi_n}) b_j)))}_p. \quad (45)$$

因此, 对  $b = (b_1, \dots, b_p) \in L^2(D) \times \dots \times L^2(D)$ ,  $K'_p(\phi_n)$  的伴随算子满足

$$\begin{aligned} K'_p(\phi_n)^* b &= \sum_{j=1}^p A'_z(\phi_n)^* b_j = \\ &\left( 2 \sum_{j=1}^p \text{Re}(h_{z_j}^* ((1 + \overline{h_{z_j}^* \phi_n}) b_j)), - 2 \sum_{j=1}^p \text{Im}(h_{z_j}^* ((1 + \overline{h_{z_j}^* \phi_n}) b_j)) \right). \end{aligned} \quad (46)$$

注 2 利用

$$h_z^* g = F^{-1}(Fh_z \cdot Fg) \quad (47)$$

来计算卷积  $h_z^* g$ , 其中  $F^{-1}$  表示傅立叶逆变换算子,  $Fh_z$  在式(25)中已经给出.

注 3 由于复自然对数是一个多值函数, 因此根据式(35), 当相位扰动  $\phi_\alpha$  虚部的绝对值超过  $2\pi$  时, 就需要利用相位展开(phase unwrapping) 方法来确定  $\phi_\alpha$  的真实值<sup>[22]</sup>. 本文的内容不准备涉及相位展开问题, 因此在下面的数值实验中,  $\phi_\alpha$  的虚部的取值范围在  $[-2\pi, 0]$ .

### 3 数值实验

本节利用计算机模拟数据来考察所提出的算法对弱吸收物体的重建结果, 实验中的参数见表 1. 物体的复折射系数分布利用三维 'Shepp Logan' 模型<sup>[23]</sup>来模拟, 并且取物体的相位系

数  $\delta$  为  $2.5 \times 10^{-7} \sim 5 \times 10^{-7}$ , 系数  $\beta = 0.002\delta$ . 重建图像的像素点数为  $256 \times 256 \times 256$ , 像素点间隔为  $1 \times 10^{-6}$  m. 探测器上模拟场强由式(9) 计算得到, 其中的射线变换  $Pf$  利用模型的射线变换的精确表达式得到, 卷积运算利用式(47) 通过快速傅立叶变换来实现. 为了避免“inverse crime”问题<sup>[24]</sup>, 我们利用比重建图像更细的像素点间隔  $0.25 \times 10^{-6}$  m 来计算模拟场强. 同时, 在滤波反投影步骤中, Hamming 窗函数被用为滤波器来消除 Gibbs 现象. 为了考察测量噪声对重建结果的影响, 本文对接收数据  $I$  分别添加均值为 0 且标准差  $\sigma = 1\%I$  和  $\sigma = 5\% I$  的高斯白噪声来产生噪声数据, 并分别称为 1% 噪声数据和 5% 噪声数据.

表 1 实验参数

|           |  |
|-----------|--|
| 射线波长      | $1.24 \times 10^{-10}$ m   |
| 物体尺       | $2 \times 10^{-4}$ m $\times$ $2 \times 10^{-4}$ m $\times$ $2 \times 10^{-4}$ m |
| 探测器上像素点数  | 512 $\times$ 512   |
| 探测器上像素点间隔 | $1 \times 10^{-6}$ m   |
| 入射方向数     | 600  |

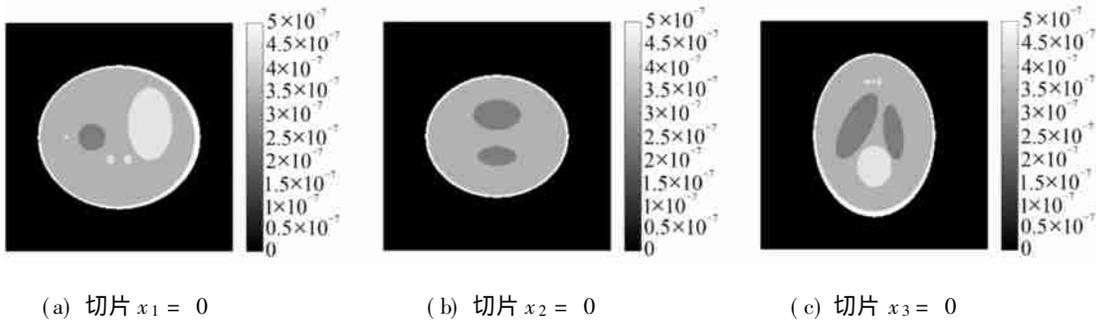


图 3 原图像

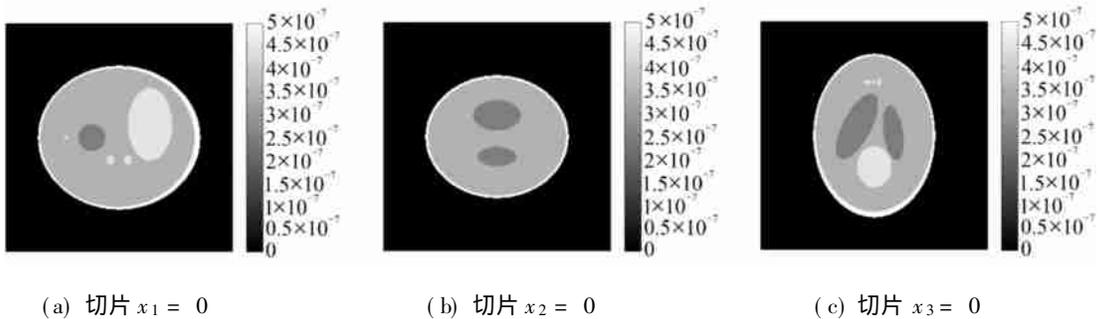


图 4 探测距离  $(z_1, z_2)$  下的重建图像

首先选取两个探测测量

$$z_1 = 0.1 \text{ m}, z_2 = 0.35 \text{ m}.$$

图 3 和图 4 分别显示了模型的 3 个切片  $x_1 = 0, x_2 = 0$  和  $x_3 = 0$  上的原图像以及无噪声数据下的重建图像. 可以看到, 算法对物体的重建效果比较好. 图 5 给出了过物体中心的曲线图. 注意到边缘部分的像素 ( $P$ ) 点上重建误差相对较大, 这是由于在滤波反投影步骤中对边缘像素点的插值造成的. 表 2 第 1 行给出了无噪声数据以及 1% 和 5% 噪声数据下重建结果的平均相对误差, 误差值分别为 2.30%、3.51% 和 5.07%. 这说明噪声带来的数据误差降低了重建图像的质量. 选取另外 2 个探测距离接下来分别利用 3 个探测距离  $(z_1, z_2, z_3)$  以及 4 个探

表 2 不同探测距离下重建结果的平均相对误差

| 探测距离                 | 无噪声数据 | 1% 噪声数据 | 5% 噪声数据 |
|----------------------|-------|---------|---------|
| $z_1, z_2$           | 2.30% | 3.51%   | 5.07%   |
| $z_1, z_2, z_3$      | 2.28% | 2.33%   | 3.07%   |
| $z_1, z_2, z_3, z_4$ | 2.23% | 2.26%   | 2.71%   |

表 3 平均相对误差比较

| 探测距离       | 本文的方法 | 文献[16]的算法 |
|------------|-------|-----------|
| $z_0, z_1$ | 3.15% | 3.01%     |
| $z_0, z_2$ | 2.63% | 5.62%     |
| $z_0, z_3$ | 2.21% | 8.42%     |
| $z_0, z_4$ | 2.27% | 9.09%     |

$z_3 = 0.85 \text{ m}, z_4 = 1.03 \text{ m}.$

测距离( $z_1, z_2, z_3, z_4$ )上的场强数据来进行重建. 重建结果的平均相对误差分别在表 2 的第 2 行和第 3 行给出. 可以看到, 重建误差随着探测距离数目的增加而减小. 尤其在 4 个探测距离下, 对于无噪声以及 1% 和 5% 噪声数据, 误差值分别为 2.23%、2.26% 和 2.71%, 这表明算法的稳定性较好. 这是由于由定理 1 的证明可以看到, 只有当  $(\xi, \eta)$  属于集合(31) 时, 牛顿方向  $d$  的傅立叶变换才能由方程组(30) 唯一确定, 而选取的探测距离数目越多, 集合(31) 的范围越大, 因而算法的数值计算的稳定性越好.

文献[16] 通过对式(9) 表示的正问题模型进行线性化得到了相位衬度断层成像算法. 为了保证线性化近似的有效性, 该算法需要两组探测距离上的数据, 即物体平面上的探测数据以及位于 Fresnel 区域的近场上的探测数据. 因而, 就需要探测器与物体之间的距离要比较小. 记  $z_0$  为物体尺寸的 1/2, 并作为物体平面对应的探测距离, 则  $z_0 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}.$  接下来取 4 组探测距离( $z_0, z_1$ )、( $z_0, z_2$ )、( $z_0, z_3$ ) 以及( $z_0, z_4$ ) 下的无噪声数据, 分别利用文献[16] 中的算法以及本文提出的算法对物体进行重建. 重建结果的平均相对误差在表 3 中给出. 文献[16] 的方法的重建误差值表明, 随着探测距离的增大, 线性化的近似程度越差, 该算法的重建误差就越大. 相比而言, 本文所提算法并不受探测距离选取的影响, 对于位于 Fresnel 区域近场之外的探测数据, 同样可以带来比较好重建效果.

### 4 结 论

本文研究了全息测量下相位衬度断层成像问题, 并结合相位恢复和滤波反投影算法提出了断层成像算法. 在相位恢复步骤中, 利用牛顿迭代法求解非线性方程组(16) 来恢复 X 射线穿过物体后的相位分布, 证明了牛顿方向满足的方程是非适定的并且需要至少两个探测距离下的场强数据来确保解的唯一性. 数值计算结果表明算法对位于 Fresnel 区域近场之外的探测数据同样有效. 同时, 利用 4 个探测距离下的场强数据, 算法的重建误差最小并且对噪声数

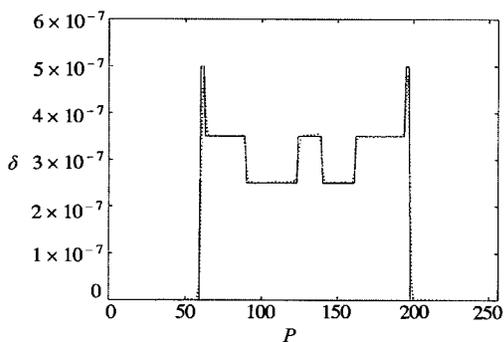


图 5 过物体中心的曲线图(原图像(实线)以及探测距离 ( $z_1, z_2$ ) 下的重建图像(虚线))

据的数值稳定性较好.

致谢 感谢北京大学工程研究院科研合作平台建设计划项目和微软亚洲研究院及北京大学微软统计与信息技术实验室资助.

### [参 考 文 献]

- [1] Lewis R A. Medical phase contrast X-ray imaging: Current status and future prospects[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2004, **49**(16): 3573-3583.
- [2] Suzuki Y, Yagi N, Uesugi K. X-ray refraction-enhanced imaging and a method for phase retrieval for a simple object[J]. *Journal of Synchrotron Radiation*, 2002, **9**(3): 160-165.
- [3] Spanne P, Raven C, Snigireva I, et al. In-line holography and phase-contrast microtomography with high energy X-rays[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1999, **44**(3): 741-749.
- [4] Arfelli F, Assante M, Borvicini V, et al. Low-dose phase contrast X-ray medical imaging[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1998, **43**(10): 2845-2852.
- [5] Ingal V N, Beliaevskaya E A, Brianskaya A P, et al. Phase mammography—a new technique for breast investigation[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1998, **43**(9): 2555-2567.
- [6] Ando M, Hosoya S. An attempt at X-ray phase-contrast microscopy[A]. In: Shinoda G, Kohra K, Ichinokawa T, Eds. *Proceedings of the 6th International Conference of X Ray Optics and Microanalysis* [C]. Tokyo: University of Tokyo Press, 1972, 63-68.
- [7] Momose A. Demonstration of phase-contrast X-ray computed tomography using an X-ray interferometer[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 1995, **352**(3): 622-628.
- [8] Chapman D, Thomlinson W, Johnston R E, et al. Diffraction enhanced X-ray imaging[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1997, **42**(11): 2015-2025.
- [9] Dilmanian F A, Zhong Z, Ren B, et al. Computed tomography of X-ray index of refraction using the diffraction enhanced imaging method[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2000, **45**(4): 933-946.
- [10] Pfeiffer F, Weitkamp T, Bunk O, et al. Phase retrieval and differential phase-contrast imaging with low-brilliance X-ray sources[J]. *Nature Physics*, 2006, **2**(4): 258-261.
- [11] Momose A, Yashiro W, Takeda Y, et al. Phase tomography by X-ray talbot interferometry for biological imaging[J]. *Japanese of Applied Physics*, 2006, **45**(6A): 5254-5262.
- [12] Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation [J]. *Optics Communications*, 1997, **133**(1): 339-346.
- [13] Barty A, Nugent K A, Roberts A, et al. Quantitative phase tomography[J]. *Optics Communication*, 2000, **175**(4): 329-336.
- [14] Gureyev T E, Raven C, Snigirev A, et al. Hard X-ray quantitative non-interferometric phase-contrast microscopy[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1999, **32**(5): 563-567.
- [15] Jonas P, Louis A K. Phase contrast tomography using holographic measurements[J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**(1): 75-102.
- [16] Bronnikov A V. Theory of quantitative phase-contrast computed tomography[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, **19**(3): 472-480.
- [17] Born M, Wolf E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [18] Gureyev T E, Wilkins S W. On X-ray phase imaging with a point source[J]. *Journal of the Optical*

- Society of America A, 1998, **15**(3): 579-585.
- [19] Als-Nielsen J, McMorrow D. Elements of Modern X-Ray Physics [M]. New York: Wiley, 2001.
- [20] Wu X, Deans A E, Liu H. X-ray diagnostic techniques [A]. In: Vø Dnh T, Ed. Biomedical Photonics Handbook [C]. Tampa: CRC Press, 2003, 26. 1-26. 34.
- [21] Gureyev T E, Pogany A, Paganin D M, et al. Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region [J]. Optics Communications, 2004, **231**(1/6): 53-70.
- [22] Huntley J M. Noise-immune phase unwrapping algorithm [J]. Applied Optics, 1989, **28**(15): 3268-3270.
- [23] Kak A C, Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging [M]. New York: IEEE Press, 1988.
- [24] Kaipio J, Somersalo E. Statistical and Computational Inverse Problems [M]. New York: Springer, 2005.

## An Algorithm for Phase Contrast X-ray Tomography Based on the Nonlinear Phase Retrieval

NI Wen lei, ZHOU Tie

(LMAM, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

**Abstract:** A new algorithm for phase contrast X-ray tomography under holographic measurement was proposed. The main idea of the algorithm was to solve the nonlinear phase retrieval problem using the Newton iterative method. The linear equations for the Newton directions were proved to be ill-posed and the regularized solutions were obtained by the conjugate gradient method. Some numerical experiments with computer simulated data were presented. The efficiency, feasibility and the numerical stability of the algorithm were illustrated by the numerical experiments. Compared with the results produced by the linearized phase retrieval algorithm, it can be seen that the new algorithm is not limited to be only efficient for the data measured in the near-field of the Fresnel region and thus it has a broader validity range.

**Key words:** phase contrast tomography; holographic measurement; phaseretrieval