

在动载荷作用下框架结构大变形分析的微分代数方法*

胡育佳¹, 朱媛媛², 程昌钧¹

(1. 上海大学 理学院; 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海师范大学 计算机科学与技术系, 上海 200234)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 采用弧坐标首先建立了在动载荷作用下, 具有不连续性条件和初始位移的框架结构大变形分析的非线性数学模型. 其次, 在空间区域内, 采用微分求积单元法(DQEM)来离散非线性数学模型, 并提出了在使用 DQEM 来求解结构大变形分析中, 多个变量具有间断性条件的有效方法, 得到了一组非线性 DQEM 的离散化方程, 它是时间域内的一组具有奇异性的非线性微分-代数方程. 同时也给出了求解非线性微分-代数方程组的一个解法. 作为应用, 求解了受集中力和分布力作用的框架和组合框架的大变形静动力学问题, 并与现有结果进行了比较. 数值算例表明, 处理多个变量具有间断性条件的方法和求解代数-微分系统的方法是一个有效的和一般的方法, 它具有较少的节点、较小的计算工作量、较高的精度、良好的收敛性、操作简单以及应用广泛等优点.

关键词: 框架结构; 大变形; 间断性条件; 微分求积单元法(DQEM); 微分-代数系统

中图分类号: O344.3 **文献标识码:** A

引 言

框架是工程中应用非常广泛的一大类结构. 近十年来, 随着微机械的迅速发展和广泛使用, 梁和框架结构大变形分析越来越受到工程技术人员和研究人员的关注. 简单梁和框架的静态大变形分析, 已有一些成果. 早期的研究多采用了椭圆积分的方法, 例如, Mattiasson^[1]研究了梁和框架的大变形; Jenkins 等人^[2]研究了铰接固定方形框架的大变形; Kerr^[3]研究了方形框架在对边中点受一对集中力作用的挠度和弯矩. 相应的数值结果可以在陈至达的专著^[4]中找到. 这些工作的优点是给出了问题的解析解, 但在工程中, 组合框架结构的应用是更为广泛的, 而且框架中每一个结构元件的材料、几何尺寸与受力等均可能不同, 所以采用这些成果来分析组合框架的大变形是困难的. 有限单元法(FEM)仍是结构分析中普遍采用的方法, 但是对于这类大变形问题, 为了提高精度, 不得不增加节点, 这又大大地增加了计算工作量. 本文的第 1 个目的是试图采用一种新的、更为简便、精度高的数值方法——微分求积单元法

* 收稿日期: 2007-09-10; 修订日期: 2008-02-19

基金项目: 上海市浦江人才计划项目资助(07pj14073); 上海市重点学科建设项目资助(Y0103)

作者简介: 胡育佳(1979—), 男, 上海人, 博士;

程昌钧, 教授(联系人, Tel: + 86-21-56331454; E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn).

(DQEM), 来计算和分析框架结构在静态与动态情况下的大变形. 这种方法兼有微分求积方法(DQM)和有限单元法(FEM)的特点, 它不仅包括了单元的离散化控制方程, 也包括了结构的整体性质.

1971年和1972年, Bellman和Casti等人^[5-6]提出了微分求积方法(DQM), 目前, 已经应用于许多领域^[7]. Bert等人^[7]首先将其应用于结构力学. 然而, 传统的DQM在处理非规则区域和具有间断性(包括材料、载荷、几何、分界面等)的问题时遇到一些困难. 在小变形条件下, Striz等人^[8-11]推广DQM为DQEM来处理了单元之间的连接条件; 聂国隽、仲政^[12]应用DQEM于变截面门式框架结构的分析, 给出了处理接点条件的一种直观的方法. 这些方法的优点是物理概念明确, 在小变形条件下能够给出比较好的结果. 遗憾的是, 对于多个变量具有间断性条件的结构大变形分析则存在一定的局限性. 本文的第2个目的是发展一个有效的和一般的方法来求解多个变量具有不同类型的间断性条件的结构大变形分析, 使DQEM的应用更具有广泛性. 为了简洁和明了起见, 在数学模型的建立与方法的叙述中, 我们只采用了2个单元, 实际上, 它们可以适用于任何平面组合框架结构的大变形分析, 只不过是表述稍微麻烦而已. 虽然如此, 我们将看到, 当利用DQEM对初-边值问题进行空间区域的离散后, 得到的是时间域内的一组具有奇异性的非线性微分-代数方程, 得到它的解是困难的. 本文的第3个目的是提供一种求解非线性微分-代数方程组的方法, 以便最终得到问题的解.

1 问题的数学描述

图1为平面框架结构的坐标系和一个结构元件微元体的受力图. 设 s 是沿该元件轴向的弧长, 并在 $s = l^*$ 处与框架结构中的另一个元件相连接, 因此在 $s = l^*$ 处框架具有间断性. 不失一般性, 设框架结构被分成为2单元, 其中第1个单元位于 $0 \leq s \leq l_1$, 第2个单元位于 $l_1 \leq s \leq l$, 显然 $l_1 = l^*$ 是接点. 假设结构在 x - 和 y - 方向的初始位移分别为 $w_0(s)$ 和 $u_0(s)$, 则其初始构形为 $\Gamma_0: \{(x, y) | x = w_0(s), y = s + u_0(s), l_{j-1} \leq s \leq l_j\}$, 其中, $j = 1, 2$ 为单元数, 当 $j = 1, l_0 = 0$; 当 $j = 2, l_2 = l, l$ 是结构的长度. 在附加荷载作用下, 时刻 t , 初始构形 Γ_0 中一点 $C(w_0, s + u_0)$ 移动到点 $C'(w_0 + w, s + u_0 + u)$ 处, 则变形后结构的构形为 $\Gamma: \{(x, y) | x = w_0(s) + w(s, t), y = s + u_0(s) + u(s, t), l_{j-1} \leq s \leq l_j\}$, 式中, $w(s, t)$ 和 $u(s, t)$ 为 t 时刻点 $C(w_0, s + u_0)$ 沿 x - 和 y - 方向的位移.

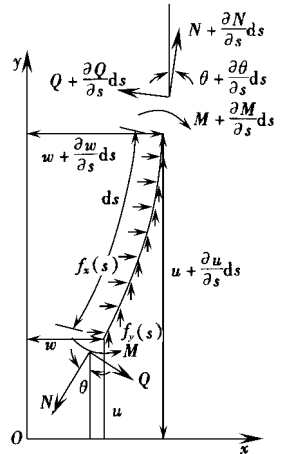


图1 微元段的受力图

引入如下无量纲参数和变量:

$$\begin{cases} S = \frac{s}{l}, L^* = \frac{l^*}{l}, T = \frac{t}{\Delta t}, W = \frac{w}{l}, U = \frac{u}{l}, P = \frac{\rho l^2}{EI}, F = \frac{f l^2}{EI}, \\ \kappa = \frac{EA l^2}{EI}, \lambda_1 = \frac{N l^2}{EI}, \lambda_2 = \frac{Q l^2}{EI}, \lambda_3 = \frac{M l}{EI}, F_x = \frac{f_x l^2}{EI}, F_y = \frac{f_y l^2}{EI}, \\ \lambda_3 = \frac{M l}{EI}, F_x = \frac{f_x l^2}{EI}, F_y = \frac{f_y l^2}{EI}, \rho = \frac{\rho l^2}{EI \Delta t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, M, N, Q 为截面的弯矩、轴力和剪力, f_x, f_y 为沿 x - 和 y - 方向的载荷, ρ 是单位长度的质量; EI, EA 分别为抗弯和抗拉刚度. 另外, M, f_x, f_y 是作用在接点 $l_1 = l^*$ 处的集中力矩和集

中力, p, f 是作用在结构端部的竖向集中力和水平集中力. 一般情况下, 这些给定的力都是动态的.

令 $\theta(S, T)$ 为时刻 T , C' 点处的轴线与 y - 轴之间的夹角. 这样, 未知变量 $W, U, \theta, \lambda_1, \lambda_2$ 和 λ_3 都是弧坐标 S 和时间 T 的函数. 对于单元 j , 容易得到未知变量满足的无量纲形式的几何关系和运动微分方程

$$\begin{cases} U^{(j)'} = R^{(j)} \cos \theta^{(j)} - \cos(\theta_0^{(j)}), & W^{(j)'} = R^{(j)} \sin \theta^{(j)} - \sin(\theta_0^{(j)}), \\ \frac{\partial}{\partial S}(\lambda_1^{(j)} \sin \theta^{(j)}) - \frac{\partial}{\partial S}(\lambda_2^{(j)} \cos \theta^{(j)}) + F_x^{(j)} = \rho \dot{W}, \\ \frac{\partial}{\partial S}(\lambda_1^{(j)} \cos \theta^{(j)}) + \frac{\partial}{\partial S}(\lambda_2^{(j)} \sin \theta^{(j)}) + F_y^{(j)} = \rho \dot{U}, \\ \frac{\partial \lambda_3^{(j)}}{\partial S} - \lambda_3^{(j)} = 0, & \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial S} + \frac{\partial \theta_0^{(j)}}{\partial S} - \lambda_3^{(j)} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\theta_0^{(j)}$ 为单元 j 的初始转角, $R^{(j)} = 1 + \lambda_1^{(j)}/K$, 并且 $L_{j-1} \leq S \leq L_j$, 当 $j = 1, L_0 = 0$, 当 $j = 2, L_2 = L = 1$. 方程组(2)的第1,2个方程为几何关系, 第3,4个方程为运动微分方程, 第5,6个方程为内力之间的关系. 并且 $(\dot{\cdot}) = \partial^2/\partial T^2$.

为了一般起见, 在接点(或者接头) $S = L^*$ 处, 假设位移是连续的, 其他量均可能存在间断性, 于是有下面的无量纲形式的连续性条件和间断性条件:

$$U^{(1)}(L^*) = U^{(2)}(L^*), \quad W^{(1)}(L^*) = W^{(2)}(L^*), \quad (3a)$$

$$\theta^{(2)}(L^*) = \theta^{(1)}(L^*) + \Delta\theta, \quad \lambda_3^{(2)}(L^*) = \lambda_3^{(1)}(L^*) + \lambda_3, \quad (3b, c)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta^{(1)}(L^*)) & -\cos(\theta^{(1)}(L^*)) \\ \cos(\theta^{(1)}(L^*)) & \sin(\theta^{(1)}(L^*)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1^{(1)}(L^*) \\ \lambda_2^{(1)}(L^*) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta^{(2)}(L^*)) & -\cos(\theta^{(2)}(L^*)) \\ \cos(\theta^{(2)}(L^*)) & \sin(\theta^{(2)}(L^*)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1^{(2)}(L^*) \\ \lambda_2^{(2)}(L^*) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}. \quad (3d)$$

条件(3a)表示接头 $S = L^*$ 处位移的连续性条件, 条件(3b)是转角的间断性条件, 条件(3c)和(3d)是弯矩和沿 x - 和 y - 方向的力的间断性条件. 其中 $\Delta\theta$ 为接头处两单元的转角差(图2), F_x, F_y 和 λ_3 分别为接头处沿 x - 和 y - 方向的作用集中载荷和力矩.

因此, 问题归结为在适当的边界条件和初始条件下求解无量纲形式的非线性微分方程组(2)、接头 $S = L^*$ 处的连续性条件和间断性条件(3), 以便得到

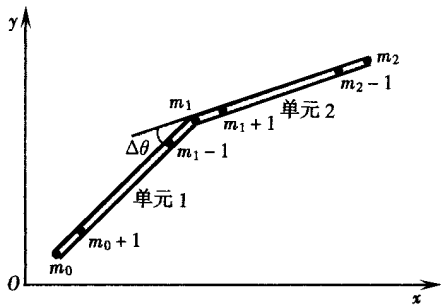


图2 结构布点

位移、转角和内力.

2 微分求积法的基本公式^[6]

显然, 得到该问题的解析解或者半解析解都是非常困难的, 本文拟采用微分求积单元法(DQEM)来求该问题的数值解. 为了便于读者阅读和不致引起符号的混乱, 这里仍然简洁地给出必要的公式.

考察在区间 $0 \leq x \leq a$ 内的函数 $\phi(x)$. 设在区间 $0 \leq x \leq a$ 内布置 N_x 个节点, 由DQM, 函数 $\phi(x)$ 在节点 $x = x_i$ 处对自变量 x 的 r - 阶偏导数可近似表达为

$$\left. \frac{\partial^r \phi}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} \phi_j, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (4)$$

式中, $\phi_j = \phi(x_j)$ 和 $A_{ij}^{(r)}$ 是相应节点上的函数值和权系数. 其矩阵形式为

$$\phi_x^{(r)} = A^{(r)} \phi_j, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

ϕ_j 和 $\phi_x^{(r)}$ 分别是 $\phi(x)$ 和它的 r 阶的导数在节点 $x = x_j (j = 1, 2, \dots, N_x)$ 处的值组成的列向量, $A^{(r)}$ 是 r 阶权系数的 $N_x \times N_x$ 阶矩阵. 由此, 得到权系数矩阵的递推关系

$$A^{(r)} = A^{(1)} A^{(r-1)} = A^{(r-1)} A^{(1)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6)$$

因此, 只要求得一阶权系数矩阵 $A^{(1)}$, 更高阶的权系数矩阵可以通过式(6)得到.

本文采用多项式作为试函数, 所以 1 阶权系数矩阵的非对角元素可表示为

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k) \Pi(x_k)}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N_x \text{ 且 } k \neq i, \quad (7)$$

$$\text{式中 } \Pi(x_i) = \Pi(x_i - xv), \quad v = 1, 2, \dots, N_x \text{ 且 } v \neq i, \quad (8)$$

2 阶和高阶权系数矩阵的非对角元素可由递推公式得到

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[A_{ik}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right], \quad i, k = 1, 2, \dots, N_x \text{ 且 } k \neq i, \quad 2 \leq r \leq (N_x - 1). \quad (9)$$

同时, 权系数矩阵的对角元素为

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N A_{iv}^{(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x; \quad 1 \leq r \leq (N_x - 1). \quad (10)$$

本文中, 如果没有特别的声明, 令 $A_{ij} = A_{ij}^{(1)}$, $i, j = 1, 2, \dots, N_x$.

3 DQEM 的空间离散化方程与连接条件的处理

3.1 控制方程的 DQEM 离散化形式

在利用 DQEM 来分析结构的大变形时, 关键问题是如何处理接头 $S = L^*$ 处的连续性条件和间断性条件, 即公式(3). 本文中我们将提出一个处理接点条件的一般性方法. 首先, 对整个结构进行统一布点和编号(包括接点), 即, $i = m_0, m_0 + 1, \dots, m_1 - 1, m_1, m_1 + 1, \dots, m_2 - 1, m_2$; 这里, m_1 是连接点 $S = L^*$, m_2 是结构的布点总数. 然后, 对每个单元的控制方程采用 DQM 进行离散; 再采用适当的公式和方法处理接头 $S = L^*$ 处的连接条件和间断性条件.

注意到对每一个非连接点 $i \neq m_1$ 有 6 个未知量, 即 $\theta_i, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, U_i, W_i, \lambda_{3i}$, 但是, 在接点 $i = m_1$ 处有 10 个未知量, 即 $\theta_{m_1}^{(1)}, \theta_{m_1}^{(2)}, \lambda_{m_1}^{(1)}, \lambda_{m_1}^{(2)}, \lambda_{2m_1}^{(1)}, \lambda_{2m_1}^{(2)}, \lambda_{3m_1}^{(1)}, \lambda_{3m_1}^{(2)}, U_{m_1}^{(1)} = U_{m_1}^{(2)}, W_{m_1}^{(1)} = W_{m_1}^{(2)}$. 这样, 对单元 j 非线性方程组(2)的 DQM 的离散化形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} U_{\eta}^{(j)} = R_i^{(j)} \cos \theta_i^{(j)} - \cos(\theta_0^{(j)}), \quad \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} W_{\eta}^{(j)} = R_i^{(j)} \sin \theta_i^{(j)} - \sin(\theta_0^{(j)}), \\ \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \lambda_{1\eta}^{(j)} \sin \theta_{\eta}^{(j)} - \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \lambda_{2\eta}^{(j)} \cos \theta_{\eta}^{(j)} + F_{xi}^{(j)} = \rho \dot{W}_i, \\ \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \lambda_{1\eta}^{(j)} \cos \theta_{\eta}^{(j)} + \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \lambda_{2\eta}^{(j)} \sin \theta_{\eta}^{(j)} + F_{yi}^{(j)} = \rho \dot{U}_i, \\ \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \lambda_{3\eta}^{(j)} - \lambda_{3i}^{(j)} = 0, \quad \sum_{\eta=m_{j-1}}^{m_j} A_{i\eta}^{(j)} \theta_{\eta}^{(j)} + \theta_0^{(j)'} - \lambda_{3i}^{(j)} = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

其中, $R_j^{(j)} = 1 + \lambda_i^{(j)}/K$, 上标 (j) 表示与单元有关的量, 且 $j = 1, 2$. 为了处理边界条件, 当单元 $j = 1$ 时, 在式(11)中, 有 $i = m_0, m_0 + 1, \dots, m_1 - 1$, 并且 $m_0 = 1$; 当单元 $j = 2$ 时, 在式(11)中, 有 $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$.

3.2 连接条件和间断性条件的处理

运用 DQEM 来求解具有接头的结构力学问题的关键, 在于正确地处理单元之间的连续性条件与间断性条件, 虽然在小变形条件下已经提出了一些相关的方法, 例如文献[8-12], 但是对于非线性问题, 特别是多个变量具有间断性条件的非线性问题, 这些方法的应用却受到一定的限制. 在本文中, 我们将提出一种处理含有多个变量具有间断性条件的结构大变形分析中的方法, 将看到这个方法数学严谨, 不仅具有一般性, 而且操作方便, 精度高.

由连接点 m_1 处剪力和轴力的间断性条件, 我们有 x - 和 y - 方向的力的间断性条件

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_{m_1}^{(2)}) & -\cos(\theta_{m_1}^{(2)}) \\ \cos(\theta_{m_1}^{(2)}) & \sin(\theta_{m_1}^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{m_1}^{(2)} \\ \lambda_{2m_1}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{m_1}^{(1)}) & -\cos(\theta_{m_1}^{(1)}) \\ \cos(\theta_{m_1}^{(1)}) & \sin(\theta_{m_1}^{(1)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{m_1}^{(1)} \\ \lambda_{2m_1}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}; \quad (12a)$$

接点 m_1 处弯矩的间断性条件为

$$\lambda_{3m_1}^{(2)} = \lambda_{3m_1}^{(1)} + \lambda_3, \quad (12b)$$

其中

$$\lambda_{2m_1}^{(1)} = \sum_{\eta=m_0}^{m_1} A_{m_1\eta}^{(1)} \lambda_{3\eta}^{(1)}, \quad \lambda_{2m_1}^{(2)} = \sum_{\eta=m_1}^{m_2} A_{m_1\eta}^{(2)} \lambda_{3\eta}^{(2)}, \quad \lambda_{3m_1}^{(1)} = \sum_{\eta=m_0}^{m_1} A_{m_1\eta}^{(1)} \theta_{\eta}^{(1)}; \quad (12c)$$

连接点 m_1 处转角的连接条件为

$$\theta_{m_1}^{(2)} = \theta_{m_1}^{(1)} + \Delta\theta; \quad (12d)$$

同时, 由连接点 m_1 处的位移连续性条件有

$$\begin{cases} \sum_{\eta=m_0}^{m_1} A_{m_1\eta}^{(1)} U_{\eta}^{(1)} = R_{m_1}^{(1)} \cos\theta_{m_1}^{(1)} - \cos(\theta_0^{(1)}), \\ \sum_{\eta=m_0}^{m_1} A_{m_1\eta}^{(1)} W_{\eta}^{(1)} = R_{m_1}^{(1)} \sin\theta_{m_1}^{(1)} - \sin(\theta_0^{(1)}), \end{cases} \quad (12e)$$

$$\begin{cases} \sum_{\eta=m_1}^{m_2} A_{m_1\eta}^{(2)} U_{\eta}^{(2)} = R_{m_1}^{(2)} \cos\theta_{m_1}^{(2)} - \cos(\theta_0^{(2)}), \\ \sum_{\eta=m_1}^{m_2} A_{m_1\eta}^{(2)} W_{\eta}^{(2)} = R_{m_1}^{(2)} \sin\theta_{m_1}^{(2)} - \sin(\theta_0^{(2)}), \end{cases} \quad (12f)$$

其中, $R_{m_1}^{(1)} = 1 + \lambda_{m_1}^{(1)}/K$, $R_{m_1}^{(2)} = 1 + \lambda_{m_1}^{(2)}/K$. 应该说明的是, 由于采用了统一布点的方法, 所以连接点 m_1 处实际上只需 10 个条件就可以了, 另外的条件是自动满足的, 因此, (12e) 和 (12f) 中只需要取 3 个条件即可.

3.3 边界条件的处理

对于由图 4 所示的计算模型(对其他的边界条件提法是类似的), 有边界条件

$$\begin{cases} U_{m_0}^{(1)} = 0, \quad \theta_{m_0}^{(1)} = 0, \quad \lambda_{m_0}^{(1)} \sin\theta_{m_0}^{(1)} - \lambda_{2m_0}^{(1)} \cos\theta_{m_0}^{(1)} = 0, \\ W_{m_2}^{(2)} = 0, \quad \theta_{m_2}^{(2)} = 0, \quad \lambda_{m_2}^{(2)} \cos\theta_{m_2}^{(2)} + \lambda_{2m_2}^{(2)} \sin\theta_{m_2}^{(2)} = P. \end{cases} \quad (13)$$

这样, 离散化的非线性方程组(11), 连接条件(12)和边界条件(13)构成了求解具有弹性接头和

初始位移的结构大变形分析的空间 DQEM 离散化形式.

4 非线性微分-代数方程组的求解

在本文中, 我们采用 Chebyshev 多项式的零点作为每个单元的取样点^[7]. 对于静力学问题, 忽略方程(11)中惯性项的影响, 运用 Newton-Raphson 迭代方法直接求解离散化的非线性方程组(11)~(13), 可以得到结构在每个节点处的无量纲位移和内力. 但是, 对于动力学问题, 方程组(11)~(13)是一组非线性微分-代数方程组, 它的求解是比较困难的. 为了方便起见, 我们将其写成如下的矩阵形式:

$$A \frac{d^2 V}{dT^2} + H(T, X, V) = 0, \quad (14)$$

其中, $V = [\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, U, \tilde{W}]^T$ 是一个未知矢量, 它集合了所有要求的未知量在离散点处的值, 即, 所有的 $\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, U, \tilde{W}$ 等集合了所有要求的未知量在离散点的值构成的子-矢量. 矩阵 $A = \text{diag}\{m_0, m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, m_{\lambda_3}, m_U, m_{\tilde{W}}\}$ 为所有未知量的关于时间 T 的导数项的系数构成的矩阵, 其中, 子-矩阵 $m_U, m_{\tilde{W}}$ 是单位矩阵, 因为 $\dot{U}, \dot{\tilde{W}}$ 的系数为 1, 子-矩阵 $m_0, m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, m_{\lambda_3}$ 为零矩阵, 因为变量 $\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不含对时间 T 的导数项(参看式(11), 也参看式(2)). 所以, A 是一个奇异矩阵. H 为一矢量, 它集合了各未知量的代数函数在空间离散点处的值. 由于 A 是一个奇异矩阵, 因而微分-代数方程(14)是一个具有奇异性的非线性动力系统. 这意味着需要采用隐式算法进行时间域内的积分, 时间导数采用二阶向后差分格式进行逼近, 故有迭代格式如下:

$$A \left[\frac{9}{4} V^n - 3 V^{n-1} + \frac{3}{4} V^{n-2} - 2 \dot{V}^{n-1} + \frac{1}{2} \ddot{V}^{n-2} \right] + H(T_n, X, V^n) = 0, \quad (15)$$

其中 $\dot{V}^n = \frac{3}{2} V^n - 2 V^{n-1} + \frac{1}{2} V^{n-2}$,

上标 n 表示未知量矢量在当前时刻 T_n 的值. 这样原系统(14)的求解转化为非线性代数方程(15)的求解, 运用 Newton-Raphson 迭代方法, 可以求得未知量矢量 V^n .

5 数值算例

作为前面理论和方法的应用, 我们计算和分析了两类框架结构, 即简单框架和组合框架的大变形.

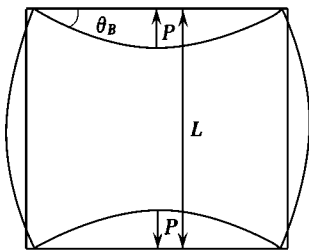


图3 方型框架模型

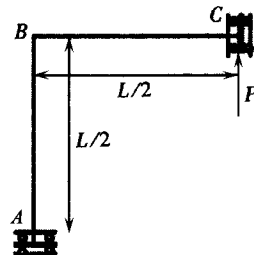
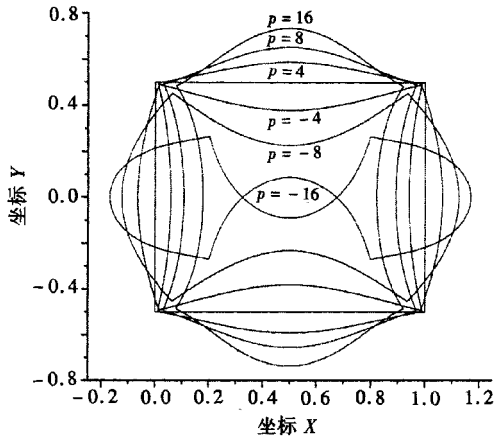


图4 计算模型

图5 框架构型随载荷 P 的变化

5.1 固定方形框架的大变形分析

5.1.1 静力学分析

固定方形框架的物理模型如图3所示,并且跨度 $L = 1$, 利用对称性, 其计算模型为图4. 在该计算模型中, 有1个刚性接头 B , 因此结构有2个单元, 其初始转角分别为 $\theta_0^{(1)} = 0$, $\theta_0^{(2)} = \pi/2$. 同时给定 $R(S) = 1$, 表示轴向是不可压的. 表1给出了方形框架点 A 、 B 、 C 处的挠度和转角, 并与文献[5]中的结果进行了比较, 它们是一致的. 在图5中给出了方形框架变形后的构形随力 P 的变化.

5.1.2 动力学分析

物理模型与计算模型同上. 设无量纲外载荷 $P = 12 \times \sin(100\Delta t \times \tau)$, 取 $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ s, $\rho = 1.3 \times 10^{-5} / \Delta t^2$, 并取初值为0. 图6~图9分别为 C 点的时程曲线、相图、幅频响应和Poincaré映射图. 可以看到, 固定方框在外载荷 P 的作用下具有明显的次振动, 振动是拟周期的、有界的.

表1 点 A 、 B 、 C 处的位移和转角

方法	P	W_A	U_C	θ_B	P	W_A	U_C	θ_B
文献[5]		0.058 50	0.089 45	0.210 82	-0.064 3	-0.120 13	0.291 99	
每单元 11 节点	4.0	0.058 496 96	0.089 445 42	0.210 819 17	-4.0	-0.064 251 11	-0.120 125 2	0.291 987 72
每单元 21 节点		0.058 496 90	0.089 445 35	0.210 818 97	-0.064 251 06	-0.120 125 1	0.291 987 47	
文献[5]		0.107 27	0.154 17	0.356 58	-0.124 3	-0.270 44	0.654 86	
每单元 11 节点	8.0	0.107 268 75	0.154 168 66	0.356 586 67	-8.0	-0.124 268 54	-0.270 440 3	0.654 871 43
每单元 21 节点		0.107 266 98	0.154 167 12	0.356 581 78	-0.124 267 71	-0.270 437 1	0.654 862 81	
文献[5]		0.127 98	0.179 59	0.411 56	-0.147 41	-0.353 32	0.846 27	
每单元 11 节点	10.0	0.127 979 75	0.179 586 76	0.411 568 64	-10.0	-0.147 413 9	-0.353 333 0	0.846 290 35
每单元 21 节点		0.127 975 05	0.179 583 00	0.411 556 42	-0.147 412 8	-0.353 324 1	0.846 266 75	
文献[5]		0.146 50	0.201 44	0.457 52	-0.162 80	-0.436 70	1.029 92	
每单元 11 节点	12.0	0.146 499 34	0.201 444 33	0.457 541 92	-12.0	-0.162 806 7	-0.436 712 7	1.029 964 15
每单元 21 节点		0.146 489 58	0.201 437 06	0.457 517 80	-0.162 806 9	-0.436 694 9	1.029 916 94	
文献[5]		0.163 07	0.220 38	0.496 18	-0.169 59	-0.516 15	1.196 56	
每单元 11 节点	14.0	0.163 069 75	0.220 375 77	0.496 222 02	-14.0	-0.169 597 7	-0.516 177 1	1.196 632 00
每单元 21 节点		0.163 052 68	0.220 363 85	0.496 181 68	-0.169 602 3	-0.516 148 9	1.196 555 60	
文献[5]		0.177 93	0.236 89	0.528 92	-0.168 77	-0.588 51	1.341 81	
每单元 11 节点	16.0	0.177 928 77	0.236 893 34	0.528 982 32	-16.0	-0.168 758 1	-0.516 173 9	1.341 915 49
每单元 21 节点		0.177 902 51	0.236 876 05	0.528 922 70	-0.168 770 1	-0.588 514 69	1.341 807 71	

5.2 组合框架的大变形分析

5.2.1 静力学分析

组合框架结构的物理模型如图10所示, 框架结构受到无量纲水平集中力 F 、竖向集中力

P 及均布力 q 的作用. 有 6 个自然单元(图 10), 其初始转角分别为 $\theta_0^{(1)} = 0, \theta_0^{(2)} = 0, \theta_0^{(3)} = \pi/2, \theta_0^{(4)} = \pi/2, \theta_0^{(5)} = \pi, \theta_0^{(6)} = \pi, R(S) = 1$. 图 11 示出了 4 种载荷情况下框架结构的构形, 即, 情况 1: $F = 1, q = 0, P = 0$; 情况 2: $F = 1, q = 0.1, P = 1$; 情况 3: $F = 1.5, q = 0.1, P = 1$; 情况 4: $F = 2, q = 0.1, P = 1$. 表 2 给出了在不同载荷情况下, 接点 1、3 处的水平位移, 和接点 5、6 处的支撑反作用力. 可以看到, 在保证精度的情况下, 单元的布点数对框架结构力学特性的影响很小.

表 2 所布节点数对框架结构力学特性的影响

布点	载荷类型	W_3	W_1	$\lambda_{1,5}$	$\lambda_{2,5}$	$\lambda_{3,5}$	$\lambda_{4,6}$	$\lambda_{2,6}$	$\lambda_{3,6}$
11 节点 17 节点	1	0.252 663	0.474 184	3.495 283	-3.052 065	1.279 319	-3.495 283	-0.947 933	-1.028 432
		0.252 664	0.474 184	3.495 296	-3.052 077	1.279 322	-3.495 296	-0.947 922	-1.028 428
11 节点 17 节点	2	0.348 877	0.644 762	2.481 528	-4.066 296	1.782 575	-7.081 528	0.066 297 1	-1.268 244
		0.348 884	0.644 771	2.481 621	-4.066 443	1.782 620	-7.081 621	0.066 444 3	-1.268 210
11 节点 17 节点	3	0.465 653	0.870 076	4.422 147	-7.168 436	2.613 962	-9.022 147	1.168 935 0	-1.578 455
		0.465 671	0.870 100	4.422 371	-7.169 004	2.614 107	-9.022 371	1.169 504 4	-1.578 315
11 节点 17 节点	4	0.551 065	1.041 361	6.075 128	-10.634 33	3.373 796	-10.675 13	2.636 715 7	-1.729 815
		0.551 090	1.041 401	6.075 135	-10.635 16	3.374 009	-10.675 14	2.637 555 7	-1.729 577

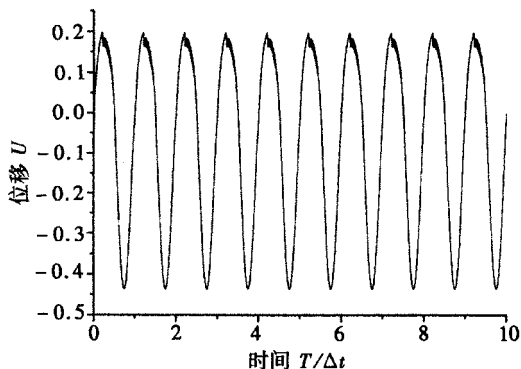


图 6 C 点的时程曲线

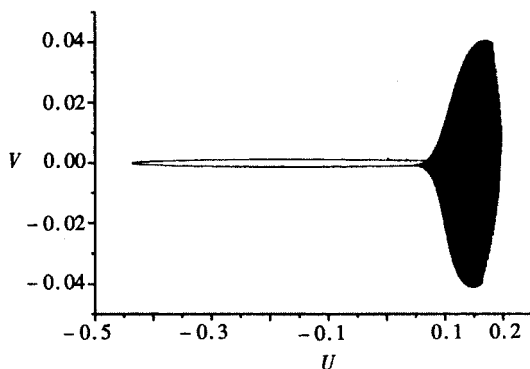


图 7 C 点的相图

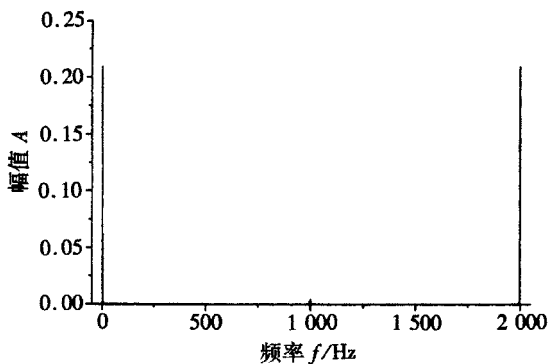


图 8 C 点的功率谱

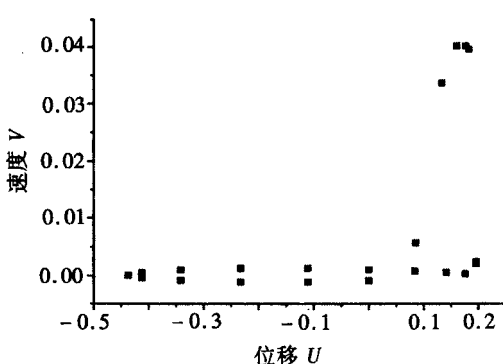


图 9 C 点的 Poincaré 截面

5.2.2 动力学分析

物理模型仍为图 10, 令 $q = 0.1, P = 1, F = 1 + 1 \times \sin(100\Delta t \times \tau)$, 为了比较时间步长对

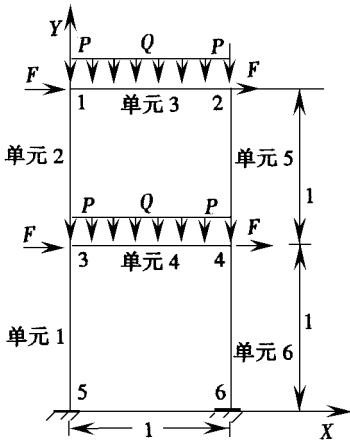


图 10 组合框架模型

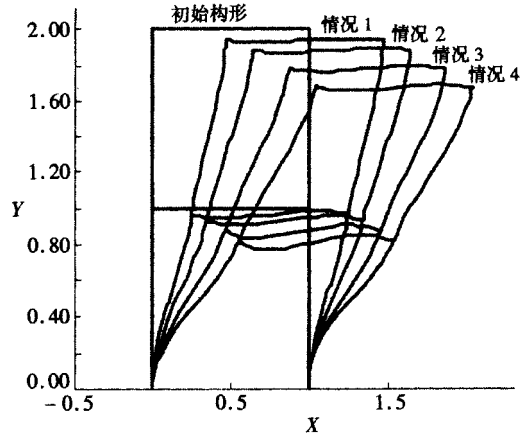


图 11 不同载荷情况下框架的构形

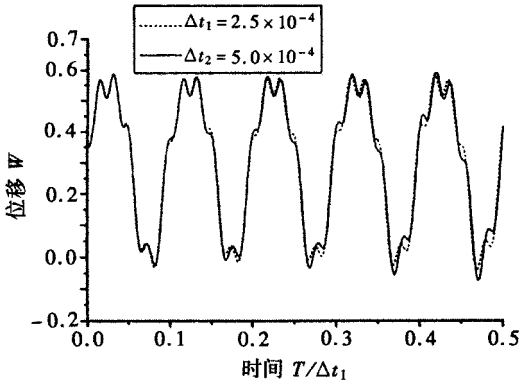


图 12 点 3 处水平位移 W 随时间的变化

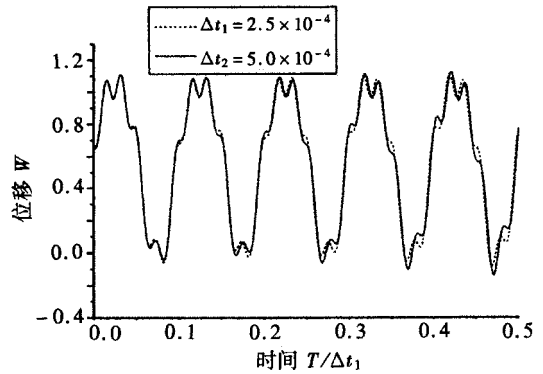


图 13 点 1 处水平位移 W 随时间的变化

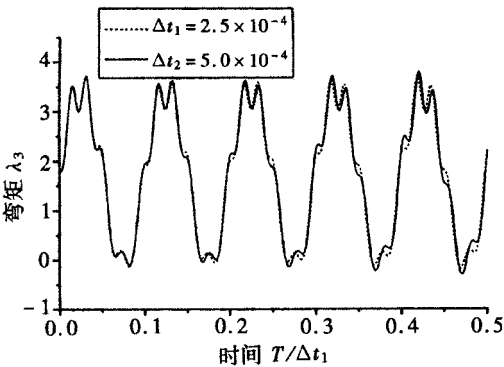


图 14 点 5 处弯矩随时间的变化

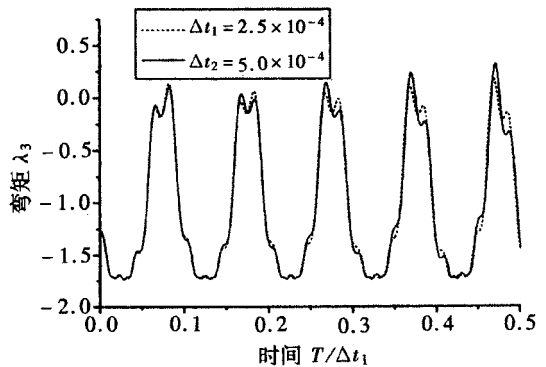


图 15 点 6 处弯矩随时间的变化

数值结果的影响, 分别取 $\Delta t = \Delta t_1 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$ 和 $\Delta t = \Delta t_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$, $\rho = 2 \times 10^{-5} / \Delta t^2$, 并取载荷 $q = 0.1, P = F = 1$ 时的静态计算结果为初值. 图 12 和图 13 是接点 3 和 1 处的水平位移 W 随时间的变化, 图 14~ 图 19 是接点 5 和 6 处的反作用力随时间的变化. 并且从图中我们可以看出时间步长对数值结果的影响是比较小的, 能够保证数值结果的稳定.

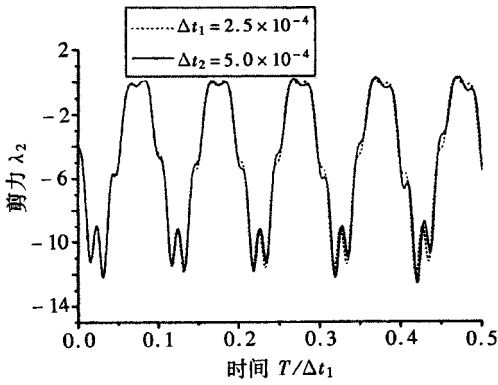


图 16 点 5 处剪力随时间的变化

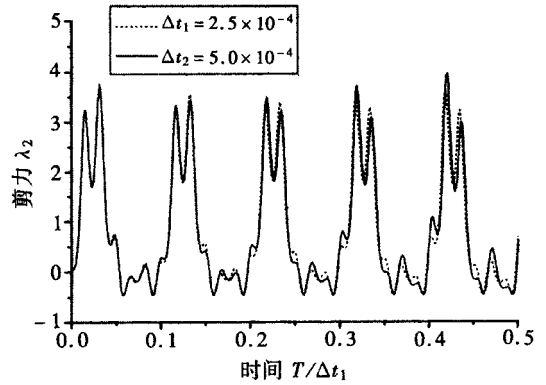


图 17 点 6 处剪力随时间的变化

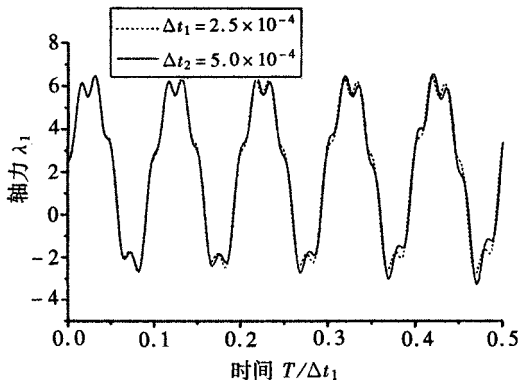


图 18 点 5 处轴力随时间的变化

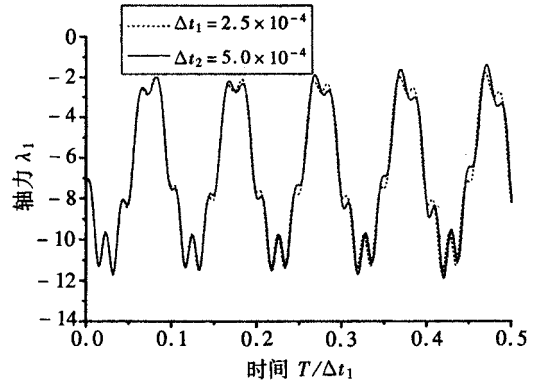


图 19 点 6 处轴力随时间的变化

6 结 论

本文采用弧长坐标, 首先建立了具有间断性条件的结构大变形分析的非线性静动力学问题的数学模型, 其中包括未知位移、转角、弯矩、轴力和剪力满足的是一组非线性偏微分方程、连接条件、适当的边界条件和初始条件. 其次在空间域内采用微分求积单元方法(DQEM)对非线性数学模型进行了离散, 提出了在运用DQEM来求解具有多个变量的结构大变形分析时, 处理接点处连接条件和间断性条件的一般方法, 从而得到一组DQEM离散化的方程, 它是时间域内具有奇异性的一组非线性微分-代数方程. 最后, 在时间域内采用二阶向后隐式差分离散非线性微分-代数方程, 得到一组非线性代数方程组, 运用Newton-Raphson方法进行了求解. 作为应用, 给出框架和组合框架的数值算例, 与已有结果进行了比较, 它们吻合良好. 说明本文方法是正确的, 结果是可靠的. 还应该说明, 本文中提出的处理间断性条件的方法在数学上也是严谨的, 遵循处理具有间断性条件的边值问题的原则和方法.

[参 考 文 献]

- [1] Mattiasson K. Numerical results from elliptic integral solutions of some elastic problems of beams and frames[R]. Publication 79: 10. Goteborg: Department of Structural Mechanics Chalmers University of Technology, 1979.
- [2] Jenkins J A, Seitz J B, Przemieniecki J S. Large deflection of diamond-shaped frames[J]. Internat J Solids and Structures, 1966, 2(4): 591-603.

- [3] Kerr C N. Large deflection of square frames[J]. *Quart J Mech Math*, 1966, **17**(1): 23-38.
- [4] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [5] Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. *J Math Anal Appl*, 1971, **34**(2): 235-238.
- [6] Bellman R E, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations[J]. *J Comput Phys*, 1972, **10**(1): 40-52.
- [7] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 1-28.
- [8] Striz A G, Wang X, Bert C W. Harmonic differential method and applications to structure components[J]. *Acta Mechanica*, 1995, **111**(5): 85-94.
- [9] Wang X W, Wang Y L, Chen R B. Static and free vibrational analysis of rectangular plates by the differential quadrature element method[J]. *Commun Numer Methods Engrg*, 1998, **14**(12): 1133-1141.
- [10] Liu F L, Liew K M. Vibration analysis of discontinuous Mindlin plates by differential quadrature element method[J]. *Vibration and Acoustics*, 1999, **121**(2): 204-208.
- [11] Chen C N. The two-dimensional frames model of the differential quadrature element method[J]. *Computers & Structures*, 1997, **62**(3): 555-571.
- [12] 聂国隽, 仲政. 变截面门式刚架结构分析的微分求积单元法[J]. *力学季刊*, 2005, **26**(2): 198-203.

Differential-Algebraic Approach to Large Deformation Analysis of Frame Structures Subjected to Dynamic Loads

HU Yujia¹, ZHU Yuan-yuan², CHENG Chang-jun¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics;

Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Computer Science and Technology, Shanghai Normal University,
Shanghai 200234, P. R. China)

Abstract: A nonlinear mathematical model for the large deformation analysis of frame structures with discontinuity conditions as well as initial displacements subjected to the dynamic loads was first formulated by the arc-coordinate. Secondly, the differential quadrature element method (DQEM) was applied to discretize the nonlinear mathematical model in the spatial domain, and an effective method was presented to deal with discontinuity conditions of multi-variables in application of DQEM. A set of DQEM discretization equations were obtained, which are a set of nonlinear differential-algebraic equations with singularity in the temporal domain. A method to solve the nonlinear differential-algebraic equations was presented also. As application, the static and dynamical analyses of large deformation of frames and combined frame structures, subjected to the concentrated and distributed forces, were presented. The obtained results were compared with the results in existing literatures. The numerical results show that the methods of dealing with the discontinuity conditions of multi-variables and solving the differential-algebraic equations presented are effective and general, which have the advantages of little amount of nodes and computation, high precision and good convergence and so on.

Key words: frame; large deformation; discontinuity condition; differential quadrature element method (DQEM); differential-algebraic system