应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 04-0463-06

© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

多孔介质中颗粒性态分析*

哈尼·I·西亚门[1], M·H·汉丹[2]

(1. 卡塔尔大学 艺术和科学学院 数学物理系, 多哈 P. O. Box 2713, 卡塔尔;
2. 新布伦瑞克大学 数学科学系, 圣· 约翰 P. O. Box 5050, 加拿大)

(周哲玮推荐)

摘要: 分析了流经多孔介质的、充满颗粒材料的、混合液流动中的颗粒相性态. 试图建立扩散和耗散过程模型, 量化了在本征体积平均时出现的偏差项, 从而导出流动方程.

关 键 词: 多孔介质; 含尘气体; 颗粒性态
中图分类号: O357.3 文献标识码: A

引 言

已有的文献中已提出了不少模型[1-3], 来描述自由空间中气体-颗粒混合物的运动. 该研究始于Saffman 的含尘气体模型[3], 他研究了各种充满颗粒的流动.

相比之下, 含尘气体流经多孔介质的连续型模型则非常少见[4-5]. 不过已有大量文献, 集中研究了颗粒的性态和多孔结构中的悬浮流动. 由于该问题在过滤、含尘液体的分离以及通过多孔介质时溶质输送中的重要性, 推动了对多孔介质中含尘气体流动的持续性研究[6-7].

当流体流经多孔介质时, 由于流域中加入了多孔基体, 产生的结果是不同的. 多孔基体使固体有更大的表面积, 在流体无滑移的地方, 也更容易收集和捕获到尘埃颗粒. 即使多孔介质中只有少数孔中流体发生了改变, 但其中诸多变量(密度、黏度) 仍将保持不变. 最重要的差别还在于, 作用在流动状态上的力, 实质上与作用在自由空间上的力是不一样的. 在自由空间中, 流动状态下出现相互作用的摩擦力. 在多孔介质中, 多孔基体上出现的摩擦力加剧了相同的包缠; 转弯抹角的路径和通道, 以及速度的变化, 使介质产生了耗散和微惯性; 固体基体又为涡旋的扩散提供了更多的机会. 多孔介质中颗粒输运的准确描述, 离不开流动状态下作用力的分析, 以及介质中影响物质传输的扩散和耗散过程的定量描述.

本文利用本征体积平均导出了含尘相连续流动方程式, 注意到尘埃颗粒和多孔材料之间的相互作用, 更好地量化了通过介质时的扩散和耗散过程. 给出了多孔微结构对固体基体总表面积的影响, 这对颗粒的沉降表面积的确定是非常重要的.

---

* 收稿日期: 2007-07-10; 修订日期: 2008-01-31
作者简介: Hani I. Siyyam. 教授, 博士(联系人. Tel: + 505-648-5625; Fax: + 505-648-5799; E-mail: Hsiyyam@qu.edu.qa).
本文原文为英文, 吴承平 译, 张禄坤 校.

1 控制方程

流经自由空间的不可压缩含尘流体的稳定流动, 适宜用体积平均的控制方程组表达如下[3]:

液相连续性方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0; \tag{1}$$

液相动量方程

$$\rho \nabla \cdot \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{U} + KN(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}); \tag{2}$$

尘相连续性方程

$$\nabla \cdot N\boldsymbol{V} = 0; \tag{3}$$

尘相动量方程

$$\nabla \cdot N\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \frac{K}{m} N(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}); \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 分别为液相和尘相的速度矢量, p 为流体压力, ρ 为流体密度, K 为 Stokes 阻力系数, m 为尘埃颗粒质量, N 为尘埃颗粒数密度, μ 为黏性系数.

上述系统给出的 8 个标量方程包含 8 个未知数 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、N、p. 值得注意的是, 为简化计, 在含尘流体流动的研究中, 引入了均匀数密度 N. 如果将 N 看作常数, 则控制方程组变为超定的, 即 7 个未知数要满足 8 个方程. 为此可以加入一个尘相部分的压力项, 使其变为一组确定的方程组. 这可以解释为, 压力是保持颗粒均匀分布所必须的.

在尘相动量方程(4)中, 并没有拷虑黏性剪切项和尘相部分的压力. 在这一模型假设下, 尘埃是没有黏性的.

动量方程组(2)和(4)中的相对速度项表明, 摩擦力是由相间的相互作用产生的.

当流体-颗粒混合液流经多孔沉积物时(假设沉积物是刚性基体), 多孔微结构使流动状态中出现摩擦力. 混合液在流体压力梯度作用下流动. 假设尘埃颗粒充分大, 以致可以忽略 Brown 运动引起的扩散. 因而尘埃颗粒在多孔介质中不会自行扩散, 任何扩散的出现都缘自于压力.

我们感兴趣的是, 建立一个描述含尘气体流经多孔材料时的连续流动模型. 自由空间中流动的控制方程组, 即方程组(1)~(4), 将在"代表性单元体积"(REV)上取平均. 多孔微结构对流动流体的作用, 通常在"代表性单位单元"上讨论, 使粒状固结的多孔微结构的描述更方便[8-9].

2 平均近似法

按照 Bachmat 和 Bear[10] 的说法, 代表性单元体积(REV)是控制体积, 其中流体和多孔基体的比例与整个多孔介质相同. 在其他人的工作中, 采用控制体积孔隙率与整个多孔介质相同. 孔隙率 φ 定义为孔隙体积与介质总体积之比. 在 REV 中, 孔隙率定义为

$$\varphi = \frac{V_\varphi}{V}, \tag{5}$$

其中 V_φ 为 REV 里面的孔隙体积, V 是 REV 体积. 孔隙体积包括液相和尘相的. l 和 L 分别表示微观和宏观的长度尺度, 对于 REV 来说, $l^3 \ll V \ll L^3$.

为建立流经多孔结构的流动方程, 我们定义量 ψ 的体积相平均为

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V}\int_{V_\varphi} \psi \mathrm{d}V. \tag{6}$$

本征相平均(即, ψ 在有效孔隙空间 V_φ 上的体积相平均)定义为

$$\langle \psi \rangle_\varphi = \frac{1}{V_\varphi}\int_{V_\varphi} \psi \mathrm{d}V. \tag{7}$$

体积相平均和本征相平均之间的关系,可由方程(5)~(7)得到:

$$\langle \psi \rangle = \varphi \langle \psi \rangle_\varphi. \tag{8}$$

下面给出平均化理论并应用于方程(3)和(4). 设 ψ 为标量, ψ 为矢量, c 为常数(它的平均就是自身),则

$$\langle c\psi \rangle = c\langle \psi \rangle = c\varphi\langle \psi \rangle_\varphi. \tag{i}$$

$$\langle \nabla \psi \rangle = \varphi \nabla \langle \psi \rangle_\varphi + \frac{1}{V}\int_S \mathring{\psi}\, \boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{ii}$$

其中, S 为和流体相接触的 REV 的表面积, $\boldsymbol{n}$ 为指向固体的单位法向矢量, $\mathring{\psi}$ 为平均量相对真实值(微观)的偏差.

$$\langle \nabla\cdot \psi \rangle = \nabla\cdot\langle \psi \rangle + \frac{1}{V}\int_S \psi\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \nabla\cdot \varphi\langle \psi \rangle_\varphi + \frac{1}{V}\int_S \psi\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{iii}$$

$$\langle \psi_1 \pm \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 \rangle \pm \langle \psi_2 \rangle = \varphi\langle \psi_1 \rangle_\varphi \pm \varphi\langle \psi_2 \rangle_\varphi, \tag{iv}$$

其中, ψ_1、ψ_2 为两个与体积有关的量.

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1 \rangle\langle \psi_2 \rangle + \langle \mathring{\psi}_1 \mathring{\psi}_2 \rangle = \varphi\langle \psi_1 \rangle_\varphi\langle \psi_2 \rangle_\varphi + \varphi\langle \mathring{\psi}_1 \mathring{\psi}_2 \rangle_\varphi = \\ &\varphi\langle \psi_1 \rangle_\varphi\langle \psi_2 \rangle_\varphi + \varphi\langle \mathring{\psi}_1 \rangle_\varphi\langle \mathring{\psi}_2 \rangle_\varphi.\end{aligned} \tag{v}$$

3 平 均 方 程

3.1 尘相连续性方程

对方程(3)的两边取平均,并应用法则(iii)和(v),得到尘相本征体积平均连续性方程为

$$\nabla\cdot \varphi\langle N \rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi + \nabla\cdot \varphi\langle \mathring{N}\, \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi + \frac{1}{V}\int_S N\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0. \tag{9}$$

3.2 尘相动量方程

为了对尘相动量方程(4)取平均,我们应用法则(iii),并对方程(4)左边应用法则(v),得

$$\begin{aligned}\langle \nabla\cdot N\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} \rangle = &\nabla\cdot \varphi\langle N \rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi + \\ &\nabla\cdot \varphi\langle \mathring{N} \rangle_\varphi\langle \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi\langle \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi + \frac{1}{V}\int_S N\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{10}$$

对方程(4)右边作如下平均:

利用法则(i)、(iv)、(v),得

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{K}{m}N(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}) \right\rangle = &\frac{K}{m}\varphi\langle N \rangle_\varphi\left[\langle \boldsymbol{U}\rangle_\varphi - \langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\right] + \\ &\frac{K}{m}\varphi\langle \mathring{N} \rangle_\varphi\left[\langle \mathring{\boldsymbol{U}} \rangle_\varphi - \langle \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi\right].\end{aligned} \tag{11}$$

利用方程(10)和(11),方程(4)的本征体积平均可写为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot \varphi\langle N \rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi = \\ &\frac{K}{m}\varphi\langle N \rangle_\varphi\left[\langle \boldsymbol{U}\rangle_\varphi - \langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\right] + \frac{K}{m}\varphi\langle \mathring{N} \rangle_\varphi\left[\langle \mathring{\boldsymbol{U}} \rangle_\varphi - \langle \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi\right] - \\ &\nabla\cdot \varphi\langle \mathring{N} \rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi - \frac{1}{V}\int_S N\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{12}$$

方程(9) 和(12) 分别为尘相本征体积平均的连续性方程和动量方程. 在这两个方程中, 偏差项和面积分中包含了尘相和多孔介质之间相互作用所必要的信息.

4　面积分和偏差项分析

4.1　包含尘相速度的面积分

本文在对含尘气体流经自由空间(即, 没有多孔基体时) 的研究中, 按惯例在液相速度上使用无滑移条件. 对不可压缩流体的流动, 质量流动的连续性条件变为速度的法向分量为 0.

无论如何, 对于尘相, 无滑移条件可以产生最好的近似. 颗粒可能沉降在固体基体上, 又反射回流场, 或者沉降在已进入运动的其他颗粒上. 本文没有利用无滑移条件. 因此, 利用发散定理和尘相连续性方程(3), 有

$$\int_S N\boldsymbol{V}\bullet\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{V_\varphi} \therefore\bullet N\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{13}$$

所以, 方程(9) 中的面积分为 0, 尘相的连续性方程变为

$$\therefore\bullet\ \varphi\langle N\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi + \therefore\bullet\ \varphi\langle \mathring{N}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\rangle_\varphi = 0. \tag{14}$$

应注意, 方程(13) 并不意味着对尘相应用了无滑移条件. 事实上, 积分 $\int_S \boldsymbol{V}\bullet\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 并不必须为 0(于是, 出现了尘埃颗粒簇沉降到固体基体上, 又反射回流场, 或者沉降到多孔基体上已进入运动的颗粒上) .

然而, 方程(13) 表明, 尘相速度和颗粒数密度乘积的法向分量为 0(颗粒上没有剪切力) , 还表明, 颗粒在固体基体上的水动力学沉降是可能的(事实上, 我们在分析中将用到方程(9)) .

方程(12) 中的面积分表示了尘埃颗粒分布构成的总面力. 在没有尘相部分的压力时, 该面力仅由剪切分量构成. 然而, 尘相中没有剪力, 尘埃的总体积又非常小, 说明这一面力也是微不足道的, 从而面积分近似于 0(方程(12) 的末项) . 因此, 尘相动量方程(12) 可写为

$$\begin{aligned}\therefore\bullet\ \varphi\langle N\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi = {}& \frac{K}{m}\varphi\langle N\rangle_\varphi\left[\langle \boldsymbol{U}\rangle_\varphi - \langle \boldsymbol{V}\rangle_\varphi\right] + \\ & \frac{K}{m}\varphi\left[\langle \mathring{N}\ \mathring{\boldsymbol{U}}\rangle_\varphi - \langle \mathring{N}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\rangle_\varphi\right] - \therefore\bullet\ \varphi\langle \mathring{N}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\rangle_\varphi.\end{aligned} \tag{15}$$

方程(14) 和(15) 中的偏差项将在下一小节中分析.

4.2　偏差项分析

尘相连续性方程(14) 和尘相动量方程(15) 中的偏差项, 与多孔介质中尘相平均速度的水动力学耗散有关. 通过多孔介质的水动力学耗散, 是由于曲折的流动路径和多孔微结构引起的机械耗散, 也是液相扩散速度引起的耗散.

方程(15) 的偏差项 $\therefore\bullet\ \varphi\langle \mathring{N}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\ \mathring{\boldsymbol{V}}\rangle_\varphi$ 包括了尘相速度产生的偏差. 它们是多孔微结构引起的机械耗散惯性项. 多孔介质中的速度梯度和孔隙率都不高时(如粒状或固结介质) , 该项很小, 可以忽略. 然而, 在高孔隙率介质中, 该项却是重要的, 可以用动力学扩散建模. 值得注意的是, 含有速度偏差的项, 类似于湍流分析中的 Reynolds 应力.

方程(15) 中项 $\langle \mathring{N}\rangle_\varphi[\langle \mathring{\boldsymbol{U}}\rangle_\varphi - \langle \mathring{\boldsymbol{V}}\rangle_\varphi]$ 表示了, 平均相对速度矢量的波动引起的尘埃颗粒的耗散. 在尘埃颗粒均匀分布时, N 为常数且 $\langle \mathring{N}\rangle_\varphi = 0$, 从而耗散矢量为 0. 对非均匀颗粒分布, 该水动力学耗散可作为 Fourier 扩散建模, 也可以用扩散系数矢量 δ 和数密度传送差 $\langle N\rangle_\varphi - N_\mathrm{d}$ 来表示, 其中 N_d 为平均参考颗粒分布. 对后一种表示, 有

$$\langle \mathring{N} \rangle_\varphi [\langle \mathring{\boldsymbol{U}} \rangle_\varphi - \langle \mathring{\boldsymbol{V}} \rangle_\varphi] = \delta[\langle N \rangle_\varphi - N_{\mathrm{d}}] . \tag{16}$$

在尘相连续性方程的 $\nabla \cdot \varphi \langle \mathring{N} \mathring{V} \rangle_\varphi$ 项中, 包含了尘相速度偏差和颗粒数密度偏差的乘积. 由于尘相连续性方程是动力学方程, 两个偏差项的乘积不可能解释为惯性项. 如果尘埃颗粒分布是均匀的, 则 N 的偏差为 0, 因而该项亦为 0. 若 N 为非均匀分布, 则该项不为 0. 根据式(13), 尘埃颗粒在固体基体上的水动力学沉降是可能的, 并且偏差项可以表示沉降的过程. 我们将尘相连续性方程(14) 写成如下形式:

$$\nabla \cdot \varphi \langle N \rangle_\varphi \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi = - \nabla \cdot \varphi \langle \mathring{N} \rangle_\varphi \langle \mathring{V} \rangle_\varphi . \tag{17}$$

如果方程(17) 的右边不为 0, 则方程(17) 就是包含下沉的连续性方程. 这里的下沉即是指颗粒在固体基体上的水动力学沉降. 假设尘埃颗粒输运量是固体基体表面积 S 的函数, 输运系数为 ε (每单位表面积经验沉降率系数), 取决于孔隙率、介质微结构诸量, 从而方程(17) 又变为

$$\nabla \cdot \varphi \langle N \rangle_\varphi \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi = - \varepsilon S , \tag{18}$$

其中 S 取决于多孔微结构. 对粒状固结材料, Du Plessis 和 Masliyah[8-9] 提供了总表面积的量化方法.

5 控制方程的最终形式

上述分析表明, 流经多孔结构的含尘流体, 控制尘相的连续性方程和动量方程分别为:

尘相连续性方程

$$\nabla \cdot \varphi \langle N \rangle_\varphi \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi = - \varepsilon S . \tag{19}$$

尘相动量方程

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \varphi \langle N \rangle_\varphi \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi = \\ &\qquad \frac{K}{m} \varphi \langle N \rangle_\varphi \left[\langle \boldsymbol{U} \rangle_\varphi - \langle \boldsymbol{V} \rangle_\varphi \right] + \frac{K}{m} \varphi\, \delta[\langle N \rangle_\varphi - N_{\mathrm{d}}] . \end{aligned} \tag{20}$$

6 结　　论

本文通过本征体积平均, 导出了尘相连续性方程和动量方程, 这些方程描述了流经多孔介质流体中颗粒的运动. 在平均过程中产生的面积分和偏差项中, 包含了尘埃颗粒和固体基体之间相互作用的所有信息. 我们考虑了水动力学耗散, 并给出了尘埃颗粒的沉降和扩散机理. 用一个经验参数, 模拟颗粒的水动力学沉降; 用扩散系数矢量和数密度传送差, 模拟扩散引起的水动力学耗散.

[参　考　文　献]

[1] Barron R M. Steady plane flow of a viscous dusty fluid with parallel velocity fields[J]. *Tensor N S*, 1977, **31**(1): 271-274.

[2] Doronin G G, Larkin N A. Mathematical problems for a dusty gas flow[J]. *Bol Soc Paran Mat*, 2004, **22**(1): 21-29.

[3] Saffman P G. On the stability of laminar flow of a dusty gas[J]. *J Fluid Mech*, 1962, **13**(1): 120-129.

[4] Allan F M, Hamdan M H. Fluid-particle model of flow through porous media: The case of uniform particle distribution and parallel velocity fields[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **183**(2): 1208-1213.

[5] Hamdan M H, Sawalha K D. Dusty gas flow through porous media[J]. *J Appl Math Comput*, 1996, **75**

(1): 59-73.

[6] Mays D C, Hunt J R. Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media[J]. Environ Sci Technol, 2005, **39**(2): 577-584.

[7] Thomas D, Penicot P, Contal P, et al. Clogging of fibrous filters by solid aerosol particles experimental and modeling study[J]. Chem Engineering Sci, 2001, **56**(11): 3549-3561.

[8] Du Plessis J P, Masliyah J H. Mathematical modeling of flow through consolidated isotropic porous media[J]. Transport in Porous Media, 1988, **3**(2): 145-161.

[9] Du Plessis J P, Masliyah J H. Flow through granular porous media[J]. Transport in Porous Media, 1991, **6**(3): 207-221.

[10] Bachmat Y, Bear J. Macroscopic modeling of transport phenomena in porous media—Ⅰ the continuum approach[J]. Transport in Porous Media, 1986, **1**(3): 213-240.

Analysis of Particulate Behavior in Porous Media

Hani I. Siyyam[1], M. H. Hamdan[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, College of Arts and Sciences, Qatar University, P. O. Box 2713, Doha, Qatar;
2. Department of Mathematical Sciences, University of New Brunswick, P. O. Box 5050, Saint John, New Brunswick, Canada, E2L 4L5)

Abstract: The behavior of the particle phase in the flow of a particle-laden mixture through a porous medium was analyzed. An attempt was made to model the diffusion and dispersion processes, and to quantify the deviation terms that arise when intrinsic volume averaging is used to derive the flow equations.

Key words: porous medium; dusty gas; particle behavior