

各向异性双材料中运动螺型位错与 界面刚性线的干涉*

刘又文, 李 博, 方棋洪

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(我刊原编委 樊大均 推荐)

摘要: 研究了各向异性双材料中匀速运动螺型位错与界面刚性线的干涉问题. 运用 Riemann-Schwarz 解析延拓技术与复势函数奇性主部分分析方法, 获得了该问题的一般弹性解答, 求出了界面含一条和两条刚性线情况下的封闭形式解, 并给出了刚性线尖端的应力强度因子和作用于运动位错上的像力的显式表达式. 结果表明, 位错速度增大可以削弱位错对应力强度因子的反屏蔽效应; 位错速度越大, 位错平衡点越靠近刚性线. 退化结果与已有的解答完全吻合.

关键词: 各向异性双材料; 运动螺型位错; 界面刚性线; 像力

中图分类号: O343.7 **文献标识码:** A

引 言

位错与界面缺陷的干涉在晶体材料力学行为研究中非常重要, 对材料的强韧化机理深层次的理解, 促使人们从力学和材料科学的角度来研究位错与界面裂纹及反裂纹的相互作用. 由于问题的重要性, 在过去几十年中它受到了很多重视, 但大多集中于对静止位错的研究. 在许多动力学条件下, 位错运动速度较慢, 以静态解答来代替动应力和位移是足够精确的. 然而, 在一些特殊情况, 如裂纹形成和冲击荷载下, 动力学效应就显得非常重要. 基于上述原因, 也有一些文献对运动位错进行了研究. Weertman 等人^[1]对此作了详细评论, 概括了 1970 年末以前的研究成果. 近来, Tsai 等人^[2]采用位错模型法研究了运动螺型位错与表面裂纹的干涉; Zaiser 等人^[3]研究了沿平行滑移面运动位错之间的相互作用; 利用四维动力学 Green 函数, Khannanov^[4]获得了运动位错电弹性场的积分表达式; Wu^[5]研究了一般各向异性材料中匀速运动位错问题; Wang 等人^[6]研究了横观各向同性压电材料中匀速运动螺型位错问题; 而 Wu 等人^[7]获得了压电双材料中匀速运动螺型位错与界面干涉的解答; Wu^[8]获得了两各向异性材料中界面位错的动力学全场解; Yang^[9]和 Liu 等人^[10]分别研究了压电磁材料中的运动位错的问题; Soh 等人^[11]提出了各向异性压电材料中运动位错的封闭解答. 以上所有研究均未考虑界面刚性线(反裂纹)的运动位错的影响.

* 收稿日期: 2007-08-28; 修订日期: 2008-03-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472030)

作者简介: 刘又文(1948-), 男, 湖南益阳人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-731-8821889;

Fax: + 86-731-8822330; E-mail: liuyouw8294@sina.com).

本文利用 Riemann– Schwarz 解析延拓技术与复势函数奇性主部分析方法, 研究了各向异性双材料中运动位错与界面刚性线的干涉问题. 导出了该问题的一般解答以及界面分别含有一条和两条刚性线的典型封闭解, 并求出了刚性线尖端应力强度因子和作用于运动位错上的像力的显式表达式. 文中的退化结果与已有的解答完全吻合.

1 基本公式与问题描述

对于具有对称平面 $x_3 = 0$ 的各向异性材料, 其反平面变形可以与平面变形相分离, 在直角坐标系中只剩下非零位移 u_3 、应力 σ_{13} 和 σ_{23} , 所有分量仅是变量 x_1 和 x_2 的函数. 其本构方程为^[12]:

$$\sigma_{13} = c_{55}u_{3,1} + c_{45}u_{3,2}, \quad \sigma_{23} = c_{45}u_{3,1} + c_{44}u_{3,2} \tag{1}$$

其中 c_{44} 、 c_{45} 和 c_{55} 为弹性常数.

在无体力的情况下, 各向异性材料的控制方程为

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = \rho \ddot{u}_3, \tag{2}$$

其中 $(\ddot{}) = \partial^2()/\partial t^2$, ρ 表示材料的密度. 将式(1)代入式(2)可得

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \rho \ddot{u}_3. \tag{3}$$

考虑如图 1 所示问题. 各向异性介质 I 与 II 分别占据上下半平面, 在两种材料的交界面上有一系列刚性线夹杂 L_j , 刚性线尖端用 a_j 和 c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示, 它们占据着界面 L 的部分, 刚性线上外载为零, 界面的剩余连接部分用 L' 表示. 不失一般性, 假设在 $t = 0$ 时, 螺型位错的瞬态位置为上半平面 z_0 ($z_0 = x_{10} + ix_{20}, x_{20} > 0$) 处. 位错的 Burgers 矢量为 b , 且以速度 v 沿 x 方向匀速运动.

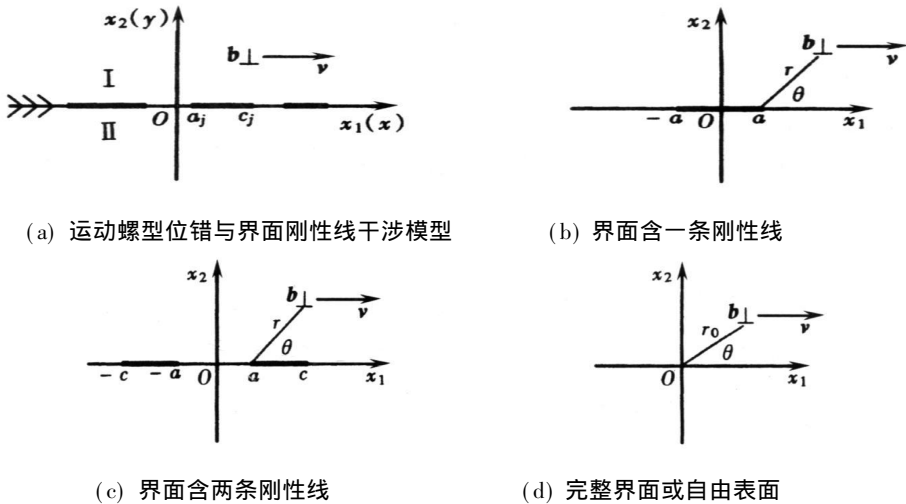


图 1 研究模型简图

应力位移边界条件可以表述如下:

$$\sigma_{23(1)}^+ = \sigma_{23(2)}^-, \quad \text{在 } L' \text{ 上}, \tag{4}$$

$$u_{3(1)}^+ = u_{3(2)}^-, \quad \text{在 } L' \text{ 上}, \tag{5}$$

$$u_{3(1)}^+ = u_{3(2)}^- = \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ 在 } L' \text{ 上}, \tag{6}$$

式中常数 δ_j 表示刚性线 L_j 的位移常量, 下标 1 和 2 分别表示上半平面和下半平面, 上标+ 和-

表示函数分别从上半平面和下半平面趋向界面时所取的值.

由式(5), 我们有

$$u_{3(1)}^+ = \overline{u_{3(2)}^-}, \quad \text{在 } L' \text{ 上}, \quad (7)$$

此处 $u_3 = \partial u_3 / \partial x_1$.

从式(6), 可得

$$u_{3(1)}^+ + \overline{u_{3(2)}^-} = 0, \quad \text{在 } L \text{ 上}, \quad (8)$$

$$u_{3(1)}^+ - \overline{u_{3(2)}^-} = 0, \quad \text{在 } L \text{ 上}. \quad (9)$$

另外, 假设无穷远处加载为零.

2 问题的一般解答

通过坐标变换, 引入新的坐标系 (x, y)

$$x = x_1 - vt, \quad y = x_2. \quad (10)$$

在新坐标系中, 式(3)可以表示为

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

式中 $c_{55} = c_{55} - \rho v^2$.

定义

$$\xi = x + \mu y, \quad (12)$$

其中特征值 μ 定义为

$$\mu = -\frac{c_{45}}{c_{44}} + \frac{i \sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}}{c_{44}}. \quad (13)$$

式(11)的解答可由一单值解析函数 $\varphi(\xi)$ 表示^[12]:

$$u_3 = -\frac{i}{2\beta} [\varphi(\xi) - \overline{\varphi(\xi)}], \quad (14)$$

式中 $\beta = \sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}$.

上下半平面的位移(微分)和应力可以变量 $\xi_k (k = 1, 2)$ 的复函数表示为

$$u_3' = -\frac{i}{2\beta_k} [\Phi_k(\xi_k) - \overline{\Phi_k(\xi_k)}], \quad (15)$$

$$\sigma_{13(k)} = -\frac{1}{2} [\mu_k \Phi_k(\xi_k) + \mu_k \overline{\Phi_k(\xi_k)}], \quad (16)$$

$$\sigma_{23(k)} = \frac{1}{2} [\Phi_k(\xi_k) + \overline{\Phi_k(\xi_k)}], \quad (17)$$

式中 $\Phi_k(\xi_k) = \dot{\Phi}_k(\xi_k)$, 上标一撇表示对 ξ_k 求导.

参考 Kattis^[12], Pak^[13], Jiang^[14] 等人的工作, 上下半平面中的解析函数 $\Phi_1(z_1)$ 和 $\Phi_2(z_2)$ 分别为

$$\Phi_1(\xi_1) = \frac{\beta_1 b}{2\pi} \cdot \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} + \Phi_{10}(\xi_1), \quad y > 0, \quad (18)$$

$$\Phi_2(\xi_2) = \Phi_{20}(\xi_2), \quad y < 0, \quad (19)$$

式中 $\xi_0 = x_0 + \mu_1 y_0$, $\Phi_{10}(\xi_1)$ 和 $\Phi_{20}(\xi_2)$ 分别在上下半平面全纯, 且在无穷远处为零.

注意到在 x 轴上 $\xi_1 = \xi_2 = x$, 变量为 $\xi_k (k = 1, 2)$ 的函数的解答过程可以转化为变量为 $z = x + iy$ 的相应函数的解答.

运用 Riemann-Schwarz 对称原理^[15], 引入一个新的解析函数 $\Omega_k(z)$:

$$\Omega_k(z) = \Phi_k(z) = \overline{\Phi_k(z)} \quad (k = 1, 2). \quad (20)$$

从式(7)和(9), 可以得到

$$u_{3(1)}^+ = u_{3(2)}^-, \quad \text{在 } L^* + L'^* \text{ 上}, \quad (21)$$

此处 L^* 和 L'^* 分别对应于老坐标系中的 L 和 L' .

将式(15)代入式(21), 且注意到式(20), 有

$$[\beta_2 \Phi_1(x) + \beta_1 \Omega_2(x)]^+ = [\beta_1 \Phi_2(x) + \beta_2 \Omega_1(x)]^-, \quad \text{在 } L^* + L'^* \text{ 上}, \quad (22)$$

表明 $\beta_2 \Phi_1(z) + \beta_1 \Omega_2(z)$ 和 $\beta_1 \Phi_2(z) + \beta_2 \Omega_1(z)$ 越过实轴互相延拓.

根据广义 Liouville 定理, 由式(22)可得

$$h(z) = \begin{cases} \beta_2 \Phi_1(z) + \beta_1 \Omega_2(z), & y > 0, \\ \beta_1 \Phi_2(z) + \beta_2 \Omega_1(z), & y < 0, \end{cases} \quad (23)$$

式中

$$h(z) = \frac{\beta_1 \beta_2 b}{2\pi} \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_0} \right]. \quad (24)$$

将式(17)代入式(4), 有

$$[\Phi_1(x) - \Omega_2(x)]^+ = [\Phi_2(x) - \Omega_1(x)]^-, \quad \text{在 } L'^* \text{ 上}, \quad (25)$$

表明 $\Phi_1(z) - \Omega_2(z)$ 和 $\Phi_2(z) - \Omega_1(z)$ 越过 L^* 相互延拓.

令

$$g(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) - \Omega_2(z), & y > 0, \\ \Phi_2(z) - \Omega_1(z), & y < 0. \end{cases} \quad (26)$$

通过对 $g(z)$ 的奇性分析, 可以得到

$$g(z) = \frac{\beta_1 b}{2\pi} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right] + g_0(z), \quad (27)$$

式中 $g_0(z)$ 是沿 L^* 割开的平面全纯, 且在无穷远处为零.

由式(23)和(26)可得

$$\Phi_1(z) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} g(z) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} h(z), \quad y > 0, \quad (28)$$

$$\Omega_2(z) = -\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} g(z) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} h(z), \quad y > 0, \quad (29)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} g(z) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} h(z), \quad y < 0, \quad (30)$$

$$\Omega_1(z) = -\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} g(z) + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} h(z), \quad y < 0. \quad (31)$$

将式(28)~(31)代入式(8), 得到

$$g^+(x) + g^-(x) = 0, \quad \text{在 } L^* \text{ 上}. \quad (32)$$

根据 Muskhelishvili 的文献[16], 方程(32)的解答为

$$g(z) = \frac{\beta_1 b}{2\pi} \left[\frac{1}{X_0(z_0)} \cdot \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{X_0(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \right] X_0(z) + P(z) X_0(z), \quad (33)$$

式中

$$P(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_0, \quad (34)$$

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j^*)^{-1/2} (z - c_j^*)^{-1/2}, \quad (35)$$

其中 a_{j^*} 和 c_{j^*} 分别对应于 a_j 和 c_j , 也即 $a_{j^*} = a_j - vt$ 、 $c_{j^*} = c_j - vt$, $X_0(z)$ 沿 L^* 割开的平面里的单值分支, 且

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1. \quad (36)$$

比较式(33)和(27)无穷远处的展开式, 有

$$C_n = 0. \quad (37)$$

式(33)还剩 n 个未知常数, 这需要由刚性线的平衡条件决定:

$$\int_{a_{j^*}}^{c_{j^*}} \sigma_{23(1)}^* dx = \int_{a_{j^*}}^{c_{j^*}} \sigma_{23(2)}^* dx, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (38)$$

注意到式(28)~(31), 式(38)可以化为 n 个围道积分:

$$\int_{\Lambda_j} g(z) dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (39)$$

式中 Λ_j 包围 L_{j^*} 的闭围线, 且点 (z_0, z_0) 在围道之外.

由式(39)给出的 n 个线性方程组可以唯一确定 n 个积分常数. 一旦求得 $g(z)$ 、 $\Phi_k(z)$ 和 $\Omega_k(z)$ ($k = 1, 2$) 就可容易求出. 以 z 换 ξ 就得到原问题的 $\Phi_k(\xi_k)$ 和 $\Omega_k(\xi_k)$ [17].

3 典型封闭解答

情况 1 运动位错与一条界面刚性线的干涉

假设界面刚性线关于 x_2 轴对称, 其端点分别为 a 和 $-a$, 如图 1(b).

由式(35), 有

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+vt)^2 - a^2}}. \quad (40)$$

将式(37)和(40)代入式(39), 有

$$C_0 = 0. \quad (41)$$

将式(40)和(41)代入式(33), 可求得 $g(z)$, 然后由式(28)和(30), 且以 ξ 换 z , 有

$$\Phi_1(\xi_1) = \frac{\beta_1 b}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \left[\beta_2 \left[\frac{1}{\xi_1 - \xi_0} + \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} \right] + \beta_1 \left[\frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_1 - \xi_0} - \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_1 - \xi_0} \right] \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 + vt)^2 - a^2}} \right], \quad (42)$$

$$\Phi_2(\xi_2) = \frac{\beta_1 \beta_2 b}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \left[\left[\frac{1}{\xi_2 - \xi_0} + \frac{1}{\xi_2 - \xi_0} \right] + \left[\frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_2 - \xi_0} - \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_2 - \xi_0} \right] \frac{1}{\sqrt{(\xi_2 + vt)^2 - a^2}} \right]. \quad (43)$$

当 $c_{44} = c_{55}$ 和 $c_{45} = 0$ 时, 可获得同性双材料中的相应解答. 当 $\mu_1 = \mu_2$ 和 $\beta_1 = \beta_2$, 求得相同种材料中含一条刚性线的解答:

$$\Phi(\xi) = \frac{\beta b}{4\pi} \left[\frac{1}{\xi - \xi_0} + \frac{1}{\xi - \xi_0} + \left[\frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi - \xi_0} - \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi - \xi_0} \right] \frac{1}{\sqrt{(\xi + vt)^2 - a^2}} \right]. \quad (44)$$

据我们所知, 这是一个新结果.

运动位错与完整双材料界面的解答可从式(42)和(43)中令 $a = 0$ 求得.

$$\Phi_1(\xi_1) = \frac{\beta_1 b}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \left[(\beta_1 + \beta_2) \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} - (\beta_1 - \beta_2) \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} \right], \quad (45)$$

$$\Phi_2(\xi_2) = \frac{\beta_1 \beta_2 b}{\pi(\beta_1 + \beta_2)} \frac{1}{\xi_2 - \xi_0}. \quad (46)$$

令 $\mu_1 = \mu_2$ 和 $\beta_1 = \beta_2$, 将式(45)和(46)代入式(15)或(14), 所得结果与 Bullough 等人^[18]的一致. 各向同性材料的相应解答也可从式(45)和(46)求得, 结果与 Eshelby^[19]的一致.

在式(45)和(46)中, 令 $\beta_2 = 0$, 得到运动螺型位错与自由表面干涉的解答.

$$\Phi_1(\xi_1) = \frac{\beta_1 b}{2\pi} \left(\frac{1}{\xi_1 - \xi_0} - \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} \right), \quad (47)$$

$$\Phi_2(\xi_2) = 0. \quad (48)$$

情况2 运动位错与两条等长界面刚性线的干涉

假设两条刚性线关于 x_2 轴对称, 其端点分别为 $-c$ 和 $-a$, a 和 c ($c < a$), 见图 1(c).

由式(34)和(35), 并注意到式(37), 有

$$P(z) = C_1 z + C_0, \quad (49)$$

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{[(z+vt)^2 - a^2][(z+vt)^2 - c^2]}}. \quad (50)$$

将式(49)和(50)代入式(39)利用留数定理, 得到

$$C_1 = 0. \quad (51)$$

将式(51)代入式(33), 注意到式(39), 得到

$$C_0 = - \frac{\beta_1 b}{2\pi F(\phi, r)} \left[\frac{[2c\Pi(\phi, \eta, r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} - \frac{[2c\Pi(\phi, \eta', r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} \right], \quad (52)$$

式中 $F(\phi, r)$ 和 $\Pi(\phi, \eta, r)$ 分别为第一类和第三类完全椭圆积分, 参见 Gradshteyn 等人的文献[20], 且

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad r = \frac{c-a}{c+a}, \quad \eta = \frac{(a-c)(z_0 + vt + c)}{(a+c)(z_0 + vt - c)}, \quad \eta' = \frac{(a-c)(z_0 + vt + c)}{(a+c)(z_0 + vt - c)}.$$

由式(28)和式(30), 且以 ξ 换 z , 我们得到

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi_1) = & \frac{\beta_1 b}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \left\{ \beta_2 \left[\frac{1}{\xi_1 - \xi_0} + \frac{1}{\xi_1 - \xi_0} \right] + \right. \\ & \beta_1 \left[\frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{\xi_1 - \xi_0} - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{\xi_1 - \xi_0} + \right. \\ & \left. \left. \frac{2\pi(\beta_1 + \beta_2)C_0}{\beta_1^2 b} \right] \frac{1}{\sqrt{[(\xi_1 + vt)^2 - a^2][(\xi_1 + vt)^2 - c^2]}} \right\}, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi_2) = & \frac{\beta_1 \beta_2 b}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \left\{ \left(\frac{1}{\xi_2 - \xi_0} + \frac{1}{\xi_2 - \xi_0} \right) + \right. \\ & \left. \left[\frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{\xi_2 - \xi_0} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{\xi_2 - \xi_0} + \left. \frac{2\pi(\beta_1 + \beta_2)C_0}{\beta_1\beta_2b} \right] \frac{1}{\sqrt{[(\xi_2 + vt)^2 - a^2][(\xi_2 + vt)^2 - c^2]}} \}. \quad (54)$$

由式(53)和(54),我们同样可以得到式(44)~(48)的结果,为了节省篇幅,我们省去了详细推导.

4 刚性线尖端应力强度因子

仿照裂纹尖端应力强度因子的定义,可以将刚性线尖端 l_k 的应力强度因子定义为

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \lim_{\xi_1 \rightarrow l_k} \left[\sqrt{\xi_1 - l_k} \Phi_1(\xi_1) \right], \quad (55)$$

K_{III} 反映了刚性线尖端邻域的应力场强度.

当双材料界面上含有一条刚性线时,将式(42)代入式(55),求得刚性线右端的应力强度因子为

$$K_{III} = \frac{\beta_1^2 b}{2(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\pi a}} \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{a - vt - \xi_0} - \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{a - vt - \xi_0} \right]. \quad (56)$$

界面含有两条刚性线时,仅计算其中一条刚性线两端的应力强度因子,将式(53)代入式(55)得刚性线 a 和 c 端的应力强度因子分别为

$$K_{III} = \frac{\beta_1^2 b}{2(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\pi a(c^2 - a^2)}} \left\{ \frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{a - vt - \xi_0} + \frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{a - vt - \xi_0} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 F(\phi, r)} \left[\frac{[2c\Pi(\phi, \eta, r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} + \frac{[2c\Pi(\phi, \eta', r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} \right] \right\}, \quad (57)$$

$$K_{III} = \frac{\beta_1^2 b}{2(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\pi c(c^2 - a^2)}} \left\{ \frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{c - vt - \xi_0} + \frac{\sqrt{[(\xi_0 + vt)^2 - a^2][(\xi_0 + vt)^2 - c^2]}}{c - vt - \xi_0} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 F(\phi, r)} \left[\frac{[2c\Pi(\phi, \eta, r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} + \frac{[2c\Pi(\phi, \eta', r) + (z_0 + vt - c)F(\phi, r)]X_0(z_0)}{(z_0 + vt)^2 - c^2} \right] \right\}. \quad (58)$$

5 位错像力

在下文以一条界面刚性线为例,对作用与运动位错上的像力进行讨论. 根据 Weertman 等人^[1]的工作,由式(16)、(17)和(42)可求得像力表达式

$$F_x = \frac{\beta_1 b^2}{\pi(\beta_1 + \beta_2)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta_2}{\xi_0 - \xi_0} + \right.$$

$$\beta_1 \left[- \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_0 - \xi_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}} - \frac{\xi_0 + vt}{(\xi_0 + vt)^2 - a^2} \right], \quad (59)$$

$$F_y = \frac{\beta_1 b^2}{\pi(\beta_1 + \beta_2)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \beta_2}{\xi_0 - \xi_0} + \mu_1 \beta_1 \left[- \frac{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}}{\xi_0 - \xi_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 + vt)^2 - a^2}} - \frac{\xi_0 + vt}{(\xi_0 + vt)^2 - a^2} \right] \right\}. \quad (60)$$

对于同种材料中含一条刚性线的解答可从式(59)和(60)中令 $\beta_1 = \beta_2$ 获得.

从式(59)和(60), 我们可以得到一些有用的结果. 令 $a = 0$ 注意到 $\beta_k (k = 1, 2)$ 为实常数, 得到运动位错与各向异性双材料界面干涉的位错力表达式:

$$F_x = 0, \quad (61)$$

$$F_y = \frac{\beta_1 b^2}{\pi(\beta_1 + \beta_2)} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1}{\xi_0 - \xi_0} (\beta_2 - \beta_1) \right]. \quad (62)$$

假设 $\beta_2 = 0$ 得到运动位错与自由表面干涉的位错力

$$F_x = 0, \quad (63)$$

$$F_y = \frac{b^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[- \frac{\mu_1}{\xi_0 - \xi_0} \beta_1 \right]. \quad (64)$$

对于完整界面和自由表面的情况, 正如我们所料, 由于对称性 x 方向的像力为零.

6 数值分析与讨论

本节进行数值计算, 以此来揭示位错速度对像力的影响. 假设材料 I 和 II 分别为碳-环氧树脂和石墨-环氧树脂复合材料, 材料性质如下所列. 对于碳-环氧树脂^[21],

$$c_{44} = 3.98 \text{ GPa}, \quad c_{55} = 6.4 \text{ GPa}, \quad c_{45} = 0, \quad \rho = 1.57 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

对于石墨-环氧树脂^[22]

$$c_{44} = 3.03 \text{ GPa}, \quad c_{55} = 4.7 \text{ GPa}, \quad c_{45} = 0, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

下面, 我们主要考虑界面含有一条刚性线夹杂的情况. 为了便于分析应力强度因子和位错像力, 引入如图 1(b) 和(d) 所示极坐标. 假设 $a = 0.01 \text{ m}$, $r_0 = 0.01 \text{ m}$, $t = 0$, 采用下面 3 个参数将应力强度因子和位错像力无量纲化:

$$K_0 = \frac{c_{44(1)} b}{2 \sqrt{\pi a}}, \quad F_{10} = \frac{c_{44(1)} b^2}{2 \pi a}, \quad F_{20} = \frac{c_{44(1)} b^2}{2 \pi r_0},$$

位错速度以及位错与刚性线尖端的距离无量纲化为 $v_0 = v / \sqrt{c_{44(1)} / \rho_1}$, $\lambda = r / a$.

利用式(56), 当 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下无量纲应力强度因子 K_{III} 随 λ 的变化如图 2 所示. 可见, 无量纲应力强度因子随 λ 增大而减小, 最终趋于某一常数. III型应力强度因子随位错速度增大而减小, 即反屏蔽效应随位错速度增大而减小.

图 3 给出了 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下位错力 F_x 随 λ 变化的规律. 随着位错与刚性线尖端的距离增加, 位错力减小且最终趋于零. 另外, 刚性线总是排斥位错, 而与位错的运动情况无关. 取 $\lambda = 0.9$, 不同位错速度下无量纲位错力 F_x 随 θ 的变化情况如图 4 所示. 可以看出, 位错力先增加后减小, 存在一个最大值, 而且位错运动时, 该最大值大于位错静止时的最大值. 当 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下无量纲位错力 F_y 随 λ 的变化如图 5 所示. 可以发现, 由于材料 II 比材料 I 软, 位错力恒为负值, 且位错绝对值随着位错与刚性线夹杂之间的距离增

加而减小, 最终趋于零. 图6描绘了 $\lambda = 0.8$ 时, 不同位错速度下无量纲位错力 F_y 随 θ 的变化情况. 位错力从负值变为正值, 在 $\theta = 100^\circ$ 附近存在一个稳定的平衡位置, 在该处位错力为零. 值得注意的是, 运动位错的平衡角度大于静止位错平衡角度, 这意味着位错速度可以改变位错的平衡位置, 且使该点靠近刚性线夹杂.

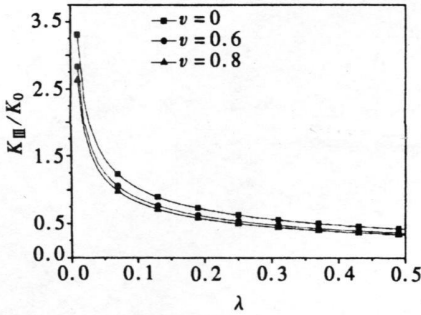


图2 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下应力强度因子 K_{III} 随 λ 的变化

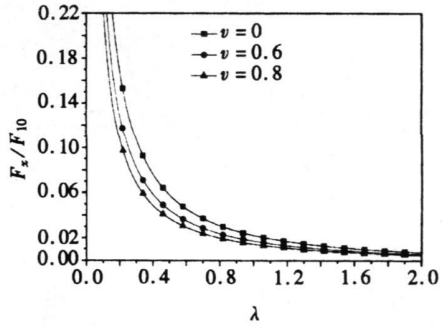


图3 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下位错力 F_x 随 λ 的变化

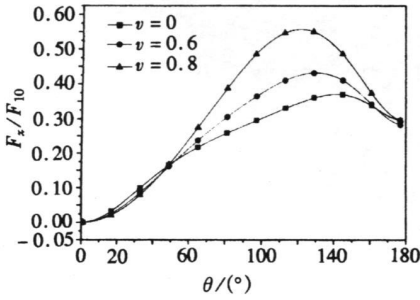


图4 $\lambda = 0.9$ 时, 不同位错速度下位错力 F_x 随 θ 的变化

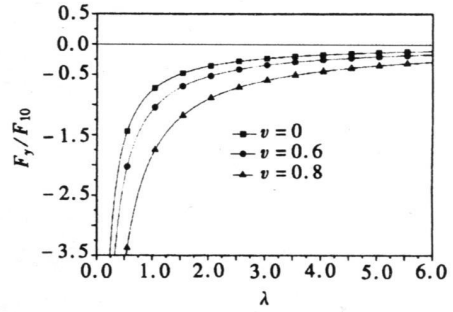


图5 $\theta = 15^\circ$ 时, 不同位错速度下位错力 F_y 随 λ 的变化

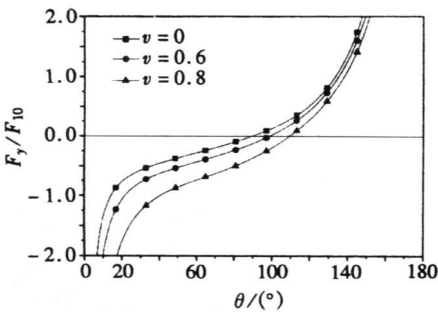


图6 $\lambda = 0.8$ 时, 不同位错速度下位错力 F_y 随 θ 的变化

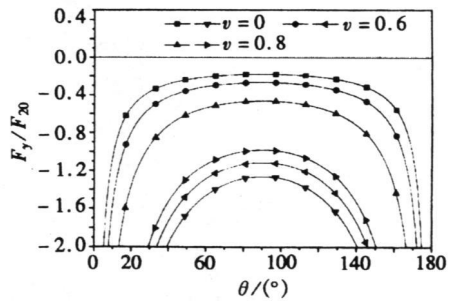


图7 对于完整界面和自由表面的情况, 不同位错速度下位错力 F_y 随 θ 的变化

对于完整界面和自由表面的情况, 图7给出了不同位错速度下, 位错力 F_y 随 θ 的变化情况. 可以发现, 位错力 F_y 关于 $\theta = 90^\circ$ 对称, 且不管位错的运动情况如何均为负值. 然而, 位错运动时由完整界面激发的位错力的绝对最小值要大于位错静止时的值, 而由自由表面激发的位错力具有相反的性质.

7 结 论

本文研究了双各向异性材料中匀速运动位错与界面刚性线夹杂的弹性干涉. 运用复变函数方法, 导出了问题的一般解答. 作为典型例子, 求得了界面含有一条和两条刚性线情况时的解析解答. 另外还讨论了完整界面和自由表面的情况. 给出了作用于运动位错上位错像力的显式表达式. 结果表明, 位错速度可以改变位错的平衡位置. 这些信息对于材料的制造和应用具有一定价值. 所获得的解析结果可以作为 Green 函数求解各向异性材料或各向同性材料中界面刚性线与运动裂纹的干涉问题.

[参 考 文 献]

- [1] Weertman J, Weertman J R. Moving dislocation[A]. In: Nabarro F R N, Ed. Dislocations in Solids [C]. Amsterdam, New York: North- Holland Publishing Company, 1980.
- [2] Tsai Y Z, Hu C T, Lee S. Elastic interaction between a moving screw dislocation and a surface crack [J]. Journal of Materials Research, 1995, **10**(10): 2668– 2675.
- [3] Zaiser M, Aifantis E C. On the dynamic interaction between moving dislocations[J]. Applied Physics A, 1999, **66**(4): 393– 397.
- [4] Khannanov Sh Kh. Electroelastic fields of moving dislocations and disclinations in piezoelectric crystals[J]. Physics of the Solid State, 1999, **41**(7): 1102– 1104.
- [5] Wu K C. Transient motion due to a moving dislocation in a general anisotropic solid[J]. Acta Mechanica, 2002, **158**(1/2): 85– 96.
- [6] Wang X, Zhong Z. A moving piezoelectric screw dislocation[J]. Mechanics Research Communications, 2002, **29**(5): 425– 429.
- [7] Wu X F, Dzenis Y A, Zou W S. Moving screw dislocations in piezoelectric bimaterials[J]. Physica Status Solidi (b), 2003, **238**(1): 120– 126.
- [8] Wu K C. Transient motion of an interfacial line force or dislocation in an anisotropic elastic biomaterial[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(8): 1811– 1823.
- [9] Yang J. A moving screw dislocation in piezoelectromagnetic ceramics[J]. Acta Mechanica, 2004, **172**(1/2): 123– 129.
- [10] Liu J X, Soh A K, Fang D N. A moving dislocation in a magneto- electro- elastic solid[J]. Mechanics Research Communications, 2005, **32**(5): 504– 513.
- [11] Soh A K, Liu J X, Lee K L, et al. Moving dislocations in general anisotropic piezoelectric solids[J]. Physica Status Solidi (b), 2005, **242**(4): 842– 853.
- [12] Kattis M A, Providas E. Two- phase potentials in anisotropic elasticity: antiplane deformation[J]. International Journal of Engineering Science, 1998, **36**(7/8): 801– 811.
- [13] Pak Y E. Force on piezoelectric screw dislocation[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1990, **57**(3): 863– 869.
- [14] Jiang C P, Tong Z H, Chueng Y K. A generalized self- consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under anti- plane shear[J]. Mechanics of Materials, 2001, **33**(5): 295– 308.
- [15] 樊大钧. 数学弹性力学[M]. 北京: 新时代出版社, 1983, 377– 379.
- [16] Muskhelishvili N L. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975, 331– 340.
- [17] Yang S, Yuan F G. Interfacial circular crack in cylindrically anisotropic composites under antiplane shear[J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, **32**(24): 3603– 3628.

- [18] Bullough R, Biby B A. Uniformly moving dislocations in anisotropic media[J]. Proceedings of the Physical Society (London), Section B, 1954, **67**(8): 615– 624.
- [19] Eshelby J D. Uniformly moving dislocations[J]. Proceedings of the Physical Society (London), Section A, 1949, **62**(5): 307– 314.
- [20] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products [M]. New York: Academic Press, 1980, 241– 245.
- [21] Pramanik R, Pal S C, Ghosh M L. High frequency scattering due to a pair of time– harmonic antiplane forces on the faces of finite interface crack between dissimilar anisotropic materials[J]. European Journal of Mechanics A/ Solids, 1999, **18**(6): 1013– 1026.
- [22] Wu X F, Dzenis Y A. Antiplane surface acoustic waves propagating in elastic half– space coated with an anisotropic laminate[J]. Composites Science and Technology, 2005, **65**(11/12): 1761– 1768.

Moving Screw Dislocation Near Interfacial Rigid Lines in Two Dissimilar Anisotropic Media

LIU You– wen, LI Bo, FANG Qi– hong

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanics and Aerospace,
Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The problem for the interaction between a uniformly moving screw dislocation and interface rigid lines in two dissimilar anisotropic materials are investigated. Using Riemann– Schwarz' s symmetry principle integrated with the analysis singularity of complex functions, the general elastic solutions of this problem and the closed form solutions for interface containing one and two rigid lines were presented. The expressions of stress intensity factors at the rigid line tips and image force acting on moving dislocation were derived explicitly. The results show that dislocation velocity has antishielding effect on rigid line tip and larger dislocation velocity leads to the equilibrium position of dislocation closing with rigid line. The presented solutions contain previously known results as the special cases.

Key words: anisotropic bimetals; moving screw dislocation; interfacial rigid lines; image force