

二维矩形域内 Stokes 流问题的 辛解析和数值方法*

徐新生, 王丞平, 孙发明

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(周哲玮推荐)

摘要: 给出了一种新的解析求解二维矩形域中的 Stokes 流动问题的方法——辛体系方法(Hamilton 体系方法). 在辛体系下, 基本问题归结为本征值和本征解的问题. 由于辛本征解之间存在辛正交共轭关系, 问题的解和边界条件均可以由本征解描述和表示. 利用辛本征解空间的完备性, 建立一套封闭的求解问题方法. 研究结果表明零本征值本征解描述了基本流动, 而非零本征值本征解则表示问题的局部效应. 数值结果给出了几种有代表性的流动情况, 显示了该求解方法对求解许多问题的有效性. 同时, 这种方法也为研究其他问题提供了一条思路.

关键词: Hamilton 体系; 辛本征值; 辛本征解; Stokes 流; 矩形域

中图分类号: O357.1 **文献标识码:** A

引 言

长期以来, 许多学者采用了数值或解析的方法对二维矩形域中的 Stokes 流问题进行研究探索. 研究主要集中在两类问题上: 一类是板驱动的空腔中的流动, 另一类是被外部流体驱动的剪切流动.

早期的板驱动的空腔中的流动问题中, 研究对象主要是单板驱动问题. Burggraf^[1] 和 Pan 等人^[2] 采用数值方法研究了该问题. Kelmanson 等人^[3] 采用积分方程法研究了双板驱动的矩形空腔中的流动, 空腔的两个端部平板以不同的速度沿相反的方向运动带动空腔中的流体运动. 研究中特别关注了流场中漩涡的产生和一些角涡结构. 此外, 林长圣^[4] 运用边界元法数值模拟了双板驱动的矩形空腔中的流动, 并揭示了流动的变化情况. Joseph 等人^[5] 借鉴了 Smith^[6] 给出的关于弹性薄板问题的双正交关系, 将其应用在单板驱动的矩形空腔中的流动问题上, 从而将流函数表示为 Papkovitch-Fadle 级数的形式. Joseph 等人的方法后来被 Sturges^[7] 应用在双板反向同速的算例中. Shankar^[8] 也采用 Papkovitch-Fadle 级数展开式来表示流函数, 但是在确定展开系数时, 他采用了最小总误差平方方法(least total error squared). 此外, 他还研究了单板驱动空腔中流动的漩涡结构和空腔外形比对于漩涡的生长、合并及生成一新漩涡的影

* 收稿日期: 2008-02-04; 修订日期: 2008-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672031); 博士学科点基金资助项目(20060141008)

作者简介: 徐新生(1957—), 男, 山东人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-411-84708393; E-mail: xsxu@dlut.edu.cn).

响. Gaskell 等人^[9]比较了 Joseph 等人^[5]的方法和 Shankar^[8]的方法,发现两种方法均能得到较精确的结果. Khuri^[10]将 Joseph 等人^[5]的方法引入到极坐标系中,研究了极坐标下板驱动的扇形空腔中的流动问题. Meleshko^[11-12]也采用叠加法从事了这方面的研究,他不但能够得到精确的结果,数值求解展开系数时计算量小,并且对于处理矩形域角点处的奇异点非常有效. Srinivasan^[13]也得到了一个关于流函数的双调和函数的解的表达式,它能够精确的表示出奇异角点处的问题的解,但是对于边界条件只能近似的满足.

Weiss 和 Florsheim^[14]采用解析方法和数值方法研究了剪切流动问题. Munson 和 Sturges^[15]也从实验上和理论上研究了旋转水槽中的二维流动问题. Shen 和 Floryan^[16]采用数值差分法模拟了 Taneda^[17]的试验,并且得到了相一致的结果. 他们还讨论了流场的流动特性,并且揭示了角漩涡、流线分离点的位置与空腔外形比之间的关系. O' Brien^[18]采用有限元法研究了在平行流过水槽的流动驱动下的水槽中的流体流动情况,并给出了分离流线的位置和漩涡强度与水槽外形之间的关系. 他所研究的驱动流动有库特(Couette)流、泊肃叶(Poiseuille)流和组合流动. Wang^[19]采用了本征向量展开法,并结合匹配法半解析半数值的求解了剪切流动流过周期性分布的凹槽的情况,给出了流动的流线.

以上所述的求解方法基本上是基于流函数表示的双协调方程. 速度和应力不能够直接得到,而需通过对流函数求导才能获得. 因而,这些方法求解混合边界问题是比较困难的. 本文采用了一种基于混合变量描述的辛体系方法. 在辛体系中,速度和应力等作为基本对偶变量. 因此可以直接得到速度和应力表达式. 该方法对于混合边界条件问题更加有效. 文中给出了一些具有代表性问题的数值结果.

1 辛体系下的基本问题

考虑直角坐标系下二维矩形空腔,其中充满密度为 ρ 、动力粘性系数为 μ 的不可压粘性流体. 坐标的原点位于空腔的几何中心, x 坐标轴沿空腔的宽度方向, y 轴沿空腔的高度方向. 空腔的宽度和高度分别为 $2l$ 和 $2b$. 侧边界条件为

$$u|_{y=\pm b} = u_{\pm b}(x), \quad v|_{y=\pm b} = v_{\pm b}(x), \quad (1)$$

其中 u 和 v 分别表示沿 x 向和 y 向的速度分量. 考虑侧边界条件(1), 记 $u_0 = [(y+b)u_{+b}(x) + (b-y)u_{-b}]/(2b)$, $v_0 = [(y+b)v_{+b}(x) + (b-y)v_{-b}]/(2b)$, 如果将速度写成 $u = u^* + u_0$, $v = v^* + v_0$ 的形式, 那么 u^* 和 v^* 将满足齐次侧边界条件, 即: 当 $y = \pm b$ 时, $u^* = 0$, $v^* = 0$. Stokes 流的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = -p + 2\mu\partial_x u = -p + 2\mu\partial_x u^* + 2\mu\partial_x u_0, \\ \sigma_y = -p + 2\mu\partial_y v = -p + 2\mu\partial_y v^* + 2\mu\partial_y v_0, \\ \tau_{xy} = \mu(\partial_y u + \partial_x v) = \mu(\partial_y u^* + \partial_x v^*) + \mu(\partial_y u_0 + \partial_x v_0), \end{cases} \quad (2)$$

其中 p 为压强. 相应的 Lagrange 函数可表示为

$$\begin{aligned} L(u^*, v^*) = & \mu[(\partial_x u^*)^2 + (\partial_y v^*)^2] + \frac{1}{2}\mu[(\partial_y u^*)^2 + (\partial_x v^*)^2] + \\ & \mu[2\partial_x u_0 \partial_x u^* + (\partial_x u_0)^2 + 2\partial_y v_0 \partial_y v^* + (\partial_y v_0)^2] + \frac{1}{2}\mu[2\partial_y u_0 \partial_y u^* + \\ & (\partial_y u_0)^2 + 2\partial_x v_0 \partial_x v^* + (\partial_x v_0)^2] + \mu(\partial_x v^* \partial_y u^* + \partial_x v^* \partial_y u_0 + \partial_x v_0 \partial_y u^* + \\ & \partial_x v_0 \partial_y u_0) - p\partial_x u^* - p\partial_y v^* - p\partial_x u_0 - p\partial_y v_0. \end{aligned} \quad (3)$$

通过对 Lagrange 函数进行变分, 可以得到流动的动量方程.

2 Hamilton 体系和对偶方程

让 x 模拟时间坐标, 记 $u^* = \partial_x u^*$ 、 $v^* = \partial_x v^*$, 讨论非齐次侧边条件下的问题并引入对偶变量

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\delta L}{\delta u^*} = -p + 2\mu(u^* + v^*) = \sigma_x, \\ p_2 = \frac{\delta L}{\delta v^*} = \mu(\partial_y u^* + v^*) + \mu(\partial_y u_0 + v_0) = \tau_{xy}, \end{cases} \quad (4)$$

可见速度的对偶变量就是应力. 记原变量和它的对偶变量的矢量形式分别为 $\mathbf{q} = \{u^*, v^*\}^T$ 和 $\mathbf{p} = \{\sigma, \tau\}^T$ (注意这里及下文中的 σ 和 τ 分别表示 σ_x 和 τ_{xy}), 则可以引入 Hamilton 函数 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{q} - L(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. 对 Hamilton 函数应用变分原理, 则可得 Hamilton 对偶方程 $\mathbf{q} = \delta H / (\delta \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = -\delta H / (\delta \mathbf{q})$ 和齐次侧边条件 $u^*|_{y=\pm b} = 0, v^*|_{y=\pm b} = 0$. 记 $\mathbf{w} = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T\}^T$ 为全状态向量, 对偶正则方程组写为

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{F}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{F} = \{-\partial_y v_0 - v_0, -\partial_y u_0 - v_0, 0, -4\mu\partial_y^2 v_0\}^T$, \mathbf{H} 为 Hamilton 算子阵, 式(5)的具体形式为

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_y & 0 & 0 \\ -\partial_y & 0 & 0 & 1/\mu \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_y \\ 0 & -4\mu\partial_y^2 & -\partial_y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\partial_y v_0 - v_0 \\ -\partial_y u_0 - v_0 \\ 0 \\ -4\mu\partial_y^2 v_0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

显然, 方程(6)中的第1和第2个表达式分别是连续方程和本构方程, 第3和第4个表达式是动量方程. 并且任何非齐次侧边界条件总是可以转化为对偶方程中的非齐次项 \mathbf{F} . 如果最初给定的侧边界条件是齐次的, 那么有 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. 方程(5)的解可以分为两部分: 齐次方程的通解和非齐次方程的特解. 对于通解, 考虑齐次方程

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{w}. \quad (7)$$

采用分离变量法求解齐次方程(5), 解的形式可以写成

$$\mathbf{w} = \mathbf{Y}_n(y) e^{\lambda_n x}, \quad (8)$$

其中 λ_n 是本征值, 而 $\mathbf{Y}_n(y)$ 满足特征方程

$$\mathbf{H}\mathbf{Y}_n = \lambda_n \mathbf{Y}_n. \quad (9)$$

可以证明以下性质^[20]: 1) 如果 λ_n 是本征值, $-\lambda_n$ 和复共轭 λ_n 也一定是本征值; 2) 非零本征值可分成 α 和 β 两个集合. 定义函数的内积为 $\langle \mathbf{Y}_n^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_m \rangle = \int_{-b}^b \mathbf{Y}_n^T \mathbf{J} \mathbf{Y}_m dy$, 其中 \mathbf{J} 是单位算子阵^[20], 那么本征解之间存在着辛正交共轭关系

$$\begin{cases} \langle (\mathbf{Y}_n^{(\alpha)})^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_m^{(\beta)} \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle (\mathbf{Y}_n^{(\beta)})^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_m^{(\alpha)} \rangle = -\delta_{nm}, \\ \langle (\mathbf{Y}_n^{(\alpha)})^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_m^{(\alpha)} \rangle = \langle (\mathbf{Y}_n^{(\beta)})^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_m^{(\beta)} \rangle = 0. \end{cases} \quad (10)$$

由于本征解空间的完备性^[21], 任何状态向量 \mathbf{w} 总是可以展开为本征解的线性组合表达式

$$\mathbf{w} = c_m \mathbf{w}_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \mathbf{Y}_n^{(\alpha)}(y) e^{\lambda_n x} + b_n \mathbf{Y}_n^{(\beta)}(y) e^{-\lambda_n x}], \quad (11)$$

其中 $w_0^{(m)}$ 表示零本征解.

3 辛本征值和辛本征解

给定齐次侧边界条件: 当 $y = \pm b$ 时, $u^* = 0, v^* = 0$. 如果本征值为 0 ($\lambda_n = 0$), 则方程 (9) 成为

$$HY_n = 0, \quad (12)$$

直接求解式 (12) 得到

$$w_0^{(1)} = Y_0^{(1)} = \{0, 0, 1, 0\}^T. \quad (13)$$

求解方程 $HY_0^{(2)} = Y_0^{(1)}$, 得到零本征值本征解的一阶 Jordan 型解, 由它组成的原问题的解为

$$w_0^{(2)} = Y_0^{(2)} + xY_0^{(1)} = \left\{ (b^2 - y^2)/(2\mu), 0, x, -y \right\}^T. \quad (14)$$

可以证明本问题中只存在两个零本征值本征解. 将其正交归一化, 则有

$$Y_0^{(a)} = w_0^{(1)}, Y_0^{(b)} = -[3\mu/(2b^3)]w_0^{(2)}, \quad (15)$$

其中, 第 1 个表达式为静止状态的流体, 第 2 个表达式为二维 Poisuille 流动. 他们都是基本流动, 且不随坐标 x 的增加而衰减.

如果本征值不为 0 ($\lambda \neq 0$), 求解方程 (9), 则可得到本征解. 本征解可以被分为两组: 关于 x 轴对称解和关于 x 轴反对称解. 在给定的侧边界条件下, 对称的和反对称的本征值分别满足式

$$2\lambda b - \sin(2\lambda b) = 0, \quad 2\lambda b + \sin(2\lambda b) = 0. \quad (16)$$

记本征值 λ 和 λ_j 分别对应于对称和反对称的本征解, 则相应的对称本征解 Y_i 和反对称本征解 Y_j 的表示式为

$$Y_i(\lambda, y) = \begin{cases} -\sin^2(\lambda b)\cos(\lambda y) + \lambda y\sin(\lambda y), \\ -\cos^2(\lambda b)\sin(\lambda y) + \lambda y\cos(\lambda y), \\ -2\lambda\mu(1 + \sin^2(\lambda b))\cos(\lambda y) + 2\lambda^2\mu y\sin(\lambda y), \\ 2\lambda\mu\sin^2(\lambda b)\sin(\lambda y) + 2\lambda^2\mu y\cos(\lambda y); \end{cases} \quad (17)$$

$$Y_j(\lambda_j, y) = \begin{cases} \cos^2(\lambda_j b)\sin(\lambda_j y) + \lambda_j y\cos(\lambda_j y), \\ -\sin^2(\lambda_j b)\cos(\lambda_j y) - \lambda_j y\sin(\lambda_j y), \\ 2\lambda_j\mu(1 + \cos^2(\lambda_j b))\sin(\lambda_j y) + 2\lambda_j^2\mu y\cos(\lambda_j y), \\ 2\lambda_j\mu\cos^2(\lambda_j b)\cos(\lambda_j y) - 2\lambda_j^2\mu y\sin(\lambda_j y). \end{cases} \quad (18)$$

于是问题的非零本征值本征解为

$$w_{nz} = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n Y_n^{(a)}(y)e^{\lambda_n x} + b_n Y_n^{(b)}(y)e^{-\lambda_n x}], \quad (19)$$

其中 $Y_n^{(a)} = Y_n(\lambda_n, y)$, $Y_n^{(b)} = Y_n(-\lambda_n, y)/M_n$ 和 $M_n = \langle (Y_n(\lambda_n, y))^T, J, Y_n(-\lambda_n, y) \rangle$ 是归一因子. 从本征解表达式 (19) 可以看出, 非零本征值本征解与零本征值本征解不同的是具有衰减的特点^[22].

既然已经得到了齐次方程 (7) 的零本征值本征解 (15) 和非零本征值本征解 (19), 接下来我们需要讨论非齐次方程 (5) 的特解. 由于本征解空间的完备性和本征解之间的辛正交归一关系, 方程 (5) 的非齐次项 F 可以展开为

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(x) Y_n^{(a)}(y) + d_n(x) Y_n^{(b)}(y)], \quad (20)$$

其中 $c_n = \langle \mathbf{F}^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_n^{(\beta)} \rangle$ 和 $d_n = -\langle \mathbf{F}^T, \mathbf{J}, \mathbf{Y}_n^{(\alpha)} \rangle$ 是展开系数, $n = 0$ 的情况(见方程(15)). 如果 \mathbf{w}^p 是方程的一个解, 那么有

$$\mathbf{w}^p = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n(x) \mathbf{Y}_n^{(\alpha)}(y) + F_n(x) \mathbf{Y}_n^{(\beta)}(y)]. \quad (21)$$

将式(20)和(21)代入方程(5)并求解关于 $E_n(x)$ 和 $F_n(x)$ 的微分方程, 得到

$$E_n(x) = a_n e^{\lambda_n x} + e_n(x) \quad \text{和} \quad F_n(x) = b_n e^{-\lambda_n x} + f_n(x),$$

其中 $e_n(x) = \int_0^x c_n(\xi) e^{\lambda_n(x-\xi)} d\xi$, $f_n(x) = \int_0^x d_n(\xi) e^{-\lambda_n(x-\xi)} d\xi$.

因此可以得到方程(5)的特解

$$\mathbf{w}^p = \left\{ (\mathbf{q}^p)^T, (\mathbf{p}^p)^T \right\}^T = \sum_{n=0}^{\infty} [e_n(x) \mathbf{Y}_n^{(\alpha)}(y) + f_n(x) \mathbf{Y}_n^{(\beta)}(y)]. \quad (22)$$

从而得到方程(5)的通解为

$$\mathbf{w} = c_n \mathbf{w}_0^{(m)} + \mathbf{w}_{\text{uz}} + \mathbf{w}^p = \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n e^{\lambda_n x} + e_n) \mathbf{Y}_n^{(\alpha)}(y) + (b_n e^{-\lambda_n x} + f_n) \mathbf{Y}_n^{(\beta)}(y)]. \quad (23)$$

最终对于非齐次边界条件(1), 问题的解的为所对应的解为

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^0, \quad (24)$$

其中 $\mathbf{w}^0 = \left\{ u_0, v_0, 0, 0 \right\} = \left\{ (\mathbf{q}^0)^T, (\mathbf{p}^0)^T \right\}^T$.

4 辛数值方法

问题的解还应该满足两个端部 ($x = \pm l$) 上的条件. 作为算例, 我们在这里不妨讨论两个端部为速度边界体条件的情况:

$$\mathbf{q}_{x=-l}(y) = \mathbf{q}_l(y), \quad \mathbf{q}_{x=l}(y) = \mathbf{q}_l(y). \quad (25)$$

由于本征值和本征解是复数, 因此复共轭本征值和其所对应的本征解均应考虑. 将式(24)代入边界条件(25)中, 得

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{-\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\alpha)} + a_n e^{-\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\alpha)} + b_n e^{\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\beta)} + b_n e^{\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\beta)}) = \mathbf{Q}_{-l}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\alpha)} + a_n e^{\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\alpha)} + b_n e^{-\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\beta)} + b_n e^{-\lambda_n l} \mathbf{q}_n^{(\beta)}) = \mathbf{Q}_l, \end{cases} \quad (26)$$

其中 $\mathbf{Q}_{-l} = \mathbf{q}_{-l} - [\mathbf{q}^p]_{x=-l} - [\mathbf{q}^0]_{x=-l}$, $\mathbf{Q}_l = \mathbf{q}_l - [\mathbf{q}^p]_{x=l} - [\mathbf{q}^0]_{x=l}$. 应用方程(10)中的辛正交共轭关系, 得到一个关于展开系数 a_n , a_n , b_n 和 b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 无限多个方程组成的方程组

$$\sum_n A_{nj}^{(k)} a_n + \sum_n A_{nj}^{(k)} a_n + \sum_n B_{nj}^{(k)} b_n + \sum_n B_{nj}^{(k)} b_n = Q_j^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

如果将方程(26)在它的前 $N+1$ 项之后截断, 就可以得到一个 $4(N+1)$ 个方程组成的方程组(27), 这个方程组中有 $4(N+1)$ 个未知量, a_n , a_n , b_n 和 b_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). 求解这个方程组, 即可得到问题的解. 另外, 如果我们在端部给定的是混合边界条件, 同样有类似的形式(27).

5 数值结果

取空腔宽度的一半 b 为特征长度, 特征时间为 $\sqrt{b/g}$ (g 为重力加速度). $U = u/\sqrt{bg}$, V

$= v / \sqrt{bg}$, $\sigma = \sigma \sqrt{b/g} / \mu$, $\tau = \tau \sqrt{b/g} / \mu$ 分别表示无量纲速度和无量纲应力; $X = x/b$ 和 $Y = y/b$ 分别为无量纲坐标. 无量纲化后, 矩形域的长度(空腔外形比)为 $L = l/b$. 在以下所有的算例中均为无量纲条件下的结果.

本节考虑齐次侧边界条件, 即: $u_0 = v_0 = 0$, 于是方程(5) 的非齐次项 F 为 0. 在齐次侧边界条件下, 如果通过任一垂直 X 轴的横截面的流量为 0, 那么方程(11) 中的零本征值本征解的展开系数为 0. 事实上, 速度端部条件可以分为两类: 分别为沿 X 和 Y 向的速度条件. 如果端部条件是沿 Y 向的速度条件, 那么这种流动就称为板驱动的流动; 如果是沿 X 向的速度条件, 则称为流过水槽的流动或者剪切流动. 如果在同一端部给定的不仅有速度, 还有应力, 那么就称为混合边界条件. 在本节的算例中, 给出了两种速度边界条件下的流动和混合边界条件下的流动. 在计算中取 $N = 20$.

5.1 单板驱动流动

考虑 Joseph 和 Sturges^[5] (以下简称 JS) 所研究的经典算例: 矩形空腔的外形比 $L = 5$, 端部边界条件为: $U(-5, Y) = V(-5, Y) = U(5, Y) = 0, V(5, Y) = 1$. 采用和 JS 一样条件, 计算结果表明: 在静止 ($X = -5$) 边界上, 计算得到的平均速度量级为 10^{-15} , 比 JS 的结果 10^{-9} 更接近于 0; 在运动边界 ($X = 5$) 上, 相对于给定边界速度 $V(5, Y) = 1$ 的平均速度偏差近似为 5.6%, 而 JS 的结果是 8.7%(注: 计算速度偏差时, 边界上 $Y = 1$ 点不包含在内, 因为这点上的速度为 0). 这说明采用辛体系方法计算所得的速度结果比 JS 的结果要好一些. 精度提高的主要原因是速度是 Hamilton 对偶方程的基本变量, 而端部边界条件也是速度边界条件, 因此计算结果能够精确地满足边界条件. 图 1 是流场的流线图, 它与 JS 给出的图形比较相符.

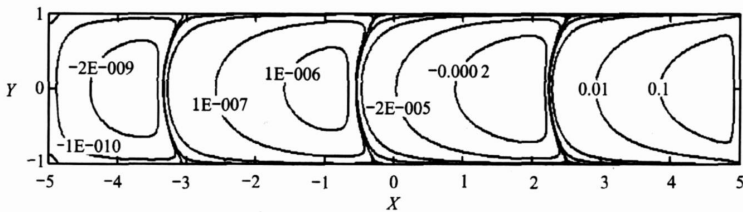


图 1 $L = 5$ 时, 单板驱动空腔中的流动的流线图

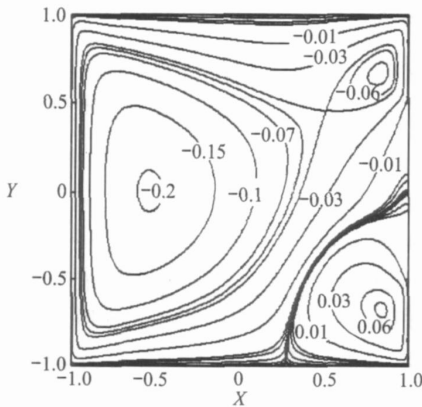


图 2 第 1 种情况多板驱动流动的流线

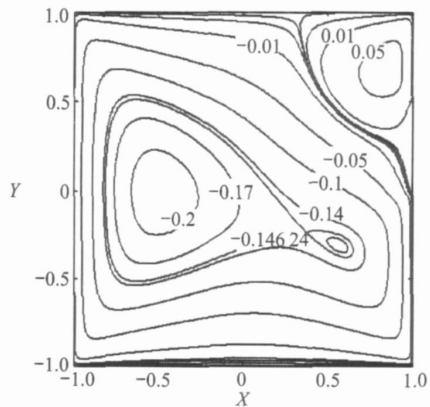


图 3 第 2 种情况多板驱动流动的流线

尽管上述的计算能够得到很好的结果, 但是由于在流场的动静边界交点($X = 5, Y = 1$) 和($X = 5, Y = -1$) 处不能同时满足两种条件, 因而存在奇异点, 因此需在计算时对奇异点进

行处理, 一个可行的方法是采用 3 点多项式插值来消除边界的奇异性, 比如在区间 $-1 \leq Y \leq -0.9$ 和 $0.9 \leq Y \leq 1$ 上进行光滑化. 对经处理过的边界进行计算, 可以发现, 计算精度会明显地提高. 以下的计算中均采用这种手法.

5.2 多板驱动流动

对于板驱动流动问题, 端部边界可以是多个运动的平板, 此时, 边界上只有 Y 向速度 V . 考虑两个多板驱动流动的算例, 2 个算例中的空腔外形比都是 $L = 1$. 第 1 个算例: 整个左端部边界是一个运动着的平板, 右端部边界是两个对称分布并且相向运动的平板. 具体的边界条件为: $V(-1, Y) = 1 (-1 \leq Y \leq 1)$; $V(1, Y) = -1 (0.5 \leq Y \leq 1)$, $V(1, Y) = 0 (-0.5 < Y < 0.5)$, $V(1, Y) = 1 (-1 \leq Y \leq -0.5)$. 第 2 个算例: 整个左端部边界是 1 个运动着的平板, 右端部边界是 2 个非对称分布并且相背离运动的平板. 边界条件为: $V(-1, Y) = 1 (-1 \leq Y \leq 1)$; $V(1, Y) = 1 (0.5 \leq Y \leq 1)$, $V(1, Y) = 0 (0 < Y < 0.5)$, $V(1, Y) = -1 (-1 \leq Y \leq 0)$. 图 2 和图 3 分别给出了以上两个算例的流线图. 这两个流线图展示了流场中的旋涡的位置、数量的分布情况. 此外, 从流线图中还可以看出: 右端运动边界的位置, 尺寸大小不但影响流线的形状, 而且还决定旋涡的位置和强度.

5.3 混合边界流动

针对混合边界问题, 这里给出 1 个算例. 边界条件是: $\sigma(-1, Y) = \tau(-1, Y) = 0 (0 < Y \leq 1)$, $U(-1, Y) = 0 (-1 \leq Y \leq 0)$, $V(-1, Y) = 1 (-1 \leq Y \leq 0)$; $U(1, Y) = V(1, Y) = 0 (-1 \leq Y \leq 1)$. 图 4 给出了流动的速度矢量图和流线图. 通过比较知, 混合边界条件下的流动与速度边界条件下的流动在局部结构上有一定的差异: 如图 4 所示, 在流场的左上角处有一个角旋涡. 从图中还可以看出: 运动边界影响着整个流场, 并且, 距离运动边界越远, 流动受到运动边界的影响就越小.

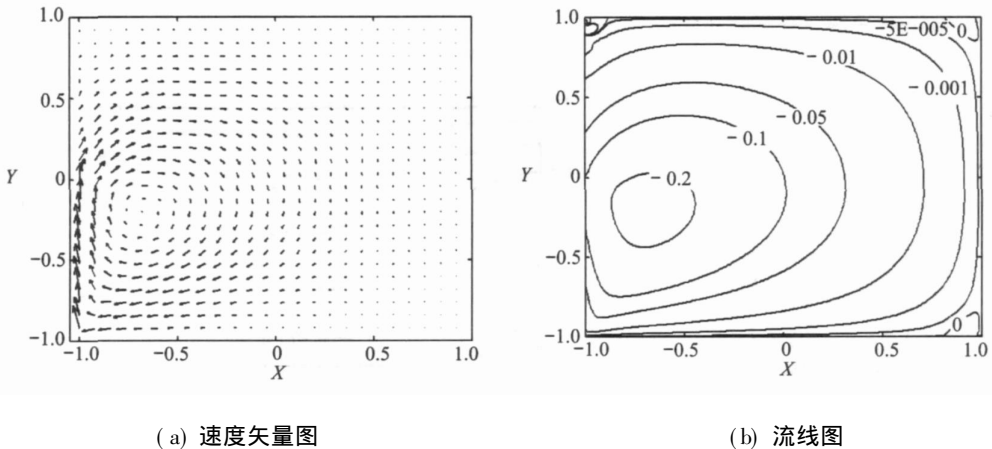


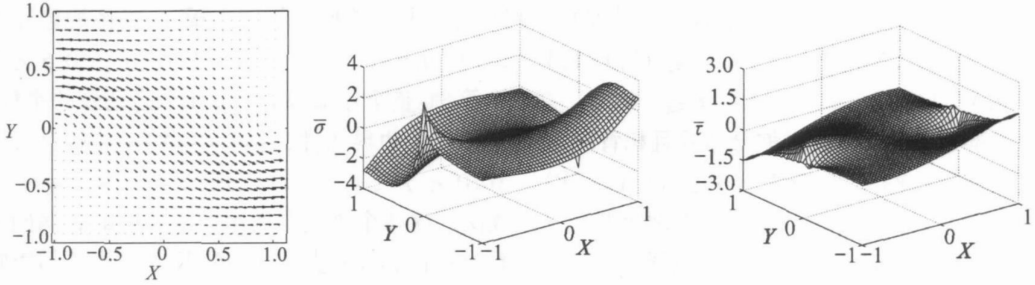
图 4 混合边界条件下的流动

5.4 流过水槽的流动和剪切流动

如果两端边界上只有沿 X 方向的速度 U , 那么这种流动就成为流过水槽的流动或者剪切流动. 由于这种流动中, 流过空腔横截面的流量不为 0, 因此在求解问题时, 需要考虑基本流动, 即零本征值本征解.

在本小节中, 我们首先考虑一个流过水槽的流动, 空腔的外形比为 $L = 1$. 流动的边界条件为: $U(X = -1, Y) = 2(Y - Y^2) (0 \leq Y \leq 1)$, $U(X = -1, Y) = 0 (-1 < Y < 0)$; $U(X =$

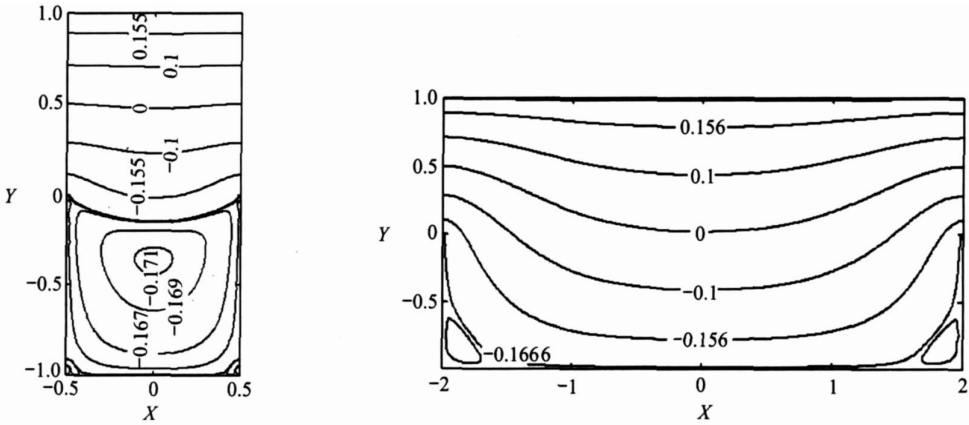
$1, Y) = 0 (0 < Y \leq 1), U(X = 1, Y) = -2(Y + Y^2) (-1 \leq Y \leq 0)$. 从图 5(a) 可以很清楚地了解到流场的流动分布情况. 从图 5(b) 中可以看出在点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 处, 流场的正应力远大于其它地方, 这是因为这两点及其附近处的流体速度的梯度比较大. 此外, 从图 5(c) 中也可以发现在入口和出口处, 剪切应力出现了一些波动, 引起这个现象的原因可能有两点: 第 1, 将方程 (26) 在第 N 项之后截断, N 的取值略小; 第 2, 给定的边界条件 $V|_{X=\pm L} = 0$ 有些苛刻.



(a) 速度矢量图 (b) 正应力分布图 (c) 切应力分布图

图 5 $L = 1$ 时, 流过水槽的流动

第 2 个算例是流过水槽的剪切流动, 边界条件为: $U(X = -L, Y) = U(X = L, Y) = 2(Y - Y^2) (0 \leq Y \leq 1), U(X = -L, Y) = U(X = L, Y) = 0 (-1 \leq Y < 0)$. 图 6 给出了当空腔外形比 $L = 0.5$ 和 $L = 2$ 时, 流动的流线图形. 这两个图形展示了空腔外形比如何影响其中的流动的情况. 从图中不难看出这样的规律: 当 L 增大到一定程度时, 远离两个端部边界的流动趋于零本征解所表示的基本流动; 相反, 如果 L 减小到一定程度时, 水槽中的流动近似为板驱动流动.



(a) $L = 0.5$ (b) $L = 2$

图 6 剪切流动的流线图

注意到以上所给出的这些图形中, 在端部边界附近都会出现一些小的波动, 这些波动是由于将方程 (26) 在第 N 项之后截断而导致的. 如果选取更多的本征解, 结果的图像中边界的曲线将会更加平滑. 对于研究流场的流线、速度和应力类型的问题, 取 $N = 20$ 已经足以满足需要, 并且不会影响到流场的整体结构和流动的性质. 值得指出的是: 辛体系方法在三维流动问题中同样是可行的, 只不过需要在求解过程中采用新的技术.

6 结 论

辛体系方法是一个混合变量的方法,它是在辛空间中研究问题.在辛空间中,本征解之间满足辛正交共轭关系,因此问题的解和边界条件都可以展开为本征解的线性组合.从而原问题归结为本征值和本征解的求解问题.当求解得到本征解后,问题的解可以直接通过直接求解一个代数方程组而得到.零本征值本征解表示基本流动,它由通过空腔横截面上的流量决定,并且不受边界的影响.非零本征值本征解则描述了局部边界效应问题,它随着距离边界距离的增大而衰减.在一般情况下,空腔横截面上是会有有一定的流量通过,因而在讨论中必须同时考虑零本征值本征解和非零本征值本征解;作为特殊情况,该流量为 0,则只需要考虑非零本征值本征解即可.采用辛体系方法在求解问题简单和有效,且容易推广到其他的领域和方向的问题中.

[参 考 文 献]

- [1] Burggraf O R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows[J]. *J Fluid Mech*, 1966, **24**(1): 113-151.
- [2] Pan F, Acrivos A. Steady flows in rectangular cavities[J]. *J Fluid Mech*, 1967, **28**(4): 643-655.
- [3] Kelmanson M A, Lonsdale B. Eddy genesis in the double-lid driven cavity[J]. *Q J Mech Appl Math*, 1996, **49**(4): 633-655.
- [4] 林长圣. 双板驱动矩形空腔 STOKES 流动的数值模拟[J]. *南京工程学院学报(自然科学版)*, 2004, **2**(4): 29-35.
- [5] Joseph D D, Sturges L. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems: Part II[J]. *SIAM J Appl Math*, 1978, **34**(1): 7-26.
- [6] Smith R C T. The bending of a semi-infinite strip[J]. *Austral J Sci Res*, 1952, **5**(2): 227-237.
- [7] Sturges L D. Stokes flow in a two-dimensional cavity with moving end walls[J]. *Phys Fluids*, 1986, **29**(5): 1731-1734.
- [8] Shankar P N. The eddy structure in Stokes flow in a cavity[J]. *J Fluid Mech*, 1993, **250**(1): 371-383.
- [9] Gaskell P H, Savage M D, Summers J L, et al. Stokes flow in closed, rectangular domains[J]. *Appl Math Model*, 1998, **22**(9): 727-743.
- [10] Khuri S A. Biorthogonal series solution of Stokes flow problems in sectorial regions[J]. *SIAM J Appl Math*, 1996, **56**(1): 19-39.
- [11] Meleshko V V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity[J]. *Proc Roy Soc London, Ser A*, 1996, **452** (1952): 1999-2022.
- [12] Meleshko V V, Goniiko A M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle[J]. *Proc Roy Soc London, Ser A*, 1997, **453**(1965): 2139-2160.
- [13] Srinivasan R. Accurate solutions for steady plane flow in the driven cavity — I : Stokes flow[J]. *Zeitschrift f r Angewandte Mathematik und Physik*, 1995, **46**(4): 524-545.
- [14] Weiss R F, Florsheim B H. Flow in a cavity at low Reynolds number[J]. *Phys Fluids*, 1965, **8**(9): 1631-1635.
- [15] Munson B R, Sturges L D. Low Reynolds number flow in a rotating tank with barriers[J]. *Phys Fluids*, 1983, **26**(5): 1173-1176.
- [16] Shen C, Floryan J M. Low Reynolds number flow over cavities[J]. *Phys Fluids*, 1985, **28**(11): 3191-3202.

- [17] Taneda S. Visualization of separating Stokes flows[J]. J Phys Soc Jpn , 1979, **46**(6): 1935-1942.
- [18] O'Brien V. Closed streamlines associated with channel flow over a cavity[J]. Phys Fluids , 1972, **15** (12): 2089-2097.
- [19] Wang C Y. Flow over a surface with parallel grooves[J]. Phys Fluids , 2003, **15**(5): 1114-1121.
- [20] Zhong W X. Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004, 188-191.
- [21] 张鸿庆, 阿拉坦仓, 钟万勰. Hamilton 体系与辛正交系的完备性[J]. 应用数学和力学, 1997, **18** (3): 217-221.
- [22] 徐新生, 王尔平. Stokes 流问题中的辛本征解方法[J]. 力学学报, 2006, **38**(5): 682-687.

Analytical and Numerical Method of Symplectic System for Stokes Flow in the Two-Dimensional Rectangular Domain

XU Xin-sheng, WANG Ga-ping, SUN Fa-ming

(State Key Laboratory of Structure Analysis for Industrial Equipment ; Department
of Engineering Mechanics , Dalian University of Technology , Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: A new analytical method of symplectic system, Hamiltonian system, was introduced for solving the problem of the Stokes flow in two-dimensional rectangular domain. In the system, the fundamental problem was reduced to eigenvalue and eigensolution problem, and the solution and boundary conditions can be expanded by eigensolutions employing adjoint relationships of the symplectic orthonormalization between the eigensolutions. The close method of the symplectic eigensolution was presented based on the completeness of the symplectic eigensolution space. The results explain that fundamental flows can be described by zero eigenvalue eigensolutions and local effects by nonzero eigenvalue eigensolutions. Numerical examples give various flows in rectangular domain and show the effectiveness of the method for solving a variety of problems. Meanwhile, the method is a path for solving other problems.

Key words: Hamiltonian system; symplectic eigenvalues; symplectic eigensolutions; Stokes flow; rectangular domain