文章编号: 1000-0887(2008)06-0676-11　　© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

周期底地形上内波的 Hamilton 长波展开*

周红燕，　朴大雄

(中国海洋大学 应用数学研究中心, 山东 青岛 266071)

(王银邦推荐)

摘要：　给出了周期底部边界条件下两层密度成层流体中 2-维非线性长波问题的 Hamilton 公式. 从该公式出发, 应用 Hamilton 摄动理论, 导出了底地形短尺度变化下描述双向长波运动的有效 Boussinesq 方程和描述单向长波运动的近似 KdV 方程. 结果的推导都是在多重尺度算子渐近分析理论框架下完成的.

关　键　词：　内波;　Hamilton 摄动理论;　势函数;　Dirichlet-Neumann 算子;　Boussinesq 方程; KdV 方程

中图分类号：　O302　　　文献标识码：　A

引　　言

在海洋内部, 当出现温度或密度跃层时, 内波现象极为明显. 激励内波的因素可以来自海面、海底或海洋内部, 或兼而有之, 如: 风应力、不平海底、水面或水下物体的运动等. 海洋内波是分析整个海洋中能量收支平衡时必须研究的一个重要物理过程, 对它的研究不仅在整个海洋动力学的研究中占重要的地位, 而且对海洋环境与资源的开发和保护, 推动其它相关学科的深入研究和发展都具有重要的应用价值.

上个世纪下半叶起, 探索水波的 Hamilton 结构及其对称性与守恒律成为水波动力学理论研究的一个重要分支, 开创了研究水波问题的新体系. Zakharov 首先发现无粘、无旋、不可压、密度均匀假设下的水波运动方程构成了 Hamilton 动力系统, 其中正定的 Hamilton 泛函是流体的总能量, 自由面波高 η 和自由面上的速度势 φ 为正则变量, 实际上 η 是无穷维广义坐标, φ 是相应的广义动量. Zakharov 的工作开辟了探索水波问题的 Hamilton 正则结构的道路, 这为水波研究提供了新的途径[1]. 文献[2] 中回顾了关于水波的 Hamilton 描述所取得的丰富成果.

近期对水波的研究成果[3-10] 中大多采用的是大振幅长波运动模型. 其中, Craig、Guyenne 与 Kalisch 从 Hamilton 摄动理论出发运用 Dirichlet-Neumann 算子收敛的 Taylor 级数展开, 研究了内波的 Hamilton 长波问题, 其中下层流体是平底边界[7]. Craig、Guyenne、Nicholls 等人应用 Hamilton 摄动理论研究了粗糙底部上表面水波的 Hamilton 长波问题[8]. 但是尚未发现有人考虑周期底部变化对内波的影响. 本文进一步推广文献[7-8] 中的工作, 在下层流体底部地形关于短尺度水平变量是周期的条件下, 给出了两层密度成层理想流体域中 2-维非线性长波问题

* 收稿日期：　2007-11-27;　修订日期：　2008-04-14
作者简介：　周红燕(1975—), 女, 山东人, 博士生(E-mail: zhymath@yahoo.com.cn);
朴大雄, 教授(联系人. Tel: +86-532-85901052; E-mail: dxpiao@ouc.edu.cn).

的 Hamilton 公式,其中振幅的变化与流体深度是同阶的. 从这个公式出发,本文应用 Hamilton 摄动理论导出了 Boussinesq 和 Korteweg-de Vries (KdV) 尺度机制下内波的运动方程.

为了公式推导的方便简洁,本文将上层流体的自由面假设为刚盖条件. 当然,借助附录中本文给出的自由面非刚盖条件下的上层流体的 Dirichlet-Neumann 算子的 Taylor 展式,完全可以将本文的结果推广到非刚盖情形. 此外, 本文 1.3 节和附录中关于上层和下层流体域的 Dirichlet-Neumann 算子的 Taylor 展式是进行摄动分析的关键,并且这些展式对今后的进一步研究也将有所裨益.

1 运动方程

1.1 基本方程和边界条件

本文考虑两层不可混溶的常密度不可压的无粘流体的无旋运动. 取静止界面向右为 x 轴, 垂直向上为 z 轴正向, 上、下层流体密度分别为 ρ_1、ρ_2 且 $\rho_2 > \rho_1$. 流体域 $\{(x,z): -h_2+\beta(x) < z < h_1\}$ 可分为 $S_1(t;\eta) = \{(x,z): \eta(x) < z < h_1\}$ 和 $S_2(t;\eta,\beta) = \{(x,z): -h_2+\beta(x) < z < \eta(x)\}$ 两部分, 其中 $\beta(x)$ 表示流体底部上的扰动且为周期函数, $\eta(x)$ 表示界面的位移.

由于流体无旋, 其速度可由势函数给出. 设 $S_1(t;\eta)$ 中 $\boldsymbol{u}_1(x,z,t) = \nabla\varphi_1(x,z,t)$, $S_2(t;\eta,\beta)$ 中 $\boldsymbol{u}_2(x,z,t) = \nabla\varphi_2(x,z,t)$, 且这两个势函数满足

$$\Delta\varphi_1 = 0, \qquad (x,z) \in S_1(t;\eta), \tag{1}$$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \qquad (x,z) \in S_2(t;\eta,\beta). \tag{2}$$

在底部边界 $\{z = h_2 + \beta(x)\}$ 上,势函数满足 Neumann 边界条件

$$\nabla\varphi_2 \cdot \boldsymbol{N}(\beta) = 0, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{N}(\beta) = (1+|\partial_x\beta|^2)^{-1/2}(\partial_x\beta, -1)$ 为边界的外单位法向量. 上表面是刚性边界, 即

$$\partial_z\varphi_1(x,h_1) = 0. \tag{4}$$

界面 $\{(x,z): z = \eta(x,t)\}$ 满足 3 个边界条件: 2 个运动学边界条件

$$\partial_z\varphi_1 = \partial_t\eta + \partial_x\eta\partial_x\varphi_1, \qquad z = \eta; \quad \partial_z\varphi_2 = \partial_t\eta + \partial_x\eta\partial_x\varphi_2, \qquad z = \eta \tag{5}$$

和 1 个关于力平衡的物理条件, 即 Bernoulli 条件

$$\rho_1\left(g\eta + \partial_t\varphi_1 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_1|^2\right) = \rho_2\left(g\eta + \partial_t\varphi_2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_2|^2\right), \qquad z = \eta, \tag{6}$$

其中 g 是重力加速度.

1.2 界面的 Lagrange 算子

本节将给出界面的 Lagrange 算子和 Hamilton 算子.

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\int_{-h_2+\beta}^{\eta}\rho_2|\nabla\varphi_2(x,z)|^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\int_{\eta}^{h_1}\rho_1|\nabla\varphi_1(x,z)|^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

势能为

$$V = \int_{\mathbf{R}}\int_{-h_2+\beta}^{\eta}\rho_2 gz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}}\int_{\eta}^{h_1}\rho_1 gz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}g(\rho_2-\rho_1)\eta^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}g\rho_2(-h_2+\beta)^2\mathrm{d}x. \tag{8}$$

由于 $\beta(x)$ 是周期函数, 则可将 $\int_{\mathbf{R}}g\rho_2(-h_2+\beta)^2\mathrm{d}x$ 正规化为0. 与力学中的分析类似, 系统的 Lagrange 算子为

$$L = T - V. \tag{9}$$

为了在分析过程中使动能有一个更方便的表达式, 本文将引入两流体域的 Dirichlet-Neumann 算子. 设在界面 $\{(x, \eta(x, t))\}$ 上, 两势函数的边界值分别为 $\Phi_1(x) = \varphi_1(x, \eta(x))$ 和 $\Phi_2(x) = \varphi_2(x, \eta(x))$, 定义关于流体域 $S_1(\eta)$ 和 $S_2(\eta, \beta)$ 的 Dirichlet-Neumann 算子为

$$\begin{cases} G_1(\eta)\Phi_1 = [\nabla\varphi_1 \cdot (\partial_x\eta, -1)]_{z=\eta}, \\ G_2(\eta, \beta)\Phi_2 = [\nabla\varphi_2 \cdot (-\partial_x\eta, 1)]_{z=\eta}. \end{cases} \tag{10}$$

应用 Green 恒等式, 动能(7)可被改写为

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \rho_2 \Phi_2 G_2 \Phi_2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \rho_1 \Phi_1 G_1 \Phi_1 \mathrm{d}x. \tag{11}$$

运动学边界条件(5)变为

$$\partial_t \eta = -G_1(\eta)\Phi_1 = G_2(\eta, \beta)\Phi_2. \tag{12}$$

于是就得到了 Lagrange 算子的一个合理表达式

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \rho_2 \dot{\eta} G_2^{-1}\dot{\eta}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \rho_1 \dot{\eta} G_1^{-1}\dot{\eta}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} g(\rho_2 - \rho_1)\eta^2 \mathrm{d}x. \tag{13}$$

定义

$$\xi(x) = \delta_{\dot{\eta}} L = \rho_2 G_2^{-1}\dot{\eta} + \rho_1 G_1^{-1}\dot{\eta} = \rho_2\Phi_2(x) - \rho_1\Phi_1(x), \tag{14}$$

由 Benjamin 和 Bridges[11] 可知它恰是 η 的共轭变量.

利用式(12)和式(14)式可得到 $\dot{\eta} = G_1(\rho_2 G_1 + \rho_1 G_2)^{-1}\xi G_2$, 因此系统的 Hamilton 算子为

$$H(\eta, \xi) = T + V = \\ \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \xi G_1(\rho_1 G_2 + \rho_2 G_1)^{-1} G_2 \xi \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} g(\rho_2 - \rho_1)\eta^2 \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Hamilton 算子的这种表示形式曾在文献[12]中出现过. 由上可知界面的运动方程为一个古典 Hamilton 系统形式, 即

$$\partial_t \eta = \delta_\xi H, \quad \partial_t \xi = -\delta_\eta H. \tag{16}$$

1.3 Dirichlet-Neumann 算子

本节将给出上层流体域 $S_1(\eta)$ 和下层流体域 $S_2(\eta, \beta)$ 的 Dirichlet-Neumann 算子的解析式.

1.3.1 上层流体域 $S_1(\eta)$ 的 Dirichlet-Neumann 算子

设调和函数的一组特殊基 $\varphi_{1,k} = a(k)\mathrm{e}^{kz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + b(k)\mathrm{e}^{-kz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 满足

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad (x, z) \in S_1(\eta); \quad \varphi_1(x, \eta) = \Phi_1; \ \partial_z\varphi_1(x, h_1) = 0, \tag{17}$$

则得到 $a(k) = \mathrm{e}^{-kh_1}/(\mathrm{e}^{kh_1} + \mathrm{e}^{-kh_1})$, $b(k) = \mathrm{e}^{kh_1}/(\mathrm{e}^{kh_1} + \mathrm{e}^{-kh_1})$. 基在界面处的边界值为

$$\Phi_{1,k}(x) = \varphi_{1,k}(x, \eta) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!}\eta^j k^j (a(k) + (-1)^j b(k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{18}$$

将 $\varphi_{1,k}(x, \eta)$ 在界面上的法向导数

$$\nabla\varphi_{1,k} \cdot (\partial_x\eta, -1)|_{z=\eta} = \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!}\eta^j (\partial_x\eta)(\mathrm{i}k^{j+1})(a(k) + (-1)^j b(k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \\ \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!}\eta^j (k^{j+1})(a(k) + (-1)^{j+1} b(k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{19}$$

与 $G_1\Phi_{1,k}$ 的 Taylor 级数展式作比较, 可得到常数项为 $G_1^{(0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = k\,\mathrm{th}(kh_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 由 $D = -\mathrm{i}\partial_x$ 来记 Fourier 乘法算子, 则上式变为

$$G_1^{(0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = D\,\mathrm{th}(h_1 D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{20}$$

比较 $G_1\Phi_{1,k}$ 的 Taylor 级数展式与式(18)、(19)中的高次项, 可得到

$$G_1^j(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -\frac{1}{j!}D\eta^j D^j (a(D) + (-1)^j b(D))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} -$$

$$\sum_{l=1}^{j} G_1^{(j-l)} \frac{1}{l!}\eta^l D^l(a(D)+(-1)^l b(D))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{21}$$

由此可得出 $G_1(\eta)$ 作为 η 的函数的 Taylor 系数的递归式,本文仅给出它的前两阶项

$$\begin{cases} G_1^{(1)}(\eta) = -D\eta D + G_1^{(0)}\eta G_1^{(0)}, \\ G_1^{(2)}(\eta) = -\dfrac{1}{2}(D^2\eta^2 G_1^{(0)} + G_1^{(0)}\eta^2 D^2 - 2G_1^{(0)}\eta G_1^{(0)}\eta G_1^{(0)}). \end{cases} \tag{22}$$

1.3.2 下层流体域 $S_2(\eta,\beta)$ 的 Dirichlet-Neumann 算子

设底部变化 $\beta(x)$ 的阶为 $O(1)$,且界面位移 $\eta(x)$ 较小. 下面将寻求椭圆边值问题

$$\begin{cases} \Delta\varphi_2 = 0, \quad (x,z)\in S_2(\eta,\beta), \\ \nabla\varphi_2\cdot(\partial_x\beta,-1)\mid_{z=-h_2+\beta} = 0,\ \varphi_2(x,\eta) = \Phi_2 \end{cases} \tag{23}$$

解的表达式.

设流体域 $S_2(\eta,\beta)$ 中的基本调和函数族为

$$\varphi_{2,k} = \frac{\mathrm{ch}(k(z+h_2))}{\mathrm{ch}(kh_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{sh}(pz)\ L(\widehat{\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\mathrm{d}p, \tag{24}$$

算子 $L(\beta)$ 为隐式形式

$$L(\beta) = -B(\beta)A(\beta), \tag{25}$$

其中算子 $A(\beta)$、$C(\beta)$ 为

$$A(\beta)\Phi_2 = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{sh}(\beta(x)k)\mathrm{sech}(h_2k)\ \widehat{\Phi_2(k)}\mathrm{d}k,$$

$$C(\beta)\Phi_2 = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{ch}((-h_2+\beta(x))k)\ \widehat{\Phi_2(k)}\mathrm{d}k,$$

且 $B(\beta) = C(\beta)^{-1}$.

$G_2(\eta,\beta)$ 关于 η 的展式(关于 β 是一致的)为

$$G_2(\eta,\beta) = \sum_l G_2^{(l)}(\eta,\beta). \tag{26}$$

定义 Dirichlet-Neumann 算子为

$$G_2(\eta,\beta)\varphi_{2,k}(x,\eta) = [\partial_z\varphi_{2,k} - \partial_x\eta\partial_x\varphi_{2,k}]_{z=\eta}, \tag{27}$$

其中

$$\partial_z\varphi_{2,k} = k\frac{\mathrm{sh}(k(z+h_2))}{\mathrm{ch}(kh_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \int p\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{ch}(pz)\ L(\widehat{\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\mathrm{d}p, \tag{28}$$

$$\partial_x\varphi_{2,k} = \mathrm{i}k\frac{\mathrm{ch}(k(z+h_2))}{\mathrm{ch}(kh_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \int \mathrm{i}p\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{sh}(pz)\ L(\widehat{\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\mathrm{d}p. \tag{29}$$

将 $\varphi_{2,k}$ 关于 η 的 Taylor 展式和式(26)一并带入式(27),就可得到

$$G_2^{(0)} = D\mathrm{th}(h_2D) + DL(\beta),\ G_2^{(1)} = D\eta D - G_2^{(0)}\eta G_2^{(0)},$$

$$G_2^{(2)} = -\frac{1}{2}(D^2\eta^2 G_2^{(0)} + G_2^{(0)}\eta^2 D^2 - 2G_2^{(0)}\eta G_2^{(0)}\eta G_2^{(0)}).$$

2 界面的长波展开

本节将在古典尺度机制下研究小振幅长波问题,其中,流体层渐近深度是有限的,即 $0 < h_1, h_2 < +\infty$,且波振幅和波长满足 $a/h_1 \simeq a/h_2 \simeq (h_1/\lambda)^2 \simeq (h_2/\lambda)^2 \simeq \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 \ll 1$ 是小参数.

2.1 Boussinesq 机制下内波的运动方程

为了应用 Hamilton 摄动理论,引入如下形式的振幅尺度和空间尺度

$$x' = \varepsilon x,\quad \varepsilon^2\eta' = \eta,\quad \varepsilon\xi' = \xi. \tag{30}$$

由此可知道 η 和 $u = \partial_x\xi$ 的量级均为 $O(\varepsilon^2)$，这样就将小参数引入到了界面问题的 Hamilton 算子(15) 中．为了使参数的依赖性明显化，用下式来描述 Dirichlet-Neumann 算子

$$\begin{cases} G_1(\eta) = D\operatorname{th}(Dh_1) + (-D\eta D + D\operatorname{th}(Dh_1)\eta D\operatorname{th}(Dh_1)) + O(|\eta|^2|D|^3), \\ G_2(\eta,\beta) = D\operatorname{th}(Dh_2) + DL(\beta) + D\eta D - (D\operatorname{th}(Dh_2) + \\ \qquad DL(\beta))\eta(D\operatorname{th}(Dh_2) + DL(\beta)) + O(|\eta|^2|D|^3(1+|L(\beta)|)^3). \end{cases} \tag{31}$$

其中算子 D 满足$D = D_x + \varepsilon D_{x'}$，当它作用在仅为 x 的函数上时$D = D_x$，作用在仅为 x' 的函数上时 $D = \varepsilon D_{x'}$．

在式(30) 给出的尺度变换下，上层流体域的 Dirichlet-Neumann 算子 $G_1(\eta)$ 变为

$$\begin{aligned} G_1(\eta') ={}& \varepsilon D_{x'}\operatorname{th}(\varepsilon h_1 D_{x'}) + (-\varepsilon^4 D_{x'}\eta' D_{x'} + \\ & \varepsilon^4 D_{x'}\operatorname{th}(\varepsilon h_1 D_{x'})\eta' D_{x'}\operatorname{th}(\varepsilon h_1 D_{x'})) + O(\varepsilon^8) = \\ & \varepsilon^2 h_1 D_{x'}^2 + \varepsilon^4\left(-D_{x'}\eta' D_{x'} - \frac{1}{3}h_1^3 D_{x'}^4\right) + \\ & \varepsilon^6\left(\frac{2}{15}h_1^5 D_{x'}^6 + h_1^2 D_{x'}^2\eta' D_{x'}^2\right) + O(\varepsilon^8). \end{aligned} \tag{32}$$

算子 $D\operatorname{th}(h_2D)\eta DL(\beta)$、$DL\eta DL$ 和$DL(\beta)$ 近似为

$$\begin{aligned} D\operatorname{th}(h_2D)\eta DL(\beta) ={}& -\varepsilon^3 D_x^2\operatorname{th}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'} + \\ & \varepsilon^4 D_x^2\operatorname{th}(h_2D_x)B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'}^2 - \\ & \varepsilon^4 D_x\operatorname{th}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'}^2 - \\ & \varepsilon^4 h_2 D_x^2\operatorname{sech}(h_2D_x)^2 B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} - \\ & \varepsilon^4 D_x\operatorname{th}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} DL\eta DL ={}& \varepsilon^3 D_x B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)D_x\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'} - \\ & \varepsilon^4 D_x B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)D_x\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)\times \\ & B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'}^2 + \\ & \varepsilon^4 D_x B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)\eta'(x')D_{x'}^2 - \\ & \varepsilon^4 h_2 D_x B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)D_x\operatorname{th}(h_2D_x)\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} + \\ & \varepsilon^4 D_x B_0(\beta)\beta(x)\operatorname{ch}(\beta(x)D_x)D_x\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} - \\ & \varepsilon^4 D_x B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)\times \\ & D_x\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} + \\ & \varepsilon^4 B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)D_x\operatorname{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta'(x')D_{x'} + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} DL(\beta) ={}& -\varepsilon D_x B_0(\beta)\beta(x)D_{x'} - \varepsilon^2 B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^2 + \varepsilon^2 D_x B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)\times \\ & B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^2 + \varepsilon^3\frac{1}{2}h_2^2 D_x B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^3 - \varepsilon^3\frac{1}{6}D_x B_0(\beta)\beta(x)^3 D_{x'}^3 + \\ & \varepsilon^3\frac{1}{2}D_x B_0(\beta)b(x)^2\operatorname{ch}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^3 + \\ & \varepsilon^3 D_x B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^3 - \\ & \varepsilon^3 D_x B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^3 + \\ & \varepsilon^4\frac{1}{2}h_2^2 B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4 - \varepsilon^4\frac{1}{6}B_0(\beta)\beta(x)^3 D_{x'}^4 + \\ & \varepsilon^4\frac{1}{2}B_0(\beta)b(x)^2\operatorname{ch}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4 - \end{aligned}$$

$$\varepsilon^4\frac{1}{2}h_2^2D_xB_0(\beta)b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4+$$
$$\varepsilon^4\frac{1}{6}D_xB_0(\beta)[b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)^3D_{x'}^4+$$
$$b(x)^3\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4]-$$
$$\varepsilon^4\frac{1}{2}D_xB_0(\beta)b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)b(x)^2\mathrm{ch}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4-$$
$$\varepsilon^4\frac{1}{2}D_xB_0(\beta)b(x)^2\mathrm{ch}(b(x)D_x)B_0(\beta)b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^4-$$
$$\varepsilon^4D_xB_0(\beta)b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\mathrm{sh}(\beta(x)D_x)D_x\mathrm{sech}(h_2D_x)\times$$
$$B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta(x')D_{x'}+$$
$$\varepsilon^4B_0(\beta)\mathrm{sh}(\beta(x)D_x)D_x\mathrm{sech}(h_2D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}\eta(x')D_{x'}+O(\varepsilon^5),\tag{35}$$

其中 $b(x)=\beta(x)-h_2$, 且 $B_0(\beta)$ 为算子 $\mathrm{ch}(b(x)D_x)$ 的逆, 它作用在短尺度 x 的函数上.

由式(32)~(35)且保留直到 $O(\varepsilon^3)$ 阶的项, 可得到Hamilton 算子如下形式的表达式:

$$H=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\xi'(x')\Big\{\varepsilon^2h_1[-\varepsilon D_xB_0(\beta)\beta(x)D_{x'}+\varepsilon^2(h_2D_{x'}^2-B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^2+$$
$$D_xB_0(\beta)b(x)\mathrm{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x)D_{x'}^2)]\Big\}/(\rho_2h_1+\rho_1h_2)\times$$
$$\xi'(x')\frac{\mathrm{d}x'}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}g(\rho_2-\rho_1)\varepsilon^4\eta^2\frac{\mathrm{d}x'}{\varepsilon}.\tag{36}$$

为了简化式(36), 下面引入一个有关尺度分离的引理.

引理 2.1[8]　设函数 $g(x)=g(x+\gamma)$ 连续, 并关于平移的一个格 $\gamma\in\Gamma\subseteq R^{n-1}$ 是周期的; 函数 $f(x')$ 是可积和光滑的. 则由 $g(x)$ 象征的短尺度与 $f(\varepsilon x)$ 象征的长尺度是渐近分离的, 其中 $x'=\varepsilon x$, 这也就是说对所有的 N, 有如下估计:

$$\int g(x)f(\varepsilon x)\mathrm{d}x=\int g(x)f(x')\mid_{x'=\varepsilon x}\mathrm{d}x=\overline{g}\int f(x')\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\mathrm{d}x'+O(\varepsilon^N),$$

其中 $\overline{g}=\mid R^{n-1}/\Gamma\mid^{-1}\int_{R^{n-1}/\Gamma}g(x)\mathrm{d}x$.

由上面的引理可得到

$$H=\frac{\varepsilon^3}{2}\int_{\mathbf{R}}\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{\rho_2h_1+\rho_1h_2}\xi'(x')D_{x'}^2\xi(x')+g(\rho_2-\rho_1)\eta^2(x')\mathrm{d}x'+O(\varepsilon^4),\tag{37}$$

其中 $c_1=-B_0(\beta)\beta(x)$, "$-$" 表示一个周期区域上的平均值. 特别式(36)中的 $D_x(B_0(\beta)\beta(x)\xi'(x'))$ 作为一个全导数其平均值为0, 因此, 在Hamilton 算子关于 ε 的展式的任何阶项上它都可忽略不计.

尺度(30)修正了辛结构使得 $J=\varepsilon^3J'$, 为方便省略"$'$", 则运动方程可被表示为

$$\partial_t\eta=\delta_\xi H/\varepsilon^3=\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{\rho_2h_1+\rho_1h_2}D_x\xi,\ \partial_t\xi=-\delta_\eta H/\varepsilon^3=-g(\rho_2-\rho_1)\eta,\tag{38}$$

记 $u=\partial_x\xi$, 上式变为

$$\partial_t\eta=\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{\rho_2h_1+\rho_1h_2}\partial_xu,\ \partial_tu=-g(\rho_2-\rho_1)\partial_x\eta,\tag{39}$$

在上式中, $\overline{c_1}$ 代表对一致深度的修正, 它导致了波速

$$c_0=\sqrt{\frac{gh_1(h_2+\overline{c_1})(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2h_1+\rho_1h_2}}$$

的变化.

考虑近似式中的下一阶，也就是保留直到 $O(\varepsilon^5)$ 阶时，色散和非线性的影响就会出现．此时，Hamilton 算子为

$$H = \frac{\varepsilon^3}{2}\int_{\mathbf{R}} \frac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2} D_{x'}\xi(x') + g(\rho_2-\rho_1)\eta'^2(x') + \varepsilon^2 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}\xi(x') D_{x'}\eta'(x') D_{x'}\xi'(x') - \varepsilon^2 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}\xi'(x') D_{x'}^4 \xi(x')\,\mathrm{d}x' + O(\varepsilon^6), \tag{40}$$

其中

$$c_2 = -B_0(\beta)\operatorname{sh}(\beta(x)D_x)D_x \operatorname{sech}(h_2 D_x)B_0(\beta)\beta(x), \tag{41}$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}h_2^2 B_0(\beta)\beta(x) + \frac{1}{6}B_0(\beta)\beta(x)^3 - \frac{1}{2}B_0(\beta)b(x)^2\beta(x) + B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)b(x)\operatorname{sh}(b(x)D_x)B_0(\beta)\beta(x). \tag{42}$$

因为 $u' = \partial_{x'}\xi$，且省略“$'$”，相应的运动方程可由下式给出：

$$\begin{cases} \partial_t\eta = \dfrac{h_1}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}\left\{\partial_x[(h_2+\overline{c_1}+\varepsilon^2(1+\overline{c_2})\eta)u] - \varepsilon^2\left(\overline{c_3}+\dfrac{1}{3}h_2^3\right)\partial_x^3 u\right\}, \\ \partial_t u = -g(\rho_2-\rho_1)\partial_x\eta - \varepsilon^2\dfrac{h_1(1+\overline{c_2})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}u\partial_x u, \end{cases} \tag{43}$$

上式就为变深度情形下的 Boussinesq 方程.

注意到，当令 $h_1 = 0$ 时，方程(43) 与文献[8] 中讨论过的问题的方程一样；当令 $\beta(x) = 0$ 时，它与文献[7] 中讨论过的一致深度的 Boussinesq 方程相一致.

2.2 KdV 机制下内波的运动方程

在本节中，将采用文献[13] 中的方法来推导方程(43) 的单向近似．由 Hamilton 算子(40) 的如下其形式来开展研究：

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \varepsilon^3 \frac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}u^2 + \varepsilon^3 g(\rho_2-\rho_1)\eta^2 + \varepsilon^5 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}\eta u^2 - \varepsilon^5 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}(\partial_x u)^2\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^6). \tag{44}$$

引入新的变量 r 和 s 使得

$$\begin{cases} \eta = \sqrt[4]{\dfrac{h_1(h_2+\overline{c_1})}{4g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}}(r+s), \\ u = \sqrt[4]{\dfrac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}}(r-s). \end{cases} \tag{45}$$

则 Hamilton 算子变为

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \varepsilon^3 \sqrt{\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}}(r^2+s^2) + \varepsilon^5 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{2(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}\sqrt[4]{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}}(r^3 - r^2 s r s^2 + s^3) - \varepsilon^5 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}\sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} \times ((\partial_x r)^2 - 2\partial_x r\,\partial_x s + (\partial_x s)^2)\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

将系统变换在以特征速度 c_0 移动的坐标标架中也是有必要，这点可以通过 Hamilton 算子减去

守恒动量积分

$$c_0 I = \varepsilon^3 c_0 \int_{\mathbf{R}} \eta u \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varepsilon^3 \sqrt{\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}} \int_{\mathbf{R}} (r^2 - s^2)\,\mathrm{d}x \tag{47}$$

得以实现．这样就得到

$$\begin{aligned} H - c_0 I = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} & 2\varepsilon^3 \sqrt{\frac{h_1(h_2+\overline{c_1})g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}} s^2 + \\ & \varepsilon^5 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{2(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)} \sqrt[4]{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} (r^3 - r^2 s r s^2 + s^3) - \\ & \varepsilon^5 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2} \sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} \times \\ & ((\partial_x r)^2 - 2\partial_x r \partial_x s + (\partial_x s)^2)\,\mathrm{d}x . \end{aligned} \tag{48}$$

现在 r、s 的演化方程可记为

$$\begin{aligned} \partial_t r = & -\partial_x \delta_r (H - c_0 I)/\varepsilon^3 = \\ & -\varepsilon^2 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{4(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)} \sqrt[4]{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} \partial_x (3r^2 - 2rs - s^2) + \\ & \varepsilon^2 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2} \sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} (\partial_x^3 r - \partial_x^3 s), \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \partial_t s = & \partial_x \delta_s (H - c_0 I)/\varepsilon^3 = 2\sqrt{\frac{h_1(h_2+\overline{c_2})}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2}} \partial_x s - \\ & \varepsilon^2 \frac{h_1(1+\overline{c_2})}{4(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)} \sqrt[4]{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} \partial_x (r^2 + 2rs - 3s^2) - \\ & \varepsilon^2 \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2} \sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} (\partial_x^3 r - \partial_x^3 s) \end{aligned} \tag{50}$$

解的分支 $r(x,t)$ 主要是右移动，而 $s(x,t)$ 则主要是左移动．

在 KdV 机制中仅考虑相空间区域，其中 s 是 $O(\varepsilon^2)$ 阶的． 则式(49)右侧除去仅依赖于 r 的项都是 ε 的较高阶，因此它们可以忽略不计． 设关于 Hamilton 算子的一个时间变换为 $T = \varepsilon^2 t$，则得到一个关于变量 r 的闭方程，即

$$\begin{aligned} \partial_t r = & -3\frac{h_1(1+\overline{c_2})}{2(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)} \sqrt[4]{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} r\partial_x r + \\ & \frac{h_1(\overline{c_3}+h_2^3/3)}{\rho_2 h_1+\rho_1 h_2} \sqrt{\frac{g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2 h_1+\rho_1 h_2)}{4h_1(h_2+\overline{c_1})}} \partial_x^3 r, \end{aligned} \tag{51}$$

上式就是波动的 KdV 方程，其修正的系数说明快速变化的流体深度．

3 结 论

本文研究了周期底部条件下两层不相溶流体间内波的长波渐近机制． 通过运用 Dirichlet-Neumann 算子给出的 Dirichlet 积分的表达式，本文得到了有关 Zakharov 在 Hamilton 算子方面的公式，这个公式在内波问题研究分析中是非常方便的． 同时，基于文献[7]中给出的 Hamilton 偏微分方程摄动理论，本文应用上述公式对文中内波问题进行了系统的长波摄动分析．

在 Hamilton 理论框架下，当周期底地形是短尺度变化时，长波的运动本质上被一个与系统相关的 Boussinesq 方程控制，方程的有效系数由均化平均值决定；并且当重点考虑单向传播机制时，长波的运动将被一个 KdV 方程控制．

致谢 作者由衷感谢审稿人仔细阅读本文并提出宝贵的修改意见.

附 录

设上层流体自由面波高为 $\eta_1(x)$, 界面的波高为 $\eta_2(x)$. 设调和函数的一组特殊基 $\varphi_{2,k}(x,z)=a(k)e^{kz}e^{ikx}+b(k)e^{-kz}e^{ikx}$ 满足

$$\Delta\varphi_1=0,\qquad (x,z)\in S_1(t;\eta_1,\eta_2);\ \varphi_1(x,h_1+\eta_1)=\Phi_1(x);\ \varphi_1(x,\eta_2)=\Phi_2(x). \tag{A1}$$

基在界面上的边界值为

$$\Phi_{1,k}(x)=\varphi_{1,k}(x,h_1+\eta_1)=(a(k)e^{kh_1}e^{k\eta_1}+b(k)e^{-kh_1}e^{-k\eta_1})e^{ikx}, \tag{A2}$$

$$\Phi_{2,k}(x)=\varphi_{1,k}(x,\eta_2)=(a(k)e^{k\eta_2}+b(k)e^{-k\eta_2})e^{ikx}. \tag{A3}$$

另外,上述表示式还可以分别表示为 η_1 和 η_2 的收敛的Taylor 级数形式:

$$\Phi_{1,k}(x)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_1^j k^j(a(k)e^{kh_1}+(-1)^j b(k)e^{-kh_1})e^{ikx}, \tag{A4}$$

$$\Phi_{2,k}(x)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_2^j k^j(a(k)+(-1)^j b(k))e^{ikx}. \tag{A5}$$

φ_1 在两界面上的法向导数为

$$\begin{aligned}\because\ \varphi_{1,k}\cdot(-\partial_x\eta_1,1)\mid_{z=h_1+\eta_1}=&-\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_1^j(i\partial_x\eta_1)k^{j+1}(a(k)e^{kh_1}+(-1)^j b(k)e^{-kh_1})e^{ikx}+\\&\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_1^j k^{j+1}(a(k)e^{kh_1}+(-1)^{j+1}b(k)e^{-kh_1})e^{ikx},\end{aligned} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned}\because\ \varphi_{1,k}\cdot(\partial_x\eta_2,-1)\mid_{z=\eta_2}=&\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_2^j(i\partial_x\eta_2)k^{j+1}(a(k)+(-1)^j b(k))e^{ikx}-\\&\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\eta_2^j k^{j+1}(a(k)+(-1)^{j+1}b(k))e^{ikx}.\end{aligned} \tag{A7}$$

由式(14) 和式(A4)~(A7),我们可以得到 Dirichlet-Neumann 算子作为 η_1和 η_2的二重幂级数的表示式. 依次令

$$(a_1(k),b_1(k))=\left(\frac{e^{-kh_1}}{e^{kh_1}-e^{-kh_1}},-\frac{e^{kh_1}}{e^{kh_1}-e^{-kh_1}}\right),$$

$$(a_2(k),b_2(k))=\left(\frac{1}{e^{kh_1}-e^{-kh_1}},-\frac{1}{e^{kh_1}-e^{-kh_1}}\right).$$

我们可以得到调和函数(A2)、(A3) 的一组基. 常数项是

$$\begin{pmatrix}G_{11}^{(0)} & G_{12}^{(0)}\\ G_{21}^{(0)} & G_{22}^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D\,\mathrm{cth}(h_1D) & -D\,\mathrm{ch}(h_1D)\\ -D\,\mathrm{ch}(h_1D) & D\,\mathrm{cth}(h_1D)\end{pmatrix}.$$

Taylor 表示式中的一般项 $G_{jl}^{(m_0,m_1)}$, 其中 $j,l=1,2$, 此时,算子可记为

$$\begin{pmatrix}G_{11}(\eta_1,\eta_2) & G_{12}(\eta_1,\eta_2)\\ G_{21}(\eta_1,\eta_2) & G_{22}(\eta_1,\eta_2)\end{pmatrix}=\sum_{m_0,m_1=0}^{\infty}\begin{pmatrix}G_{11}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2) & G_{12}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\\ G_{21}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2) & G_{22}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\end{pmatrix}. \tag{A8}$$

由式(14) 和(A4)~(A7),我们得到

$$\begin{pmatrix}G_{11}^{(10)}(\eta_1,\eta_2) & G_{12}^{(10)}(\eta_1,\eta_2)\\ G_{21}^{(10)}(\eta_1,\eta_2) & G_{22}^{(10)}(\eta_1,\eta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D\,\mathrm{cth}(h_1D)\eta_1D\,\mathrm{cth}(h_1D)-D\eta_1D & -D\,\mathrm{cth}(h_1D)\eta_1D\,\mathrm{ch}(h_1D)\\ D\,\mathrm{ch}(h_1D)\eta_1D\,\mathrm{ch}(h_1D) & -D\,\mathrm{ch}(h_1D)\eta_1D\,\mathrm{cth}(h_1D)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}G_{11}^{(01)}(\eta_1,\eta_2) & G_{12}^{(01)}(\eta_1,\eta_2)\\ G_{21}^{(01)}(\eta_1,\eta_2) & G_{22}^{(01)}(\eta_1,\eta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-D\,\mathrm{ch}(h_1D)\eta_2D\,\mathrm{ch}(h_1D) & D\,\mathrm{ch}(h_1D)\eta_2D\,\mathrm{cth}(h_1D)\\ D\,\mathrm{cth}(h_1D)\eta_2D\,\mathrm{ch}(h_1D) & -D\,\mathrm{cth}(h_1D)\eta_2D\,\mathrm{cth}(h_1D)+D\eta_2D\end{pmatrix}.$$

下面,我们分两种情况给出Taylor 级数中高阶项 $G_{jl}^{(m)}(\eta_1,\eta_2)$ 的递推式. 第1种情况是特殊情况 $m=(m_0,0)$ 或$(0,m_1)$ 时,由式(A8)和(A4)~(A7),我们得到:式(11) 中系数是

$$\begin{aligned}G_{11}^{(m_0,0)}(\eta_1)=&\sum_{\substack{p_0\geqslant 1\\ q_0+p_0=m_0\\ q_1=0=p_1}}G_{11}^{(q_0,0)}(\eta_1)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{p_0+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+\\&\frac{1}{m_0!}D\eta_1^{m_0}D^{m_0}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{m_0}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}},\end{aligned} \tag{A9}$$

式(21) 中系数是

$$G_{21}^{(m_0,0)}(\eta_1)=\sum_{\substack{p_0\geqslant 1\\ q_0+p_0=m_0\\ q_1=0=p_1}}G_{21}^{(q_0,0)}(\eta_1)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\left(\frac{e^{h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+\frac{(-1)^{p_0+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}\right),\tag{A10}$$

式(12) 中系数是

$$G_{12}^{(m_0,0)}(\eta_1)=-\sum_{\substack{p_0\geqslant 1\\ q_0+p_0=m_0\\ q_1=0=p_1}}G_{11}^{(q_0,0)}(\eta_1)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{1+(-1)^{p_0+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+\frac{1}{m_0!}D\eta_1^{m_0}D^{m_0}\frac{1+(-1)^{m_0}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}},\tag{A11}$$

式(22) 中系数是

$$G_{22}^{(m_0,0)}(\eta_1)=-\sum_{\substack{p_0\geqslant 1\\ q_0+p_0=m_0\\ q_1=0=p_1}}G_{21}^{(q_0,0)}(\eta_1)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\left(\frac{1}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+\frac{(-1)^{p_0+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}\right).\tag{A12}$$

由于

$$G_{jl}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)=G_{lj}^{(m_1,m_0)}(-\eta_2,-\eta_1),\tag{A13}$$

则可以得到 $G_{jl}^{(0,m_1)}(\eta_2)$, 其中 $j,l=1,2$.

第 2 种情况是当 $m=(m_0,m_1)$, m_0、m_1 均不为 0 时, 我们可以得到式(11) 中系数是

$$G_{11}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)=\sum_{\substack{1\leqslant p_0\leqslant m_0\\ q_0+p_0=m_0\\ p_1=0}}G_{11}^{(q_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{p_0+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+$$
$$\sum_{\substack{p_0=0\\ 1\leqslant p_1\leqslant m_1\\ q_1+p_1=m_1}}G_{12}^{(m_0,q_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_1!}\eta_1^{p_1}D^{p_1}\frac{1+(-1)^{p_1+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}},\tag{A14}$$

式(21) 中系数是

$$G_{21}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)=\sum_{\substack{1\leqslant p_0\leqslant m_0\\ q_0+p_0=m_0\\ p_1=0}}G_{21}^{(q_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{p_0+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}+$$
$$\sum_{\substack{p_0=0\\ 1\leqslant p_1\leqslant m_1\\ q_1+p_1=m_1}}G_{22}^{(m_0,q_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_1!}\eta_1^{p_1}D^{p_1}\frac{1+(-1)^{p_1+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}},\tag{A15}$$

式(12) 中系数是

$$G_{12}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)=-\sum_{\substack{p_0=0\\ 1\leqslant p_1\leqslant m_1\\ q_1+p_1=m_1}}G_{12}^{(m_0,q_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_1!}\eta_1^{p_1}D^{p_1}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{p_1+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}-$$
$$\sum_{\substack{1\leqslant p_0\leqslant m_0\\ q_0+p_0=m_0\\ p_1=0}}G_{21}^{(q_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{1+(-1)^{p_0+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}},\tag{A16}$$

式(22) 中系数是

$$G_{22}^{(m_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)=-\sum_{\substack{p_0=0\\ 1\leqslant p_1\leqslant m_1\\ q_1+p_1=m_1}}G_{22}^{(m_0,q_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_1!}\eta_1^{p_1}D^{p_1}\frac{e^{h_1D}+(-1)^{p_1+1}e^{-h_1D}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}-$$
$$\sum_{\substack{1\leqslant p_0\leqslant m_0\\ q_0+p_0=m_0\\ p_1=0}}G_{21}^{(q_0,m_1)}(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{p_0!}\eta_1^{p_0}D^{p_0}\frac{1+(-1)^{p_0+1}}{e^{h_1D}-e^{-h_1D}}.\tag{A17}$$

[参 考 文 献]

[1] Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1968, **4**(9): 1990-1994.

[2] 张宝善, 卢东强, 戴世强, 等. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展[J]. 力学进展, 1998, **28**(4): 521-531.

[3] 戴世强. 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用[J]. 中国科学, A 辑, 1983, **26**(11): 1007-1017.

[4] 卢东强, 戴世强, 张宝善. 一个二流体系统中非线性水波的 Hamilton 描述[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(4): 331-336.

[5] Choi W, Camassa R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, **313**(1): 83-103.

[6] Choi W, Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, **386**(1): 1-36.

[7] Craig W, Guyenne P, Kalisch H. Hamiltonian long wave expansions for free surfaces and interfaces [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, **58**(12): 1587-1641.

[8] Craig W, Guyenne P, Nicholls D P, et al. Hamiltonian long wave expansions for water waves over a rough bottom[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2005, **461**(2055): 839-873.

[9] 李植. 轴对称液体射流的 Hamilton 表述[J]. 力学学报, 2007, **39**(4): 449-454.

[10] Wahlen E. A Hamiltonian formulation of water waves with constant vorticity[J]. Letters in Mathematical Physics, 2007, **79**(3): 303-315.

[11] Benjamin T B, Bridges T J. Reappraisal of the Kelvin-Helmholtz problem—Part 1: Hamiltonian structure[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1997, **333**(1): 301-325.

[12] Craig W, Groves M. Normal forms for waves in fluid interfaces[J]. Wave Motion, 2000, **31**(1): 21-41.

[13] Craig W, Groves M. Hamiltonian long-wave scaling limits of the water-wave problem[J]. Wave Motion, 1994, **19**(4): 367-389.

Hamiltonian Long Wave Expansions for Internal Waves Over a Periodically Varying Bottom

ZHOU Hong-yan, PIAO Da-xiong

(Research Center for Applied Mathematics,

Ocean University of China, Qingdao, Shandong 266071, P. R. China)

Abstract: A Hamiltonian formulation for two-dimensional nonlinear long waves between two bodies of immiscible fluid with a periodic bottom was derived. From the formulation, using the Hamiltonian perturbation theory, effective Boussinesq equations that describe the motion of bidirectional long waves and unidirectional equations that are similar to the KdV equation for the case in which the bottom possesses short length scale were obtained. The computations for these results are performed in the framework of an asymptotic analysis of multiple scale operators.

Key words: internal waves; Hamiltonian perturbation theory; potential function; Dirichlet-Neumann operator; Boussinesq equation; KdV equation