

SH 波对界面含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的散射的近似分析*

赵嘉喜, 齐 辉, 苏胜伟

(哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

(郭兴明推荐)

摘要: 采用 Green 函数法、复变函数法研究了 SH 波对界面附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的散射, 并给出了动应力集中系数的数值结果. 首先, 界面将整个空间分成上下两部分. 在下半空间, 给出在含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂的弹性半空间中, 水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用时的位移函数. 其次, 取该位移函数作为 Green 函数. 上下空间连接时在界面处满足连续性条件, 构造出半圆形脱胶裂纹, 进而求出应力和位移的表达式. 最后作为算例, 给出了动应力集中系数的数值结果, 分析了介质参数和入射波参数对动应力集中的影响情况.

关键词: 动应力集中系数(DSCF); 半圆形脱胶; Green 函数; SH 波散射

中图分类号: O347.3 **文献标识码:** A

引 言

随着新材料的飞跃发展, 界面断裂力学(IFM)成为最近几十年来力学界研究的热门课题. 对界面断裂问题的研究起始于 50 年代末, Williams^[1]最先分析了各向同性双质材料界面裂纹静力问题, 指出对于平面内问题, 界面裂纹尖端的应力场呈现出振荡奇异性. 随着对界面断裂力学的动力问题的研究增多, 出现了界面断裂动力学. 界面裂纹尖端的动应力场的奇异性与相应的静态问题的奇异相同. 在以往有关界面断裂动力学的研究中, 这些界面裂纹主要是以直线或圆弧的形式出现的^[1-6]. 实际上, 界面结构会出现多种形式的缺陷, 如夹杂、空穴等. 同时, 在外力作用时, 界面附近的结构会受到破坏, 以至于出现脱胶现象, 应力场也会重新分配, 引起新的应力集中. 而到目前为止, 对于界面附近缺陷和脱胶结构的研究还很少.

本文采用 Green 函数法研究了 SH 波对界面附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的散射, 给出了动应力集中系数的数值结果. 在含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂的弹性半空间中, 给出水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用时的位移函数. 考虑到文献[7]中构造的含有半圆形孔洞的半空间的 Green 函数, 在界面处满足连续性条件, 构造出裂纹. 最后给出算例结果, 对不同介质参数和入射波参数对动应力集中的影响情况进行了讨论.

* 收稿日期: 2007-05-10; 修订日期: 2008-04-28

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目(A0206)

作者简介: 赵嘉喜(1980—), 男, 山东烟台人, 博士(联系人, E-mail: zhaojiayi1980@126.com).

1 问题的表述

图 1(a) 表示的是界面附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的模型. 本文中, 可将模型沿界面分成两部分: 图 1(b) 表示在上半空间的介质中有一个半圆形孔洞; 图 1(c) 表示在下半空间的介质中含有一半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂.

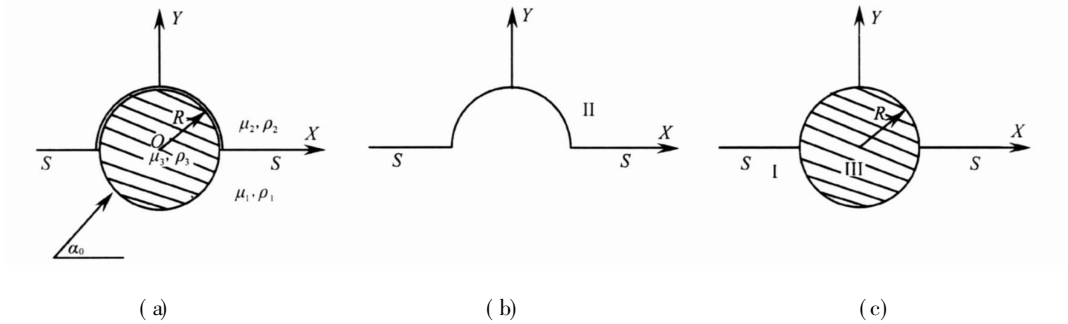


图 1 界面附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂模型

2 Green 函数

2.1 基本方程

位移函数 W , 略去时间因子 $e^{-i\omega t}$, 满足如下方程:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0. \quad (1)$$

方程(1)在复坐标 (z, \bar{z}) 中可以写成

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0. \quad (2)$$

相应的应力在极坐标中可以写成

$$\tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right], \quad \tau_{\theta z} = i\mu \left[\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right]. \quad (3)$$

2.2 Green 函数 1

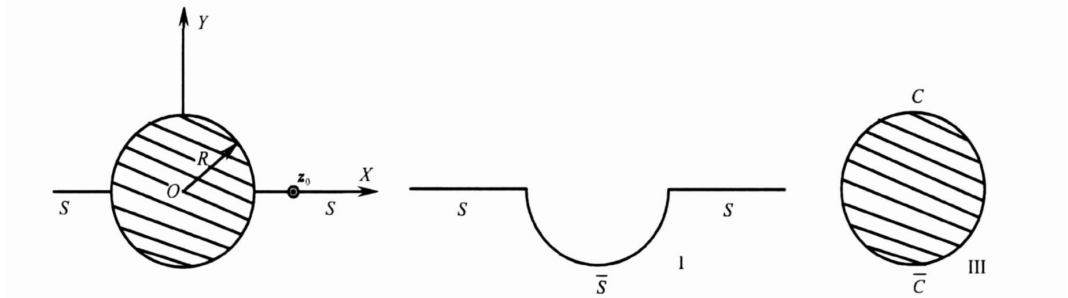


图 2 含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂的半空间模型

图 2 表示一个在含有半圆形凸起的圆柱形弹性夹杂的弹性半空间水平面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用, 我们将它分成 I 和 II 两部分, 满足边界条件

$$\begin{cases} G_1 = W^{(st)}, & r = R, \\ \tau_{rz,1} = \tau_{rz}^{(st)}, & r = R, \\ \tau_{\theta z} = \delta(z - z_0), & \theta = 0, \pi, |z_0| > R. \end{cases} \quad (4)$$

在半空间中,由线源荷载产生的扰动,可视其为入射波 $W^{(i)}$, 即

$$W^{(i)} = \frac{i}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_1 |z - z_0|). \quad (5)$$

由半圆形凹陷所激发且满足水平界面应力自由的散射波 $W^{(s)}$ 可以表示为

$$W^{(s)} = W_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_1 |z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\}, \quad (6)$$

其中, A_m 是待定的系数, 由边界条件决定. W_0 是驻波的最大幅值, 在本文中取 1.0.

在区域 III 构造一个驻波, 使其在边界“C”上满足应力自由, 在边界“C”上满足应力和位移连续, 由参考文献[8]的思路和解法, 可得

$$W^{(st)} = W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \frac{J_{m-1}(k_3 R) - J_{m+1}(k_3 R)}{J_{n-1}(k_3 R) - J_{n+1}(k_3 R)} a_{mn} J_n(k_3 |z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^n, \quad (7)$$

其中

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n, \\ \frac{1 - e^{-i(m-n)\pi}}{2\pi i(m-n)}, & m \neq n. \end{cases} \quad (8)$$

在边界 S 上满足:

$$W^{(i)} + W^{(s)} = W^{(st)}, \quad \tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = \tau_{rz}^{(st)}. \quad (9)$$

方程(9)就是确定 A_m 、 C_m 的无穷代数方程组. 因此, 介质 I 中的 Green 函数 1 为

$$G_1 = W_1^{(i)} + W_1^{(s)} = \frac{i}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_1 |z - z_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_1 |z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\}. \quad (10)$$

2.3 Green 函数 2

图 3 表示一个含有半圆形孔洞的半空间模型, 由文献[7]可知, 上半空间中的 Green 函数 2, 用复变函数法可得

$$G_2 = W_{II}^{(i)} + W_{II}^{(s)} = \frac{i}{2\mu_2} H_0^{(1)}(k_2 |z - z_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_2 |z|) \left\{ \left[\frac{z}{|z|} \right]^m + \left[\frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\}, \quad (11)$$

其中, B_m 是待定常数, 可通过文献[7]的边界条件决定.

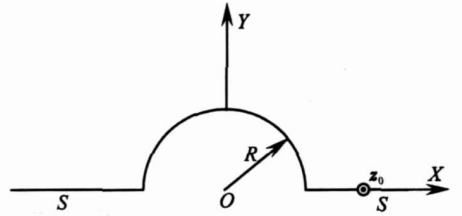


图 3 含有半圆形孔洞的半空间模型

3 SH 波对界面附近含有半圆形脱胶的圆柱形弹性夹杂的散射

3.1 SH 波入射

图 4 表示的是全空间中 SH 波的入射示意图. 其中的波场可以参考文献[9]的方法得到, 同时采用与 Green 函数 1 和 2 的相同的解法, 可以求得区域 I、区域 II 中的散射波.

3.2 确定界面未知力系的积分方程组

求得了介质 I 中的入射波、反射波、散射波和介质 II 中的折射波、散射波, 由参考文献[7]的思路, 采用 Green 函数法和“契合”的方法将材料体沿界面分为上下两个部分: 上半空间介质

II和下半空间介质I (见图5).

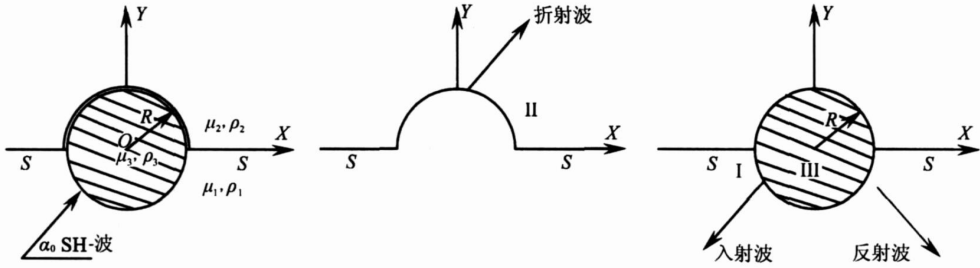


图4 SH波入射示意图

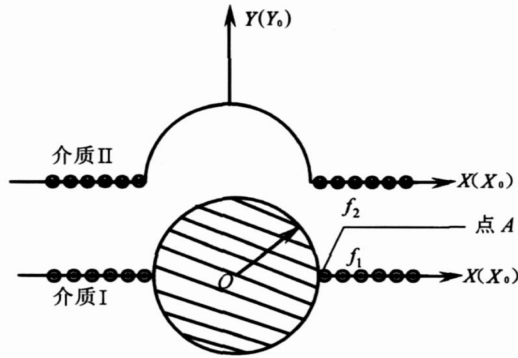


图5 形成双质材料体

在下半空间的“剖分”面上,总的波场和应力场可以写成

$$\begin{cases} W^{(1)} = W^{(i)} + W^{(r)} + W_I^{(s)}, \\ \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(r)}. \end{cases} \quad (12)$$

在上半空间的“剖分”面上,总的波场和应力场可以写成

$$W^{(2)} = W^{(f)} + W_{II}^{(s)}, \quad \tau_{\theta z}^{(2)} = \tau_{\theta z}^{(f)}. \quad (13)$$

然后,将由介质I构成的下半空间和由介质II构成的上半空间“契合”在一起,需要满足界面

$\theta = 0, \pi$ 上位移连续性条件,在介质I和介质II的

剖面上施加外力系,利用“剖面”上位移和应力连续性条件,可得待求外力系 $f_1(r_0, \theta_0)$ 的积分方程组

$$\int_R^\infty f_1(r_0, \pi) [G_1(r, \pi; r_0, \pi) + G_2(r, \pi; r_0, \pi)] dr_0 + \int_R^\infty f_1(r_0, 0) [G_1(r, \pi; r_0, 0) + G_2(r, \pi; r_0, 0)] dr_0 = (W_{II}^{(s)} - W_I^{(s)})|_{\theta=\pi}, \quad (14)$$

$$\int_R^\infty f_1(r_0, \pi) [G_1(r, 0; r_0, \pi) + G_2(r, 0; r_0, \pi)] dr_0 + \int_R^\infty f_1(r_0, 0) [G_1(r, 0; r_0, 0) + G_2(r, 0; r_0, 0)] dr_0 = (W_{II}^{(s)} - W_I^{(s)})|_{\theta=0}. \quad (15)$$

上述积分方程组属于半无限域上含弱奇异性的第一类 Fredholm 方程组,本文采用弱奇异积分方程组直接离散法求解在一系列离散点上附加外力系 $f_1(r_0, \theta_0)$ 的值.

4 动应力集中系数(DSCF)

SH波入射到上述双质材料体,通常动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$ 表示为

$$\tau_{\theta z}^* = |\tau_{\theta z}^{(\cdot)} / \tau_0|, \quad (16)$$

其中 $\tau_{\theta z}^{(\cdot)}$ 为孔洞周边上的应力; $\tau_0 = \mu_1 k_1 W_0$ 为入射应力的最大幅值.

在介质I中,弹性夹杂附近周边的应力可以表示为

$$\tau_{\theta z}^{(I)} = \tau_{\theta z}^{(1)} + \int_R^\infty f_1(r_0, \pi) \frac{\mu_1}{R} \frac{\partial G_1(r, \theta; r_0, \pi)}{\partial \theta} dr_0 + \int_R^\infty f_1(r_0, 0) \frac{\mu_1}{R} \frac{\partial G_1(r, \theta; r_0, 0)}{\partial \theta} dr_0. \quad (17)$$

在介质 II 中, 半圆形孔洞周边的应力可以表示为

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(II)} = & \tau_{\theta z}^{(12)} + \int_R^\infty f_2(r_0, \pi) \frac{\mu_2}{R} \frac{\partial G_2(r, \theta; r_0, \pi)}{\partial \theta} dr_0 + \\ & \int_R^\infty f_2(r_0, 0) \frac{\mu_2}{R} \frac{\partial G_2(r, \theta; r_0, 0)}{\partial \theta} dr_0. \end{aligned} \quad (18)$$

这里应特别指出, 脱胶结构边缘点(点 A) 处的应力值因裂纹尖端的奇异性而取其名义应力值, 是渐进解而非精确解.

5 算例和算例分析

本文给出了不同材料组合时的动应力集中系数, 并进行了讨论. 其中 $0^\circ \sim 180^\circ$ 表示的是介质 II 中半圆形孔洞周边的应力分布 $\tau_{\theta z}^{*, II}$, $180^\circ \sim 360^\circ$ 表示的是介质 I 中夹杂周边上的应力分布 $\tau_{\theta z}^{*, I}$. 图 6~ 9 给出了 DSCF 的分布图. 图 10~ 13 给出了界面点应力值(点 A) 的变化规律. 图 14 给出了一种特例来检验结果的精度和合理性.

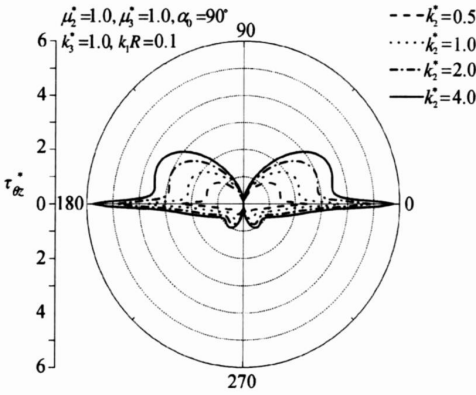


图 6 SH 入射时 DSCF 分布图

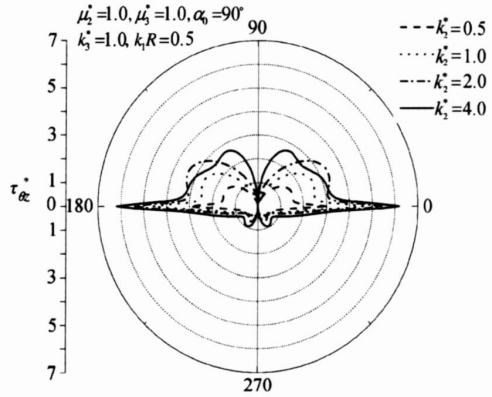


图 7 SH 入射时 DSCF 分布图

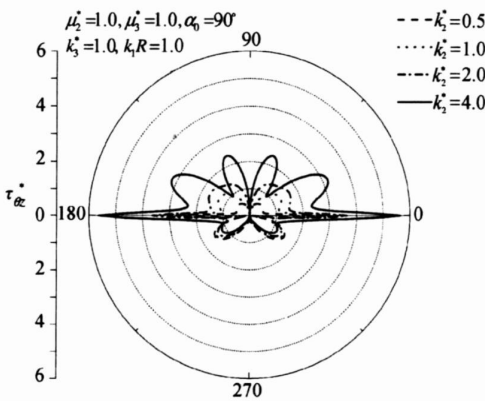


图 8 SH 入射时 DSCF 分布图

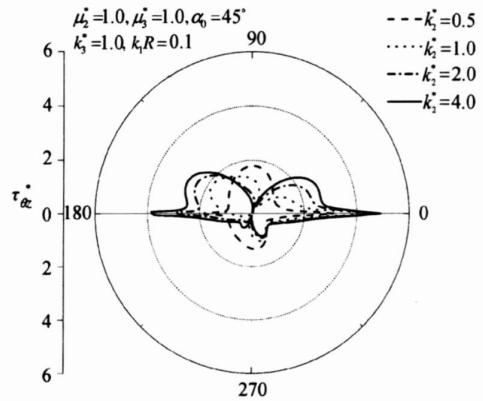


图 9 SH 入射时 DSCF 分布图

通过对算例的分析, 我们可以得到以下结论:

1) 含有半圆形脱胶的界面圆柱形夹杂对 SH 波的散射与动应力集中问题, 主要受以下因素的影响: a: 介质 II 和介质 I 中的波数比 $k_2^* = k_2/k_1$; b: 介质 II 和介质 I 的剪切模量比 μ_2^*

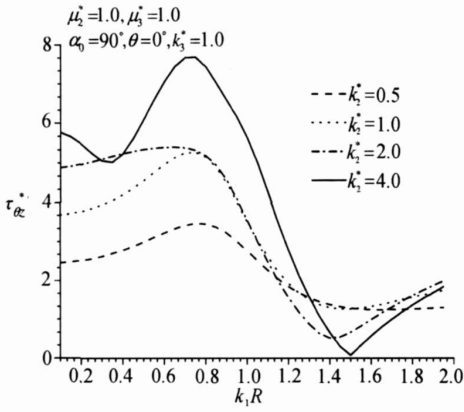


图 10 界面点 DSCF 随波数的变化规律

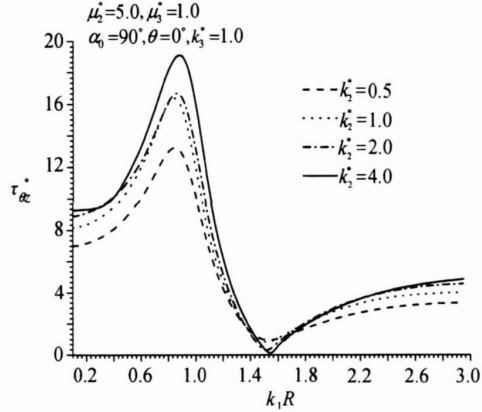


图 11 界面点 DSCF 随波数的变化规律

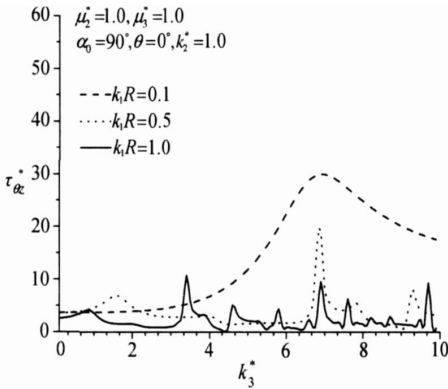


图 12 界面点 DSCF 随波数的变化规律

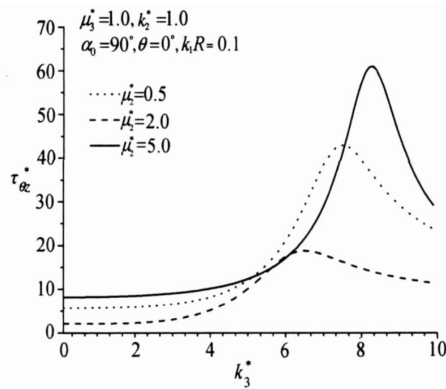


图 13 界面点 DSCF 随介质 III 和介质 I 的参数比的变化规律

= μ_2 / μ_1 ; c: 介质 II 和介质 I 中的波数比 $k_3^* = k_3 / k_1$; d: 介质 III 和介质 I 剪切模量比 $\mu_3^* = \mu_3 / \mu_1$; e: 波数 $k_1 R$; f: 入射角度 α_0 .

2) 图 6~8 给出了垂直入射时, 动应力集中系数的分布. 从图中可以看出, 半圆形脱胶对界面附近的应力分布会有较大的影响, 其中界面点的影响最大. 当 $k_1 R = 0.1, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 1.0, \mu_3^* = 1.0, k_3^* = 1.0$ 时, 界面点的应力集中系数为 3.63, 比文献[7]中无脱胶圆孔的界面值提高了 80%. 对于介质 II 中的 τ_{0z}^*, II , 低频入射时, 在 $45^\circ \sim 135^\circ$ 范围内的数值与文献[7]中得到的数值一致. 其余点的应力值比文献[7]有所提高, 并且界面越近, 应力集中越明显. 对于介质 I 中的 τ_{0z}^*, I , 变化趋势和 τ_{0z}^*, II 相似. 低频入射时, 在 $225^\circ \sim 315^\circ$ 范围内的数值与文献[9]中得到的数值一致. 高频入射时, 应力集中系数会发生波动现象, 但最大值仍在界面处. 可见半圆形脱胶能加剧界面附近的应力集中, 对界面点的破坏程度是很大的.

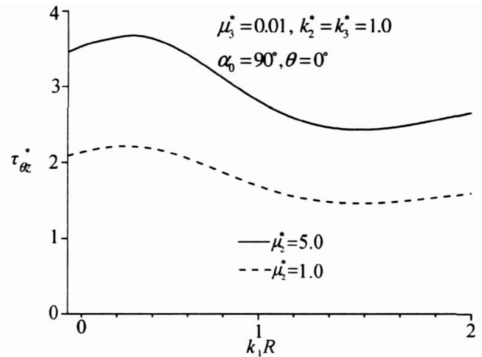


图 14 界面点 DSCF 随波数的变化规律

3) 图 9 给出了 $\alpha_0 = 45^\circ$ 时应力集中系数的分布情况. 从图中可以看出, $\alpha_0 = 45^\circ$ 斜入射时, 应力分布会发生复杂的变化, 但最大值仍会出现在界面附近, 具体数值与垂直入射时降低 10%~20%.

4) 图 10~11 给出了垂直入射时, 界面点应力集中系数随波数 $k_1 R$ 的变化规律. 图中可以看出 $\mu_2^* = 1.0$, $\mu_3^* = 1.0$, $k_3^* = 1.0$ 时, $k_1 R$ 在 0.6~0.8 范围内会出现应力最大值, 说明此时会出现“共振”现象, “共振”时的波数值随 k_2^* 的增大而减小. 而当 $\mu_2^* = 5.0$ 时, $k_1 R$ 在 0.8~1.0 范围内出现“共振”.

5) 图 12~13 给出了垂直入射时, 界面点应力集中系数随 k_3^* 的变化曲线. 低频入射时, 在 $k_3^* = 7.0$ 附近会出现“共振”现象, 此时的应力值是 $k_3^* = 1.0$ 的 7~8 倍. 同时, 共振作用随 μ_2^* 的增加而增强, 出现共振时的 k_3^* 值会随 μ_2^* 的增大而增加. 高频入射时, 会发生波动和震荡现象, 最大值比低频时要小得多.

6) 图 14 给出了当 μ_3^* 远小于 1 这一极端情况下界面点动应力集中系数随波数的变化规律, 相当于界面圆孔对 SH 波入射的反应. 用本文方法得出的结果与文献[7]给出的结果十分吻合, 误差可控制在 2.0% 之内. 从而使 $\theta = 0^\circ$ (脱胶结构边缘点) 处应力渐近解的精度得到满足.

6 结论与讨论

1) 为了保证数值的精确性以及积分方程的收敛性, 在求解后都分别验证了边界条件, 其中脱胶部分的应力都在 10^{-3} 到 10^{-4} 左右. 关于奇异点的处理采用了避开奇异点的方法进行了处理. 这种方法也是文献[4]的方法. 同时, 本文着重讨论动应力集中系数, 并与相关文献作比较, 分析脱胶结构对其的影响情况. 而对于裂纹的动应力强度因子以及裂纹尖端应力的震荡性, 需要另行研究.

2) 通过对算例的分析, 我们可以看出, 本文中脱胶结构裂纹尖端附近的应力值会有较大幅度的提高. 从能量的角度来看, 脱胶的存在促使波场能量进行新的分配, 脱胶结构会吸收一部分能量, 引起应力急增. 同时, 从物理角度上讲, 半圆形脱胶边缘可以看成两个尖点, 其应力肯定要比圆孔两端的应力值要大很多.

3) 此外, 上下空间不同的介质参数、圆形弹性夹杂的参数以及入射波波数和入射角度也会影响到应力分布.

[参 考 文 献]

- [1] Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar [J]. Media Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, 49(2): 199-204.
- [2] Sih G C. Mechanics of Fracture [M]. Vol 1. Leyden: Noordhoff, 1973.
- [3] 王铎, 汪越胜. 界面动力学研究近况 [J]. 上海力学, 1993, 14(4): 1-15.
- [4] 李宏亮, 刘殿魁. SH 波作用下圆形夹杂与裂纹的相互作用 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 25(5): 618-622.
- [5] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [6] 汪越胜, 王铎. 剪切波作用下圆弧形界面裂纹的动应力强度因子 [J]. 固体力学, 1993, 14(4): 362-367.
- [7] 刘殿魁, 刘宏伟. 界面圆孔对 SH 波散射与动应力集中 [J]. 力学学报, 1998, 30(5): 597-604.

- [8] 刘殿魁, 王国庆. 浅埋圆形孔洞附近的半圆形凸起对 SH 波的散射[J]. 力学学报, 2006, 3(2): 209-218.
- [9] 刘殿魁, 田家勇. SH 波对界面圆柱形弹性夹杂散射及动应力集中[J]. 爆炸与冲击, 1999, 4(2): 115-123.
- [10] LIU Dian kui, HAN Feng. Scattering of plane SH waves on cylindrical canyon of arbitrary shape[J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 1991, 10(5): 249-255.

Approximate Analysis for the Scattering of SH-Wave by an Interface Cylindrical Elastic Inclusion With a Semicircular Disconnected Curve

ZHAO Jia-xi, QI Hui, SU Sheng-wei

(Civil Engineering College, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The scattering of SH-wave by an interface cylindrical elastic inclusion with a semicircular disconnected curve is investigated and the solution of dynamic stress concentration factor is given by Green's function, complex function method. Firstly, the space can be divided into up-and-down parts along the interface. In the lower half space, a suitable Green's function for the present problem were constructed, which is the essential solution of displacement field for an elastic half space with a semi-cylindrical hill of cylindrical elastic inclusion while bearing out-plane harmonic line source load at horizontal surface. Thereby the semicircular disconnected curve can be constructed when the two parts are bonded which is continuous in the interface loading the undetermined anti-plane forces on the horizontal surfaces. And the expressions of displacement field and stress field were obtained under this situation. Finally, some examples and results of dynamic stress concentration factor were given, and the influences by the cylindrical inclusion and the difference parameters of the two mediators were discussed.

Key words: dynamic stress concentration factor (DSCF); a semicircular disconnected curve; Green's function; scattering of SH-wave