应用数学和力学, 第 29 卷 第 6 期　　Applied Mathematics and Mechanics
2008 年 6 月 15 日出版　　Vol. 29, No. 6, Jun. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 06-0713-13　　应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

# 具有 Cauchy-Ventcel 边界条件的有界域中亚临界半线性波方程的稳定与控制

A 卡努里,　N 麦希迪

(贝加亚大学 应用数学实验室, 阿尔及利亚)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 分析 $R^N$ 的有界域中半线性波方程解的指数衰减特性, 有界域具有 Cauchy-Ventcel 型边界条件, 并且球体外部作用着阻尼项　在对非线性作出适当又自然的假设后, 倘若非线性在无穷大处为亚临界时, 有限能量解的指数衰减性满足局部一致性　粗略地说, 亚临界性意味着, 在无穷大处非线性增长率次数不大于 5　B. Dehman、G. Lebeau 和 E. Zuazua 得到了 $R^3$ 和 $R^N$ 中的经典能量(用于估计局限于球体外部以能量形式表示的解的总能量) 不等式和 Strichartz 估计的结果, 使得研究 $R^N$ 有界域(域内及其边界上是亚临界非线性, 边界为 Cauchy-Ventcel 型连续) 中半线性波方程的稳定性与可控性成为可能

关 键 词: 稳定性; 精确控制性; 有限问题; 半线性; 亚临界; 偏微分方程; Cauchy-Ventcel

中图分类号: O175.29; O175.4; O231.3　　文献标识码: A

## 1　引言和相关定理

在 $R^N$ $(N\quad 1)$ 上研究带阻尼的半线性波方程

$$
\begin{cases} \quad u + f(u) + a(x)\ {}_t u = 0, & \text{在} ]0, +\quad[\quad R^N \text{中}, \\ u(0,x) = \ u^0(x)\quad H^1(R^N), & {}_t u(0,x) = \ u^1(x)\quad L^2(R^N), \end{cases} \tag{1}
$$

这里　　$= (\ {}^2_t - \ {}_x)$

$f$ 是一个R 到R 的 $C^3$ 类非线性函数并满足以下亚临界条件:

$$f(0) = 0, \tag{2}$$

$$|f^{(j)}(s)|\quad C(1+|s|)^{p-j},\qquad j = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

这里 $C > 0$, $p$ 为实数且 $1\quad p\quad 5$　以及

$$sf(s)\quad cs^2,\qquad s\quad R, c > 0 \tag{4}$$

假定阻尼势 $a = a(x)$ 在 $L\ (R^N)$ 中处处非负, 对某些 $R > 0$ 和 $c_0 > 0$, 满足

$$a(x)\quad c_0 > 0,\qquad |x|\quad R \tag{5}$$

时间 $t$ 时, $u$ 的能量定义为

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\ {}_{R^N}[|\ {}_t u(t,x)|^2 + |\ {}_x u(t,x)|^2]\,dx + \ {}_{R^N} F(u(t,x))\,dx, \tag{6}$$

---

收稿日期: 2007-04-19; 修订日期: 2008-04-30

作者简介: A. Kanoune(联系人. Tel: + 213-34-22-86-54; E-mail: aomarhocine@yahoo.fr).

本文原文为英文, 海治 译, 张禄坤 校.

式中

$$F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

我们得到以下结论[1]:

**定理 1**　在上述假设下,对每一个 $E_0 > 0$,存在 $C > 0$ 和 $> 0$,使得不等式

$$E_u(t) \quad Ce^{- \ t}E_u(0), \qquad t > 0, \tag{8}$$

对具有原始数据 $(u^0, u^1)$ 的系统(1) 的每一个解 $u$ 均成立且满足下式:

$$E_u(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^N}[|u^1(x)|^2 + |\ _x u^0(x)|^2]\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{R}^N} F(u^0(x))\mathrm{d}x \qquad E_0 \tag{9}$$

**定理 2**　假设上述条件满足　再假设

$$f(s) = cs + f_1(s),$$

当 $> 0$ 存在时,使 $f_1$ 满足

$$f_1(s)\ s \quad (2+ \ )F_1(s), \qquad s \quad \mathrm{R},$$

其中　$F_1(s) = \int_0^s f_1(z)\mathrm{d}z$

则对方程(1) 的每一个解 $u$,存在 $C > 0$ 和 $> 0$,使得不等式(8) 成立

对上述定理的论证可见参考文献[1-4]

根据定理 1 的稳定性结论,允许我们在 $\mathrm{R}^N\ (N \quad 1)$ 的有界开域上,为亚临界半线性波方程建立起一个精确可控性结果

更精确地,令　为$\mathrm{R}^N\ (N \quad 1)$ 的有界光滑开域,　为$\mathrm{R}^N$ 中的边界 $=$ 的一个邻域

进一步,令 $f: \mathrm{R} \quad \mathrm{R}$ 是一个 $C^3$ 类函数且满足条件(2) 、(3) 以及

$$sf(s) \quad 0 \tag{10}$$

又令 $g: \mathrm{R} \quad \mathrm{R}$ 是一个 $C^3$ 类函数并满足

$$g(0) = 0, \tag{11}$$

$$|g^{(j)}(s)| \quad C(1+|s|)^{p-j}, \qquad j = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

和

$$sg(s) \quad 0 \tag{13}$$

最后,令 $_1(x)$ 为 $C\ (\ )$ 中的一个非负函数,$_2(x)$ 为 $C\ (\ )$ 中的一个非负函数

让我们考虑,在下面 Hilbert 空间中

$$\mathrm{H} = L^2(\ ) \quad L^2(\ ),$$

$$\mathrm{V} = \left\{ v = (v_1, v_2) \quad H^1(\ ) \quad H^1(\ ) \text{ 使 } v_1| \ = v_2 \right\}$$

有规范的范数

$$v \ _{\mathrm{H}} = \left\{ |v_1|^2_{L^2(\ )} + |v_2|^2_{L^2(\ )} \right\}^{1/2}$$

和

$$v \ _{\mathrm{V}} = \left\{ |v_1|^2_{H^1(\ )} + |v_2|^2_{H^1(\ )} \right\}^{1/2}$$

我们证明如下定理:

**定理 3**　在上述假设下,对每一个给定的 $E_0 > 0$,存在时间 $T > 0$,使得对H　V 中的每组数据$(u^0, u^1)$ 和$(y^0, y^1)$ 满足

$$(u^0, u^1)\ _{\mathrm{H}\ \mathrm{V}} \quad E_0 \quad \text{和} \quad (y^0, y^1)\ _{\mathrm{H}\ \mathrm{V}} \quad E_0,$$

在$[0, T]$　支集中,有 $v = (v_1, v_2) \quad L^1([0, T], \mathrm{V})$,在 $C^0([0, + \ [, \mathrm{H}) \quad C^1([0, + \ [, \mathrm{V})$ 中,有唯一的 $u = (u_1, u_2)$,系统

$$\begin{cases} u_1 + \quad {}_1(x) f(u_1) = v_1(t, x), & \text{在} ]0, + \quad [ \quad \text{中}, \\ {}_t^2 u_2 + \quad u_1 - \quad {}_T u_2 + \quad {}_2(x) g(u_2) = v_2(t, x), & \text{在} ]0, + \quad [ \quad \text{上}, \\ u(0) = u^0, \quad {}_t u(0) = u^1, & \text{在} \quad \text{中} \end{cases} \tag{14}$$

的解, 满足

$$u(T, \quad) = y^0, \quad {}_t u(T, \quad) = y^1$$

作为如下推论直接就成立:

**推论 4** 让我们考察 $_1$ 1和 $_2$ 1时的系统(14), 即, 没有去除方程的非线性 则在上述条件下, 除了解的唯一性外, 作为定理 3 中的结论同样成立, 控制条件为 $v = (v_1, v_2)$ $L^1(0, T; \mathrm{H}_{\mathrm{loc}})$ $L$ $(0, T; \mathrm{V}^{6/5})$, 其中

$$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}} = L^2_{\mathrm{loc}}(\quad) \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\quad), \ \mathrm{V}^{6/5} = L^{6/5}(\quad) \quad L^{6/5}(\quad)$$

该结果改进了文献[1] 在其它的空间和其它的边界条件下的结论, 为我们带来了另一种能量的考虑 同时, 还改进了文献[5] 中需对非线性作出更严格假设才能成立时的结论

下面参照文献[6] , 给出含非线性项( 在轻度超线性路径中出现无穷大) $(1- \quad d)$ 波方程, 在均匀时间下的精确可控性证明 该证明是基于定理 1 的稳定性结论 粗略地说, 首先显示其扰动特性: 由于定理 2 的几何设定, 线性波方程有精确可控的特性, 因此小数据对非线性方程也是可控的, 即, 给定足够小的原始数据和最终数据, 可以将方程的解从初始状态推进到最终状态, 从而将定理 1[1] 的证明应用到有界开集 然后采用不动点定理, 证明其精确可控性

下面假设 4 $p$ 5 另外 1 $p$ 4 的情况, 可以通过类似的方法获得同样的结论

## 2 有界域中的亚临界波方程

本节考察 $\mathrm{R}^N (N \quad 1)$ 的一个有界域的亚临界非线性波方程, 域内及其边界上呈非线性

首先, 在2.1 小节中证明全局存在性和唯一性 需着重指出的, 一般来说绝大多数半线性的混合问题[6] 是很难处理的 可是我们将它处理成域内和边界上 $(p < 5)$ 的亚临界非线性问题

然后在 2.2 小节中证明结果的稳定性 在 2.3 小节中证明非均匀时间中定理 3 和推论 4 结果的可控性, 只要时间足够地大, 都可以根据被控制数据的大小, 从每一个初始状态推进到最终状态

### 2.1 全局存在性和唯一性

令 为$\mathrm{R}^N (N \quad 1)$ 上一个光滑开界集, $f: \mathrm{R} \quad \mathrm{R}$ 为满足条件(2)、(3) 和(10) 的一个非线性函数, 又 $g: \mathrm{R} \quad \mathrm{R}$ 为满足条件(11)、(12) 和(13) 的一个非线性函数 令 $_1(x) \quad C_0(\quad)$ 和 $_2(x) \quad C_0(\quad)$ 为两个非负函数

我们有下列结果:

**定理 5** 对每一组函数对 $(v_1, v_2) \quad L^1([0, + \quad [, L^2(\quad)) \quad L^1([0, + \quad [, L^2(\quad))$ 和每一组原始数据对$(u^0, u^1) \quad \mathrm{H} \quad \mathrm{V}$, 系统

$$\begin{cases} u_1 + \quad {}_1(x) f(u_1) = v_1, & \text{在} ]0, + \quad [ \quad \text{中}, \\ {}_t^2 u_2 + \quad u_1 - \quad {}_T u_2 + \quad {}_2(x) g(u_2) = v_2, & \text{在} ]0, + \quad [ \quad \text{上}, \\ u(0) = u^0, \quad {}_t u(0) = u^1, & \text{在} \quad \text{中} \end{cases} \tag{15}$$

在空间 $C^0([0, + \quad [, \mathrm{H}) \quad C^1([0, + \quad [, \mathrm{V})$ 中, 有一个唯一解 $u = (u_1, u_2)$ 而且该解还满足以下 Strichartz 估计: 对每一个有限的 $T > 0$、$r \quad 2$, $q$ 由 $1/q = 1/2 - 1/r$ 给定, 以及 $C_0(\quad)$, 存在常数 $C > 0$ 使

$$(x) u \quad {}_{L^q([0, T]; \mathrm{H})} \quad C( \quad (v_1, v_2) \quad {}_{L^1([0, T]; \mathrm{H}) \ L^1([0, T]; \mathrm{V})}, E_u(0)), \tag{16}$$

对每一个 $v = (v_1, v_2)$ 以及之前给定的每一个原始数据成立

这里及其以后, 用 $E_u$ 表示该系统解 $u$ 的能量, 即

$$E_u(t) = \frac{1}{2}[| u|^2 + | u_t|^2]dx + \frac{1}{2}[| _T u|^2 + | u_t|^2]d +$$

$$_1(x)F(u)dx + _2(x)G(u)d , \quad (17)$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(s)ds,\ G(u) = \int_0^u g(s)ds$

证明 分为 3 步进行

第 1 步 存在性

分离系统(15): 去除原始数据 $(u^0, u^1)$ 和等式右边 $v$ 项 令 $_1$ 为紧致集 supp( $_1$) 的一个邻域, 以使 $\overline{\ }_1$ , 同时令 $_2$ 为紧致集 supp( $_2$) 的一个邻域, 以使 $\overline{\ }_2$ 令 $C_0(\ )$ 满足 $_1$ 上 $=1$ 定义 $_1 = v_1$ 和 $\overline{\ }_1 = (1- )v_1$ 又令 $C_0(\ )$, 以使 $_2$ 上 $=1$ 定义 $_2 = v_2$ 和 $\overline{\ }_2 = (1- )v_2$, 使在 supp( $_1$) 上 $\overline{\ }_1 = 0$, 在 supp( $_2$) 上 $\overline{\ }_2 = 0$

考察如下两个系统:

$$\begin{cases} v + _1(x)f(v) = _1, & 在 ]0, +[ 中, \\ ^2 v + v - _T v + _2(x)g(v) = _2, & 在 ]0, +[ 上, \\ (v(0), v(0)) = (x)(u^0, u^1), & 在 中; \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} w = \overline{\ }_1, & 在 ]0, +[ 中, \\ ^2 w + w - _T w = \overline{\ }_2, & 在 ]0, +[ 上, \\ (w(0), w(0)) = (1- )(u^0, u^1), & 在 中 \end{cases} \quad (19)$$

令 $T_0 = \min(d_1, d_2, d_3, d_4)$, 其中 $d_1 =$ distance(supp( ), )、$d_2 =$ distance(supp(1 − ), supp( $_1$))、$d_3 =$ distance(supp( ), )、$d_4 =$ distance((supp(1 − ), ), supp( $_2$)), 然后在时间段 $[0, T_0]$ 上求解上述两个系统(18) 和(19)

由于波的传播速度是有限的( 在本文的模型中取 1), 显然有

( ) 在该时间段, 支集中, 方程(18) 的解与自由空间 $R^N$ 中 Cauchy 问题的解一致 实际上, 边界上后来消失的解, 是由于将原始数据和等式右边限制在 supp( ) 和 $T_0$ $d_1$

( ) 对 $0$ $t$ $T_0$, $\begin{cases} \text{supp}(w) < 8 \setminus \text{supp}(H_1), \\ \text{supp}(w | \#) < \# \setminus \text{supp}(H_2), \end{cases}$

即, supp( $H$) 上 $w = 0$ 和 supp( $H_2$) 上 $w | \# = 0$1

显然可以得到 $H_1(x)f(v) = H_1(x)f(v + w), H_2(x)g(v) = H_2(x)g(v + w)$1

上面构造的函数 $u = v + w$ 属于

$$C^0([0, T]; H)\ H\ C^1([0, T]; V)$$

并对 $0 [ t [ T_0$, 求解方程(15)1

显然, 上述方程的求解是前面讨论的必然结果1 解在时间上的连续性是由于两个分量 $v$ 和 $w$ 都是连续造成的 1 $v$ 在时间上的连续性是因为, 在时间段 $0 [ t [ T_0$ 上, $v$ 与整个空间中 Cauchy 问题的解相一致, Cauchy 问题的解在能量空间中的值是时间的连续函数1

第 2 步 能量和 Strichart 估计

对上面系统(18) 和(19) 各自进行经典的能量估计, 得到

$$E_u(t) [ C[ + ( v_1, v_2) + _{L^1(H)} + E_u(0)], \quad 0 [ t [ T_0 1$$

考虑到时间 $T_0$ 仅依赖于问题的几何性质( 即 X 及 W、N、$H_1$、$H_2$ 的支集), 显然, 迭代该过程就能

得到一个关于时间的全局解1 另一方面, 令 V(x) 为一个截断函数(为了简化), 并假设 $H_1$ 支集中 V = 11

通过函数 $u = V(x)u$ 求解自由系统

$$\begin{cases} \text{t}\ u + H_1(x)f(u) = Vv_1 + [\text{t}, V]u\ I\ L^2_{\text{loc}}([0, +\ ][, L^2(\mathrm{R}^N)), \\ (u(0), 5_t u(0))\ I\ H^1(\mathrm{R}^N)\ @L^2(\mathrm{R}^N)1 \end{cases} \tag{20}$$

结合对下面系统的能量的估计[1],

$$\begin{cases} \text{t}\ u = F\ I\ L^1([0, +\ ][, L^2(\mathrm{R}^N)), \\ (u(0), 5_t u(0))\ I\ H^1(\mathrm{R}^N)\ @L^2(\mathrm{R}^N), \end{cases}$$

给出了 Strichart 估计式(16)1

第3步 唯一性

现在我们来证明解的唯一性1 为此需要引入以下引理:

引理6 令 $u$ 和 $v$ 为方程(15) 的2个解1 则对每一个 $T > 0$ 和 $1 [\ A [\ 2/(p - 3)$, 存在 $C_1, C_2 > 0$, 满足

$$+ H_1(x)(f(u) - f(v)) +_{L^A([0,T]; L^2(8))}\ [\ C_1 + u - v +_{L^]( 0, T; H^1(8))}, \tag{21}$$

$$+ H_2(x)(g(u | \#) - g(v | \#)) +_{L^A([0,T]; L^2(\#))}\ [$$

$$C_2 + u | \# - v | \# +_{L^](0, T; H^1(\#))}1 \tag{22}$$

假设此时引理成立, 则可以证明解的唯一性如下1

令 $u$ 和 $v$ 为方程(15) 的2个解1 函数 $u - v$ 为系统(23) 的解,

$$\begin{cases} \text{t}\ (u - v) + H_1(x)(f(u) - f(v)) = 0, & \text{在} ]0, +\ ][ @ 8 \text{中}, \\ 5_t^2(u - v) + 5M(u - v) - \$_T(u - v) + H_2(x)(g(u) - g(v)) = 0, & \\ & \text{在} ]0, +\ ][ @ \# \text{上}, \\ (u - v)(0) = 5_t(u - v)(0) = 0, & \text{在 } 8 \text{ 中}1 \end{cases} \tag{23}$$

能量不等式满足

$$\begin{aligned} &+ u - v +_{L^](0, T; H^1(8))}\ [\\ &\quad C_1 + H_1(x)(f(u) - f(v)) +_{L^1([0,T]; L^2(8))}\ [\\ &\quad C_1 T^{1/B} + H_1(x)(f(u) - f(v)) +_{L^A([0,T]; L^2(8))} \qquad (\text{其中 } 1/A + 1/B = 1) \end{aligned} \tag{24}$$

和

$$\begin{aligned} &+ u | \# - v | \# +_{L^](0, T; H^1(\#))}\ [\\ &\quad C_2 + H_2(x)(g(u | \#) - g(v | \#)) +_{L^1([0,T]; L^2(\#))}\ [\\ &\quad C_2 T^{1/B} + H_2(x)(g(u | \#) - g(v | \#)) +_{L^A([0,T]; L^2(\#))}1 \end{aligned} \tag{25}$$

通过式(21) 和(22), 得到

$$+ u - v +_{L^](0, T; H^1(8))}\ [\ C_1 T^{1/B} + u - v +_{L^](0, T; H^1(8))} \tag{26}$$

和

$$+ u | \# - v | \# +_{L^](0, T; H^1(\#))}\ [\ C_2 T^{1/B} + u | \# - v | \# +_{L^](0, T; H^1(\#))}1 \tag{27}$$

得出结论: 8 上 $u = v$ 以及 $u | \# = v | \#$, 取 $\max(C_1 T^{1/B}, C_2 T^{1/B}) < 1$, 于是有 $u = v1$

现在回到引理6 的证明1 由假设(3) 和(12), 得到

$$f(u) - f(v) = (u - v)G_1(u, v)$$

和

$$g(u | \#) - g(v | \#) = (u | \# - v | \#)G_2(u | \#, v | \#),$$

其中 $G_1$ 和 $G_2$ 满足

$$G_1(u, v) \ [ \ (1+| \ u|^{p-1}+| \ v|^{p-1}), \tag{28}$$

$$G_2(u|\#, v|\#) \ [ \ (1+| \ u|\#|^{p-1}+| \ v|\#|^{p-1})1 \tag{29}$$

因此, 根据H lder 不等式, 得到

$$\mathrm{Q}_0^T + \mathrm{H}_1(x)(f(u)-f(v))(t)+^A_{L^2(8)}\mathrm{d}t \ [$$

$$Q_0^T+(u- v)(t)+^A_{L^6(8)}\left(\mathrm{Q}_8 | \ H_1G_1|^3\mathrm{d}x\right)^{A/3}\mathrm{d}t \ [$$

$$[ \ +(u- v)(t)+_{L^]}(0,T;H^1(8))]^A Q_0^T\left(\mathrm{Q}_8 | \ H_1G_1|^3\mathrm{d}x\right)^{A/3}\mathrm{d}t1$$

还得到

$$\mathrm{Q}_0^T + \mathrm{H}2(x)(g(u|\#)- g(v|\#))(t)+^A_{L^2(\#)}\mathrm{d}t \ [$$

$$Q_0^T+(u|\#- v|\#)(t)+^A_{L^6(\#)}\left(\mathrm{Q}_\# | \ H_2G_2|^3\mathrm{d}\mathrm{C}\right)^{A/3}\mathrm{d}t \ [$$

$$[ \ +(u|\#- v|\#)(t)+_{L^]}(0,T;H^1(\#))]^A Q_0^T\left(\mathrm{Q}_\# | \ H_2G_2|^3\mathrm{d}\mathrm{C}\right)^{A/3}\mathrm{d}t1$$

为了完成引理的证明, 对最后面的积分给出一个合适的上限1 明显地, 可以分别按照 $L^A(0, T; L^3(8))$- 范数和 $L^A(0, T; L^3(\#))$- 范数, 上面最后一个积分界于项 $\mathrm{H}_1G_1(u, v)$ 和 $\mathrm{H}_2G_2(u|\#, v|\#)1$ 分别在 $L^{A(p-1)}(0, T; L^{3(p-1)}(\mathrm{supp}(H_1)))$- 范数项和 $L^{A(p-1)}(0, T; L^{3(p-1)}(\mathrm{supp}(H_2)))$- 范数项中, 得到 $u$、$v$ 和 $u|\#$、$v|\#$ 估计值1

在式(16) 的Strichartz 范数项中, 很容易得到上述这些范数的估计值1 实际上, 取 $r = p-1(r \ \backslash \ 2)$ 就足够了1 则指数 $q = 2r/(r-2)$, 相应地选择Strichartz 范数(16) 中的 $r$, 与 $q = 2(p-1)/(p-3)$ 相一致, 只要 $2/(p-3) \ \backslash \ A$, 则 $q$ 大于 $\mathrm{A}(p-1)1$ 指数精确地落入引理的范围中1

## 2.2 稳定性

以下是有界域情况时的稳定性结论1

命题7 假定前述定理中的假设条件满足, 令集合 $\mathrm{X} = \left\{x \ I \ 8/a(x) \ \backslash \ c_0 > 0\right\}$ 为 8 边界的一个邻域, 即 $\mathrm{R}^N$ 中 # = 5 8 的一个邻域与 8 的交集1 则以下系统满足局部稳定性:

$$\begin{cases} \mathrm{t} \ u+ a(x)5_t u+ H_1(x)f(u) = 0, & 在]0, + \ ] [ @ 8 中, \\ 5_t^2 u+ 5_M u- \$_T u+ H_2(x)g(u) = 0, & 在]0, + \ ] [ @ \# 上, \\ (u(0), 5_t u(0)) \ I \ \mathrm{V} @\mathrm{H} \ 1 \end{cases} \tag{30}$$

更精确地说, 对每一个 $E_0 > 0$, 存在 $C > 0$ 和 $\mathrm{C} > 0$, 倘若 $E_u(0) \ [ \ E_0$, 公式(17) 能量 $E_u$ 中有不等式(8) 成立1

注 (a) 注意到在该命题中, 对非线性的假设(4) 和(13) 可以分别放宽为

$$sf(s) \ \backslash \ 0 \tag{31}$$

和

$$sg(s) \ \backslash \ 0; \tag{32}$$

(b) 在该情况中研究定理2 的全局稳定性是否成立也是很有趣的1

对命题7 的证明, 将遵循定理 1[1] 中相同的方法, 即反证法1

证明 令 $u_n$ 是系统

$$\begin{cases} u_n + a(x)5_t u_n + H_1(x)f(u_n) = 0, & 在]0, +\ ][@8 中, \\ 5_t^2 u_n + 5M_n - \$_T u_n + H_2(x)g(u_n) = 0, & 在]0, +\ ][@\# 上, \\ Q_0^T Q_8 a(x) \mid 5_t u_n \mid^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x \ y \ 0 & \left( [ \ \dfrac{E_{u_n}(0)}{n} \right), \\ A_n = (E_{u_n}(0))^{1/2} \ y \ A \end{cases} \tag{33}$$

的一个解序列, 则 $v_n = u_n / A_n$ 为下面方程(34)的解序列,

$$\begin{cases} t\ v_n + a(x)5_t v_n + \dfrac{1}{A_n} H_1(x)f(A_n v_n) = 0, & 在]0, +\ ][@8 中, \\ 5_t^2 v_n + 5M_n - \$_T v_n + \dfrac{1}{A_n} H_2(x)g(A_n v_n) = 0, & 在]0, +\ ][@\# 上, \\ Q_0^T Q_8 a(x) \mid 5_t v_n \mid^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x \ y \ 0 & \left( [ \ \dfrac{1}{n} \right) 1 \end{cases} \tag{34}$$

以下分别对 A > 0 和 A = 0 两种情况进行讨论1 用 $v$ 表示序列 $\{v_n\}$ 的弱极限1

第 1 种情况　A > 0

在方程(33)中取 $n\ y\ ]$, 得到序列 $u_n$ 的极限 $u$ 满足

$$\begin{cases} t\ u + H_1(x)f(u) = 0, & 在]0, +\ ][@8 中, \\ 5M - \$_T u + H_2(x)g(u) = 0, & 在]0, +\ ][@\# 上, \\ 5_t u = 0, & 在]0, T[@X 上, \\ u\ I\ L^{]}([0, T], V), \ 5_t u\ I\ L^{]}([0, T], H) 1 \end{cases}$$

令 $V(x)\ I\ C_0^{]}(8)$ 以使在 supp($H_1$) 和 supp( V) < $X$ 上 V = 11　函数 $u = Vu$ 满足

$$\begin{cases} t\ u + H_1(x)f(u) = V\#\ u + (\$V)\#u\ I\ L^1([0, T], L^2(R^N)), \\ 5M - \$_T u + H_2(x)g(u) = 0, & 在]0, +\ ][@\# 上, \\ 5_t u = 0, & 在]0, T[@(R^N \setminus 8) 中, \\ u\ I\ L^{]}([0, T], H^1(R^N)), \ 5_t u\ I\ L^{]}([0, T], L^2(R^N)), \end{cases}$$

则 $u$ 有有界 Strichartz 范数1

根据正则性定理[1], 我们得到 $u$ 和 $f^c(u)$ 一样为有界 1　则 $w = 5_t u$ 满足

$$\begin{cases} t\ w + H_1(x)f^c(u)w = 0, & 在]0, T[@R^N 中, \\ w = 0, & 在]0, T[@(\mid x \mid > R) 中, \end{cases}$$

式中 $R$ 足够的大1

根据唯一连续性, 可以推导出 $w\ S\ 01$　从而对 $t\ I\ ]0, T[$, 有 $u = u(x)\ I\ V$, 且在 8 中它满足: $-\$u + Hf(u) = 01$

该方程自乘 $u$, 然后在 8 上积分, 得到

$$Q_8 (\mid u \mid^2 + H u f(u))\mathrm{d}x + Q_\# (\mid \ _T u \mid^2 + H_2 u g(u))\mathrm{d}C = 01$$

由于假设(4)和(13)式, 意味着 $u\ S\ 01$　从而, 在 $H^1(]0, T[@8)$ 中 $u_n\ y\ 01$

这里, 我们再次引入一个基于微局部缺陷测度(MDM)的自变量1

令 L 为 $H^1(]0, T[@8)$ 中与 $u_n$ 相关的一个 MDM1　由方程(34), 易知, $]0, T[@X$ 中 L = 01

为了完善该自变量, 使用 8 中(远离边界处)MDM 的传播特性, 它使得 L = 0 处处成立, 从而 $H^1(]0, T[@8)$ 中 $u_n\ y\ 01$　这与 A > 0 相矛盾1

第 1 种情况论证完毕1

第 2 种情况 A = 0

令 $n$ y ] , 得到序列 $v_n$ 的极限 $v$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{t}\ v + H_1(x)f^c(0)v = 0, & 在 ]0, T[\ @\ 8 中, \\ 5_t^2 v + 5M v - \$_T v + H_2(x)gc(0)v = 0, & 在 ]0, T[\ @\ \# 上, \\ 5_t v = 0, & 在 ]0, T[\ @\ X 上, \\ v\ I\ L^{]}([0, T], \mathrm{V}),\ 5_t v\ I\ L^{]}([0, T], \mathrm{H})\ 1 \end{cases}$$

对时间求微分, 并对该系统应用唯一连续性, 结果表明 $v = 0$1 证明过程的其余部分和定理 1 的相应部分接近1 实际上, 在整个空间中用一个适当的截断函数集取代了问题中的全局函数, 并采用了相同的自变量1

域 8 上稳定性的证明完毕1

## 2.3 非均匀时间中的精确可控性

本小节给出定理 3 和推论 4 的证明1 首先证明定理 3, 然后简要地说明如何得到推论 41

**定理 3 的证明** 可以证明小数据时的精确可控性为 01 为此, 使用 Lion 的 HUM(Hilbert 唯一性方法)[7] 的一个非线性变量, 并采用接近于文献[5] 中的证明方法1

首先考虑线性系统

$$\begin{cases} \mathrm{t}\ u + H_1(x)f^c(0)u = v_1(t, x)1_X & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ 8 中, \\ 5_t^2 u + 5M u - \$_T u + H_2(x)gc(0)u = v_2(t, x)1_X & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ \# 上, \\ u(0) = u^0,\ 5_t u(0) = u^1, & 在\ 8 中, \end{cases} \tag{35}$$

这里以及下面, 用 X 表示边界的邻域, 且是可控的支集, 又 $1_X$ 为其特征函数1

该系统在时间 $T > 2R$ 中是精确可控的1 实际上, 对任意 $(u^0, u^1)\ I\ \mathrm{V} @ \mathrm{H}$, 在 $L^2(0, T; L^2(X))\ @ L^2(0, T; L^2(\#))$ 中, 存在 $v = (v_1, v_2)$, 使得方程(35) 的解满足 $u(T) = u_t(T) = 0$1

进一步, 极小范数的控制 $v = (v_1, v_2)$ 是唯一的, 且连续依赖于相应范数中的原始数据 $(u^0, u^1)$1 更精确地, 控制 $v = (v_1, v_2)$ 由下式给出:

$$\begin{cases} v_1 = 1_X 5, \\ v_2 = 5\ |\ \#, \end{cases}$$

式中 $5\ I\ C([0, T]; \mathrm{H})\ H\ C^1([0, T]; \mathrm{V}c)$ 是系统

$$\begin{cases} \mathrm{t}\ 5 + H_1(x)f^c(0)\ 5 = 0, & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ 8 中, \\ 5_{t\,5}^2 + 5M5 - \$_T\ 5 + H_2(x)gc(0)\ 5 = 0, & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ \# 上, \\ 5(0) = 5^0,\ 5_{t\,5}(0) = 5^1, & 在\ 8 中, \\ \mathrm{P}\ (5^0, 5^1)\ I\ \mathrm{H} @ \mathrm{V}c \end{cases} \tag{36}$$

的唯一解1 然后求解系统

$$\begin{cases} \mathrm{t}\ 7 + H_1(x)f^c(0)\ 7 = v_1, & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ 8 中, \\ 5_{t\,7}^2 + 5M7 - \$_T\ 7 + H_2(x)gc(0)\ 7 = v_2, & 在 ]0, +\ ]\ [\ @\ \# 上, \\ 7(T) = 5_{t\,7}(T) = 0, & 在\ 8 中1 \end{cases} \tag{37}$$

显然 $7\ I\ C^0([0, T]; \mathrm{V})\ H\ C^1([0, T]; \mathrm{H})\ 1$

由 $+(5^0, 5^1) = (-5_{t\,7}(0), 7(0))$ 定义的算子 $+: \mathrm{H} @ \mathrm{V}c$ y $\mathrm{V} @ \mathrm{H}$ 是一个同构1 实际上,

$$3 + (5^0, 5^1), (5^0, 5^1)4 = 3(-5_{t\,7}(0), 7(0)), (5^0, 5^1)4 =$$

$(- 5_t 7(0),\ 7(0)),(5(0), 5_t 5(0))41$

为此,将方程 $t\ 7 + H_1(x)f^c(0)\ 7 = 1X5$ 乘以 5,并在 $[0, T]$ @ 8 上完成积分,得到等式

$$\int_0^T\int_8 t\ 7 \# 5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_8 H_1(x)f^c(0)\# 7\# 5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_X |\ 5|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

然后通过对 7 和 5 的分部积分,得到

$$3(- 5_t 7(0),\ 7(0)),(5^0, 5^1)4 = \int_0^T\int_X |\ 5|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\# |\ 5|^2\mathrm{d}C\mathrm{d}t1$$

另一方面,考虑 $T > 2R$,可以证明存在一个常数 $C > 0$,使不等式

$$+(5^0, 5^1)_{+H@Vc}\ [\ C\left(\int_0^T\int_X |\ 5|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\# |\ 5|^2\mathrm{d}C\mathrm{d}t\right)$$

对方程(36)的每个解 5 都成立1 这便是文献[7]采用的乘子法1

从而,给定任意 $(u^0, u^1)\ I\ V$ @H,在H @Vc 中存在$(5^0, 5^1)$,使得

$$+(5^0, 5^1) = (- u^1, u^0)1$$

可以精确地说,由 5 给出的可控方程(35) 的解 $u$ 与 7 一致,特别是,条件 $u(T) = u_t(T) = 0$ 得到满足1

在对 5 求解方程(36)后,可以求解系统

$$\begin{cases} t\ u + H_1(x)f(u) = 51X, & 在]0, +\ ][ @ 8 中, \\ 5_t^2 u + 5M - \$_T u + H_2(x)g(u) = 5|\#, & 在]0, +\ ][ @ \# 上, \\ u(T) = 5_t u(T) = 0, & 在\ 8\ 中1 \end{cases} \tag{38}$$

该问题表明,在H @Vc 上定义的算子$A$,其对偶空间V @H 中的值 $A(5^0, 5^1) = (- 5_t u(0), u(0))$,是映射到自身的一个小的邻域上1

注意,函数 $v = u - 7$(其中 7 为相应线性问题(37)的解)属于 $C^0([0, T]; \mathrm{V})\ H\ C^1([0, T]; \mathrm{H})$(实际上,$u$ 和 7 均属于该空间)1 此外 $v$ 满足

$$\begin{cases} t\ v + H_1(x)f^c(0)v = - H_1(x)R_1(u), & 在]0, +\ ][ @ 8 中, \\ 5_t^2 v + 5M - \$_T v + H_2(x)gc(0)v = - H_2(x)R_2(u), & 在]0, +\ ][ @ \# 上, \\ v(T) = 5_t v(T) = 0, & 在\ 8\ 中, \end{cases} \tag{39}$$

其中

$$\begin{cases} R_1(u) = f(u) - f^c(0)u, \\ R_2(u) = g(u) - gc(0)u1 \end{cases}$$

由于 $u = 7 + v$,因此,

$$A(5^0, 5^1) = +(5^0, 5^1) + K(5^0, 5^1),$$

其中 $K(5^0, 5^1) = (- 5_t v(0), v(0))1$

考虑下式

$$+: \mathrm{H} @ \mathrm{Vc}\ y\ \mathrm{V} @ \mathrm{H}$$

是一个同构,则可求解方程(相当于求数据$(u^0, u^1)$ 的控制)

$$A(5^0, 5^1) = (- u^1, u^0), \tag{40}$$

也相当于求解

$$B(5^0, 5^1) = - +^{-1}K(5^0, 5^1) + +^{-1}(- u^1, u^0) = (5^0, 5^1)1 \tag{41}$$

从而,问题变成为从H @Vc 映射到自身,寻找算子 $B$ 的1个不动点1

为此足以说明,通过依次验证从H @Vc 映射到其对偶空间的算子$K$ 为紧致的,从而证实算子 $B$ 也是紧致的1 为表明这个事实,由定理5,又由H @Vc 中$(5^0, 5^1)$ 的范数,知道 $u$ 的

Strichartz 范数在 $H_1$ 的支集上有界1

对于一些足够小的 $E>0$, 应用规范性定理[1]得到

$$H_1(x)R(u)\ I\ L^1([0,T],H^E(8)),$$

其中 $H^E(8)=H^E(8)\ @H^E(\#)1$

由此导出

$$v\ I\ C^0([0,T];V^{1+E}(8))\ H\ C^1([0,T];H^E(8)),$$

其中 $V^{1+E}(8)=\left\{(v_1,v_2)\ I\ H^{E+1}(8)\ @H^{E+1}(\#)/v_1|\#=v_2\right\}1$

在项 $+(5^0,5^1)+_{H@Vc}$ 中表示的那个空间中, 在 $v$ 上有界1

紧致性证明完毕1

为了取得该不动点, 需要应用 Schauder 不动点定理1

为此需寻找 1 个常数 $Q>0$, 使得

$$\begin{cases}+B(5^0,5^1)+_{H@Vc}\ [\ Q,\\ P(5^0,5^1)\ I\ H@Vc:+(5^0,5^1)+_{H@Vc}\ [\ Q1\end{cases}\tag{42}$$

如果在 $V@H$ 中, 当设定的$(u^0,u^1)$ 足够小时, 存在 $Q>0$, 使得

$$\begin{cases}+K(5^0,5^1)\ +_{V@H}\ [\ Q,\\ P(5^0,5^1)\ I\ H@Vc:+(5^0,5^1)+_{H@Vc}\ [\ Q1\end{cases}\tag{43}$$

为此, 给出系统(39)的能量不等式1 定义

$$E_v(t)=\frac{1}{2Q}\int_8(|5_tv|^2+|\ v|^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2Q}\int_8H_1(x)f^c(0)v^2\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2Q}\int_\#(|5_tv|^2+|\ _Tv|^2)\mathrm{d}C+\frac{1}{2Q}\int_\#H_2(x)gc(0)v^2\mathrm{d}C1$$

对上式取微分, 再对 $v$ 使用分部积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}E_v(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{}{Q}\int_8H_1(x)\#R_1(u)(t)\#5_tv(t)\mathrm{d}x-\frac{}{Q}\int_\#H_2(x)\#R_2(u)(t)\#5_tv(t)\mathrm{d}C1\tag{44}$$

由于

$$+H_1(x)\#R_1(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(8)}\ [$$
$$+5_tv(t)+_{L^2(8)}\#+H_1(x)\#R_1(u)(t)+_{L^2(8)}$$

和

$$+H_2(x)\#R_2(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(\#)}\ [$$
$$+5_tv(t)+_{L^2(\#)}\#+H_2(x)\#R_2(u)(t)+_{L^2(\#)},$$

从而有

$$+H_1(x)\#R_1(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(8)}\ [$$
$$C_1\#(E_v(t))^{1/2}\#+H_1(x)\#R_1(u)(t)+_{L^2(8)}$$

和

$$+H_2(x)\#R_2(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(\#)}\ [$$
$$C_2\#(E_v(t))^{1/2}\#+H_2(x)\#R_2(u)(t)+_{L^2(\#)},$$

又有

$$+H_1(x)\#R_1(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(8)}+\ +H_2(x)\#R_2(u)(t)\#5_tv(t)+_{L^1(\#)}\ [$$
$$C\#(E_v(t))^{1/2}\#(+H_1(x)\#R_1(u)(t)+_{L^2(8)}+\ +H_2(x)\#R_2(u)(t)+_{L^2(\#)}),$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}E_v(t)}{\mathrm{d}t} \geq -C\cdot(E_v(t))^{1/2}\cdot(\|H_1(x)\cdot R_1(u)(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)(t)\|_{L^2(\Gamma)}).$$

在时间段 $[t, T]$ 上积分, 并考虑到 $v(T) = \partial_t v(T) = 0$, 得到

$$\int_t^T \frac{\mathrm{d}E_v(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \geq -C\cdot A_T(t),$$

其中

$$A_T(t) = \int_t^T [(E_v(s))^{1/2}\cdot(\|H_1(x)\cdot R_1(u)(s)\|_{L^2(\Omega)} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)(s)\|_{L^2(\Gamma)})]\mathrm{d}s.$$

该式相当于

$$E_v(T) - E_v(t) \geq -C\cdot A_T(t).$$

由于 $v(T) = \partial_t v(T) = 0$, 因此 $E_v(T) = 0$. 于是 $E_v(t) \leq C\cdot A_T(t)$, 从而

$$A_T(t) \leq C\cdot[\|H_1(x)\cdot R_1(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Gamma))}]\cdot\int_t^T (E_v(s))^{1/2}\mathrm{d}s,$$

则

$$E_v(t) \leq C\cdot(T-t)[E_v(t)]^{1/2}[\|H_1(x)\cdot R_1(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Gamma))}],$$

但是

$$\|(v(t), \partial_t v(t))\|_{V\times H} = \left\{\int_\Omega |v(t)|^2 + \int_\Gamma |v(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 + \int_\Gamma |\nabla_T v(t)|^2 + \int_\Omega |\partial_t v(t)|^2 + \int_\Gamma |\partial_t v(t)|^2\right\}^{1/2} \leq C\cdot[E_v(t)]^{1/2},$$

从而

$$\|(v(t), \partial_t v(t))\|_{V\times H} \leq C\cdot[\|H_1(x)\cdot R_1(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Gamma))}]. \tag{45}$$

由于入射 $H^1 \hookrightarrow L^6$ 且 $E_v(t)$ 递减, 则

$$\|H_1(x)\cdot R_1(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|H_1|u|^2\cdot H_1|u|^p\|_{L^2(\Omega)})$$

和

$$\|H_2(x)\cdot R_2(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\|H_2|u|^2\cdot H_2|u|^p\|_{L^2(\Gamma)}) \Rightarrow$$

$$\|H_1(x)\cdot R_1(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|H_2(x)\cdot R_2(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\left[\|u\|^2_{L^6(\Omega)} + \|u\|^{3/2}_{L^6(\Omega)}\left(\int_\Omega H_1^2|u|^{2(2p-3)}\mathrm{d}x\right)^{1/4} + \|u\|^2_{L^6(\Gamma)} + \|u\|^{3/2}_{L^6(\Gamma)}\left(\int_\Gamma H_2^2|u|^{2(2p-3)}\mathrm{d}\Gamma\right)^{1/4}\right],$$

从而

$$\|(v(t), \partial_t v(t))\|_{V\times H} \leq C\cdot\sup_{0\leq t\leq T}(\|u(t)\|^{3/2}_{L^6(\Omega)} + \|u(t)\|^{3/2}_{L^6(\Gamma)}) \times \left[\sup_{0\leq t\leq T}(\|u(t)\|^{1/2}_{L^6(\Omega)} + \|u(t)\|^{1/2}_{L^6(\Gamma)}) + \int_0^T\left(\int_\Omega H_1^2|u|^{2(2p-3)}\mathrm{d}x\right)^{1/4} + \int_0^T\left(\int_\Gamma H_2^2|u|^{2(2p-3)}\mathrm{d}\Gamma\right)^{1/4}\right]. \tag{46}$$

进一步, 通过与 $u$ 的 Strichartz 范数比较, 得到

$$Q_0^T\left(Q_8 H_1^2 \mid u \mid^{2(2p-3)} \mathrm{d}x\right)^{1/4} + Q_0^T\left(Q_\# H_2^2 \mid u \mid^{2(2p-3)} \mathrm{d}C\right)^{1/4} [ \quad C(T, + 5 +_{L^1(0,T;H)}) 1$$

另一方面, 对 $u$ 应用相同的能量不等式, 得到

$$(E_u(t))^{1/2} [ \quad C\# + 5 +_{L^1(0,T;H)} [ \quad C\# + (5^0, 5^1) +_{H@V c}, \qquad P\ t\ I\ [0, T] 1 \qquad (47)$$

将 V 嵌入 $L^6(8) @ L^6(\#)$, 并合并式(46) 和(47), 得到

$$\sup_{0[t[T} + (v(t), 5_t v(t)) +_{V@H} [ \quad C\# + (5^0, 5^1) +^{3/2}_{H@V c},$$

该非线性估计立即引出式(43) 1

定理 3 的证明完毕1

推论 4 的证明　考虑任意原始数据和最终数据

$$(u^0, u^1), (y^0, y^1) \ I \ V @ H,$$

由定理 3 可知, 存在 $T > 0$, 并且在 $([0, T] @ X) @ ([0, T] @ \#)$ 中有支集的控制

$$v = (v_1, v_2) \ I \ L^2(]0, T[ @ 8) @ L^2(]0, T[ @ \#),$$

使得方程(14) 的唯一解满足 $u(T) = y^0$, $u_t(T) = y^1 1$

现在引入控制 $v = (v_1, v_2)$, 其中

$$\begin{cases} v_1 = v_1 + (1- H_1) f(u), \\ v_2 = v_2 + (1- H_2) g(u) 1 \end{cases}$$

在 $([0, T] @ X) @ ([0, T] @ \#)$ 中, 该控制也有其支集, 只要在 8 \ X 中, 取 $H_1$ s 1, 在 # \ (# H X) 中, 取 $H_2$ s 1, 便可得到确保1

进一步, 方程(14) 的解 $u$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{t}\ u + f(u) = v_1, & \text{在} ]0, + \ ] [ @ 8 \text{ 中}, \\ 5_t^2 u + 5_M - \$_T u + g(u) = v_2, & \text{在} ]0, + \ ] [ @ \# \text{ 上}, \\ u(0) = u^0, \ 5_t u(0) = u^1, & \text{在 } 8 \text{ 中 } 1 \end{cases} \qquad (48)$$

注意到, 由于并不知道域 8 中接近边界处 Strichartz 不等式是否成立, 因此无法保证有限能量解 $u$ 是否唯一, 但可保证解的存在 1　实际上, 方程(14) 的解 $u$ 也是方程(48) 的解1

为了完成推论 4 的证明, 需要充分分析 $v$ 的正则性1

已知

$$v = (v_1, v_2) \ I \ L^2(]0, T[ @ 8) @ L^2(]0, T[ @ \#),$$

从而需要充分分析 $(1- H_1) f(u)$ 和 $(1- H_2) g(u)$ 的正则性1

函数 $u$ 在 8 内具有有限 Strichartz 范数1 特别有, $u \ I \ L^5(0, T; H^{10}_{loc})$, 其中 $H^{10}_{loc} = L^{10}_{loc}(8) @ L^{10}_{loc}(\#)$ (在 Strichartz 范数中取 $q = 5$ 和 $r = 10/3$) 1

因此

$$((1- H_1) f(u), (1- H_2) g(u)) \ I \ L^1(0, T; H^2_{loc}),$$

其中　$H^2_{loc} = L^2_{loc}(8) @ L^2_{loc}(\#) 1$

进一步, 考虑到 $u$ 是有限能量, 易见

$$((1- H_1) f(u), (1- H_2) g(u)) \ I \ L^] (0, T; H^{6/5}),$$

其中　$H^{6/5} = L^{6/5}(8) @ L^{6/5}(\#) 1$

推论 4 的证明结束1

## [参　考　文　献]

[1] Dehman B, Lebeau G, Zuazua E. Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation

Annales Scientifiques de l. Ecole Normale Sup rieure, S rie4, 2003, 36(4): 525-551.

[2] Bardos C, Lebeau G, Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary[J]. SIAM J Control Optim, 1992, 30(5): 1024-1065.

[3] Gerard P. Oscillation and concentration effects in semilinear dispersive wave equation[J]. J Funct Anal, 1996, 41(1): 60-98.

[4] Rauch J, Taylor M. Exponential decay of solutions to symmetric hyperbolic equations in bounded domains[J]. Indiana University Mathematical Journal, 1974, 24(1): 79-86.

[5] Zuazua E. Exact controllability for the semilinear wave equation[J]. J Math Pures Appl, 1990, 69(1): 33-55.

[6] Lions J-L. Quelques M thodes de R solution des Probl mes aux Limites Non-Lin aires[M]. Paris: Dunod, 1969.

[7] Lions J-L. Contr labilit Exacte, Stabilisation et Perturbations de Syst mes Distribut s[M]. 1. In: RMA, Vol 8, Paris: Masson, 1988.

# Stabilization and Control for the Subcritical Semilinear Wave Equation in a Bounded Domain With a Cauchy-Ventcel Boundary Conditions

A. Kanoune, N. Mehidi
(Laboratory of Applied Mathematics, University of Beja a, Algeria)

Abstract: The exponential decay property of solutions of the semilinear wave equation in bounded domain of $R^N$ *(N is equals or greater than* 1) with a damping term which is effective on the exterior of a ball and with boundary conditions of Cauchy-Ventcel type was analyzed. Under suitable and natural assumptions on the nonlinearity, it was proved that the exponential decay holds locally uniformly for finite energy solutions that provided the nonlinearity is subcritical at infinity. Subcriticality means, roughly speaking, that the nonlinearity grows at infinity at most as a power is less than 5. The results obtained in $R^3$ and $R^N$ *(N equals to or greater than* 1) by B. Dehman, G. Lebeau and E. Zuazua on the inequalities of the classical energy ( which estimate the total energy of solutions in terms of the energy localized in the exterior of a ball) and on Strichartz. s estimates, allow us to give an application to the stabilization controllability of the semilinear wave equation in a bounded domain of $R^N$ *(N equals to or greater than* 1) with a subcritical nonlinearity on the domain and its boundary and with conditions on the boundary of Cauchy-Ventcel type.

Key words: stabilization; exact controllability; limit problems; semilinear; subcritical; partial differential equations; Cauchy-Ventcel