应用数学和力学, 第 29 卷 第 6 期
2008 年 6 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 6, Jun. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 06-0735-06

基于 LMI 的时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性分析*

刘德友, 张建华, 关新平, 肖晓丹

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究了一类具有时滞的细胞神经网络的稳定性问题, 利用 Liapunov-Krasovskii 泛函的方法, 给出了时滞相关的稳定性判据. 稳定性判据是以线性矩阵不等式(LMI) 的形式给出, 可以很容易得出时滞的上界. 在得到时滞相关的稳定性判据的同时也可以得到时滞无关的稳定性判据, 包含了已有文章中的很多结果. 最后, 数值算例说明了结果的优越性.

关 键 词: 时滞细胞神经网络; 线性矩阵不等式; 全局稳定

中图分类号: TP183 文献标识码: A

引 言

细胞神经网络(CNNs) 在文献[1] 中开始提出, 文献[2] 提出了带有时滞的细胞神经网络(DCNNs), 之后大量的关于细胞神经网络的应用开始被提出解决关于最优化问题. 本文主要研究时滞神经网络稳定性问题, 提出一个新的基于 LMI 的全局稳定性判据. 至今为止, 大部分已有的关于时滞细胞神经网络的全局稳定性判据是与时滞无关的[3-7]. 如何建立时滞相关稳定性判据, 是一个很重要的研究课题[8-10].

本文研究了带有时滞的细胞神经网络的时滞相关的稳定性问题. 通过应用李氏函数, 得到对于带有时滞的细胞神经网络的时滞相关稳定性判据的充分条件. 本文中给出的稳定性判据的充分条件比已有文献的一些相关的结果更宽松, 特别是文中的稳定性判据包括了已有文献的一些相关结果. 同时, 稳定性判据都是以线性矩阵不等式的形式给出. 最后, 数值算例验证了本文结果的有效性.

1 系 统 描 述

带有时滞的细胞神经网络模型可以通过下面的等式进行描述:

$$\dot{y}_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \boldsymbol{g}(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \boldsymbol{g}(y_j(t-\tau)) + s_i \tag{1}$$

* 收稿日期: 2007-08-23; 修订日期: 2008-04-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60604004); 河北省自然科学基金资助项目(F2007000637); 国家杰出青年自然科学基金资助项目(60525303)

作者简介: 刘德友, (1961—), 男, 齐齐哈尔人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-335-8875666; E-mail: liudeyouysu@163.com).

或是 $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t-\tau)) + \boldsymbol{S}$,

其中

$$\boldsymbol{y}(\cdot) = [y_1(\cdot), y_2(\cdot), \cdots, y_n(\cdot)]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{C} = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \cdots, c_n)\ (c_i > 0),$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(\cdot)) = [g_1(y_1(\cdot)), g_2(y_2(\cdot)), \cdots, g_n(y_n(\cdot))]^{\mathrm{T}}$$

是输出向量, $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ 是反馈矩阵, $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$ 是时滞矩阵, $\boldsymbol{S} = [s_1, s_2, \cdots, s_n]^{\mathrm{T}}$ 是阈值, τ 是时滞.

假设作用函数满足下面的条件:

(A1) $g(0) = 0$, $|g(\xi)| \leqslant M$;

(A2) $0 \leqslant g(x) - g(y) \leqslant l_i(x-y)$, $\quad \forall x, y \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{L} = \operatorname{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_n)$.

在仿真实验中, 选取作用函数为

$$g_i(y_i) = 0.5(|y_i + 1| - |y_i - 1|), \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

假设系统(1)存在稳定点 $\boldsymbol{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*]^{\mathrm{T}}$, 假设 $\boldsymbol{x}(\cdot) = \boldsymbol{y}(\cdot) - \boldsymbol{y}^*$, 则式(1)可以变换为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}(\cdot) = [x_1(\cdot), x_2(\cdot), \cdots, x_n(\cdot)]^{\mathrm{T}}$ 是新的状态向量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\cdot)) = [f_1(x(\cdot)), f_2(x(\cdot)), \cdots, f_n(x(\cdot))]^{\mathrm{T}}$ 代替了过去的输出向量, 并且有 $f_i(x_i(\cdot)) = g_i(x_i(\cdot) + y_i^*) - g_i(y_i^*)$. 于是作用函数 $f_i(x_i(\cdot))$ 满足 $f_i^2(x_i(\cdot)) \leqslant l_i x_i(\cdot) f_i(x_i(\cdot))$, $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

从上面的分析中, 可以通过系统(1)的平衡点 $\boldsymbol{y}^*$, 把系统(3)的稳定点平移到零点上. 于是, 下面的研究就把系统(1)的平衡点 $\boldsymbol{y}^*$ 的渐近稳定性问题, 转化为系统(3)的关于零点的渐近稳定问题. 基于 Liapunov-Krasovskii 泛函的方法, 提出新的稳定性判据.

引理 1[11] 对于任意的正定矩阵 $\boldsymbol{M} \in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} > 0$, 及常数 $\gamma > 0$, 函数 $\omega: [0, \gamma] \to R^m$, 于是就有下面的关于积分的不等式成立:

$$\gamma \int_0^{\gamma} \omega^{\mathrm{T}}(\beta) \boldsymbol{M} \omega(\beta) \mathrm{d}\beta \geqslant \left(\int_0^{\gamma} \omega(\beta)\mathrm{d}\beta\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \left(\int_0^{\gamma} \omega(\beta)\mathrm{d}\beta\right).$$

2 新判据

首先, 研究的是带有时滞的细胞神经网络的时滞相关稳定性判据.

定理 1 如果存在正定对称的矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{Z}$ 和正定对角矩阵 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$、$\boldsymbol{D}_4$, 使得矩阵满足 $\Xi < 0$, 那么系统(3)的平衡点是全局渐近稳定的, 其中(* 表示对称矩阵中的对称的部分)

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ * & \boldsymbol{Q}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} -\boldsymbol{PC} - \boldsymbol{CP} + \boldsymbol{Q}_{11} + \\ \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZC} - \tau^{-1}\boldsymbol{Z} + \\ 2\boldsymbol{LD}_1 \end{array} & \begin{array}{c} \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{Q}_{12} - \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZA} - \\ \boldsymbol{CD} - \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{LD}_2 \end{array} & \tau^{-1}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{PB} - \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} \\ * & \begin{array}{c} \boldsymbol{Q}_{22} + \tau\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZA} + \boldsymbol{DA} + \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - 2\boldsymbol{D}_2 \end{array} & \boldsymbol{0} & \tau\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} + \boldsymbol{DB} \\ * & * & 2\boldsymbol{LD}_3 - \boldsymbol{Q}_{11} - \tau^{-1}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{LD}_4 - \boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{Q}_{12} \\ * & * & * & \tau\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} - 2\boldsymbol{D}_4 - \boldsymbol{Q}_{22} \end{bmatrix}.$$

证明　选择下面的 Liapunov 泛函:

$$\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{V}_1(t)+\boldsymbol{V}_2(t)+\boldsymbol{V}_3(t)+\boldsymbol{V}_4(t),$$

$$\boldsymbol{V}_1(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{V}_2(t)=\int_{t-\tau}^{t}(\tau+s-t)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{V}_3(t)=2\sum_{i=1}^{n}d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{V}_4(t)=\int_{t-\tau}^{t}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))]\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ * & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s))\end{bmatrix}\mathrm{d}s.$$

可以得到 $\boldsymbol{V}(t)$ 是正定的, $\boldsymbol{V}_i(t)$ 关于时间的导数都是可以得到的:

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)))=$$
$$-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)),$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_2(t)=\tau\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\tau\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s\boldsymbol{Z}\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s.$$

根据引理 1, 我们可以得到

$$\dot{\boldsymbol{V}}_2(t)\leqslant\tau(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)))-\frac{1}{\tau}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau)),$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_3(t)=2\sum_{i=1}^{n}d_i\dot{x}_i(t)f_i(x_i(t))=$$
$$-2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)),$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_4(t)=[\boldsymbol{x}(t)\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\end{bmatrix}-$$
$$[\boldsymbol{x}(t-\tau)\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t-\tau)\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))\end{bmatrix}.$$

进一步, 如果存在正定对角的矩阵 $\boldsymbol{D}_i$, $i=1,2,3,4$ 并且有关于作用函数的不等式成立:

$$f_i^2(x_i(\cdot))\leqslant x_i(\cdot)l_if_i(x_i(\cdot)),$$

$$\Delta_1=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{x}(t)+$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t)-2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\geqslant\boldsymbol{0},$$

$$\Delta_2=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))-$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\tau))\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))+$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\tau))\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t-\tau)-2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\tau))\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))\geqslant\boldsymbol{0},$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}\leqslant\dot{\boldsymbol{V}}_1+\dot{\boldsymbol{V}}_2+\dot{\boldsymbol{V}}_3+\dot{\boldsymbol{V}}_4+\Delta_1+\Delta_2=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\Xi\boldsymbol{e}(t)<\boldsymbol{0},$$

其中　$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\tau))]$.

实际上, $\Xi<\boldsymbol{0}$, 即 $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t))<\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{x}(t)\neq\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))=\boldsymbol{0}$.

满足了 Liapunov 全局渐近稳定定理的所有条件, 所以对于系统(1) 关于平衡点 $\boldsymbol{y}^*$ 和系统(3) 关于平衡点, $\Xi<\boldsymbol{0}$ 都是全局渐近稳定的充分条件.

推论 1　在定理 1 中, 还有另外一种处理不等式的技巧来处理 $\dot{\boldsymbol{V}}_2(t)$, 即

$$
\begin{aligned}
V_2(t) = {} & \int_{t-\tau}^{t} (\tau + s - t)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s, \\
\dot{V}_2(t) = {} & \tau\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s = \\
& \tau\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \int_{t-\tau}^{t} [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{11} & \boldsymbol{Z}_{12} \\ \boldsymbol{Z}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) \end{bmatrix} \mathrm{d}s + \\
& 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}_{12}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-\tau)) + \tau\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}_{22}\boldsymbol{e}(t) \leqslant \\
& \tau(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \\
& \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau))) + 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{x}(t) - 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{x}(t-\tau) + \tau\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}_{22}\boldsymbol{e}(t).
\end{aligned}
$$

通过上面的方法，我们可以得到另外的稳定性判据，即在满足线性矩阵不等式 $\Xi_1 < \boldsymbol{0}$ 时，系统(3)的平衡点是全局渐近稳定的.

$$
\Xi_1 = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} -\boldsymbol{PC} - \boldsymbol{CP} + \boldsymbol{Q}_{11} + \\ \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZC} + \tau\boldsymbol{A}_{11} + \\ \boldsymbol{A}_{15} + \boldsymbol{A}_{15}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{LD}_1 \end{matrix} &
\begin{matrix} \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{Q}_{12} - \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZA} - \\ \boldsymbol{CD} - \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{LD}_2 + \\ \tau\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{25}^{\mathrm{T}} \end{matrix} &
\tau\boldsymbol{A}_{13} + \boldsymbol{A}_{35}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}_{15} &
\begin{matrix} \boldsymbol{PB} - \tau\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} + \\ \tau\boldsymbol{A}_{14} + \boldsymbol{A}_{45}^{\mathrm{T}} \end{matrix} \\
* &
\begin{matrix} \boldsymbol{Q}_{22} + \tau\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZA} + \\ \boldsymbol{DA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - \\ 2\boldsymbol{D}_2 + \tau\boldsymbol{A}_{22} \end{matrix} &
\tau\boldsymbol{A}_{23} - \boldsymbol{A}_{25} &
\begin{matrix} \tau\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} + \boldsymbol{DB} + \\ \tau\boldsymbol{A}_{24} \end{matrix} \\
* & * &
\begin{matrix} 2\boldsymbol{LD}_3 - \boldsymbol{Q}_{11} + \tau\boldsymbol{A}_{33} - \\ \boldsymbol{A}_{35} - \boldsymbol{A}_{35}^{\mathrm{T}} \end{matrix} &
\begin{matrix} \boldsymbol{LD}_4 - \boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{Q}_{12} + \\ \tau\boldsymbol{A}_{34} - \boldsymbol{A}_{45}^{\mathrm{T}} \end{matrix} \\
* & * & * &
\begin{matrix} \tau\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZB} - 2\boldsymbol{D}_4 - \\ \boldsymbol{Q}_{22} + \tau\boldsymbol{A}_{44} \end{matrix}
\end{bmatrix}.
$$

定理2 如果存在正定对称的矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 和正定对角矩阵 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$、$\boldsymbol{D}_4$，并且矩阵满足 $\Theta < \boldsymbol{0}$，则系统(3)的平衡点是全局渐近稳定的，其中

$$
\Theta = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} -\boldsymbol{PC} - \boldsymbol{CP} + \\ \boldsymbol{Q}_{11} + 2\boldsymbol{LD}_1 \end{matrix} &
\begin{matrix} \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{Q}_{12} - \boldsymbol{CD} - \\ \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{LD}_2 \end{matrix} &
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{PB} \\
* &
\begin{matrix} \boldsymbol{DA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - \\ 2\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{Q}_{22} \end{matrix} &
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{DB} \\
* & * & 2\boldsymbol{LD}_3 - \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{LD}_4 - \boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{Q}_{12} \\
* & * & * & -2\boldsymbol{D}_4 - \boldsymbol{Q}_{22}
\end{bmatrix},
$$

证明 选择下面的 Liapunov 函数

$$
\begin{aligned}
V(t) = {} & V_1(t) + V_3(t) + V_4(t), \\
V_1(t) = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Px}(t), \\
V_3(t) = {} & 2\sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^{x_i(t)} f_i(s)\mathrm{d}s \qquad (d_i > 0), \\
V_4(t) = {} & \int_{t-\tau}^{t} [\boldsymbol{x}(s) \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s))]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(s) \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s)) \end{bmatrix}\mathrm{d}s, \\
\dot{V} \leqslant {} & \dot{V}_1 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4 + \Delta_1 + \Delta_2 = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\Theta\boldsymbol{e}(t) < 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) \quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t)) \quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\tau))]$.

实际上，$\Theta < \boldsymbol{0}$，则有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) < \boldsymbol{0}$，对于 $\boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{0}$，$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}(t-\tau) = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) = \boldsymbol{0}$.

满足了 Liapunov 全局渐近稳定定理的所有条件, 所以对于系统(1) 关于平衡点 $\boldsymbol{y}^*$ 和系统(3) 关于平衡点, $\Theta < \mathbf{0}$ 都是全局渐近稳定的充分条件.

主要的定理都是以线性矩阵不等式的形式给出的, 所以很容易通过 LMI 工具箱得到未知参数的最优值.

3 数 值 算 例

在这里, 我们考虑一个由两个神经元构成的神经网络, 并给出算例仿真实验. 考虑到神经网络模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.7x_1(t) + 0.6f(x_1(t)) + f(x_2(t)) + 1.6f(x_2(t-\tau)), \\ \dot{x}_2(t) = -0.9x_1(t) - f(x_1(t)) - f(x_2(t)) + f(x_1(t-\tau)) + f(x_2(t-\tau)). \end{cases}$$

通过 LMI 工具箱, 我们可以得到满足定理 1 的未知矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2.718\,9 & 3.498\,3 \\ * & 28.891\,2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 58.205\,3 & 32.564\,2 \\ * & 72.818\,5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.001\,2 & 0 \\ * & 3.326\,4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.000\,6 & 0 \\ * & 0.024\,1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 2.433\,9 & 0 \\ * & 1.022\,4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_3 = \begin{bmatrix} 0.000\,7 & 0 \\ * & 0.026\,9 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_4 = \begin{bmatrix} 0.001\,0 & 0 \\ * & 65.170\,1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 11.188\,9 & -12.187\,4 \\ * & 200.479\,1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_{12} = \begin{bmatrix} 0.207\,3 & -1.862\,1 \\ 26.877\,8 & 24.224\,6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 3.940\,9 & 3.287\,7 \\ * & 4.060\,9 \end{bmatrix},$$

得到 $\tau = 0.013\,5$, 即当时滞不超过 0.013 5 时, 系统是稳定的, 这在已有的很多文献中的稳定性判据是做不到的.

在时滞很小的时候, 通过仿真图 1、2 可以看出, 系统在不同的时滞下, 仿真曲线是不同的.

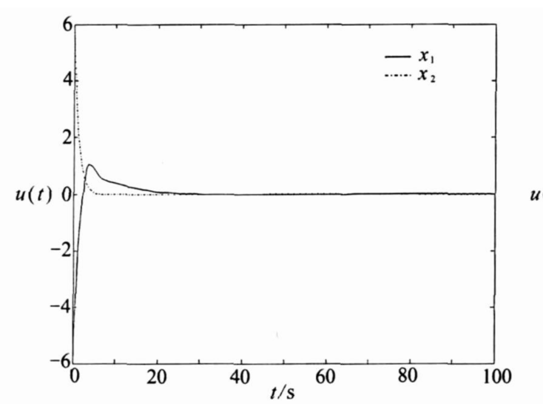

图 1 仿真曲线 ($\tau = 0.013\,5$)

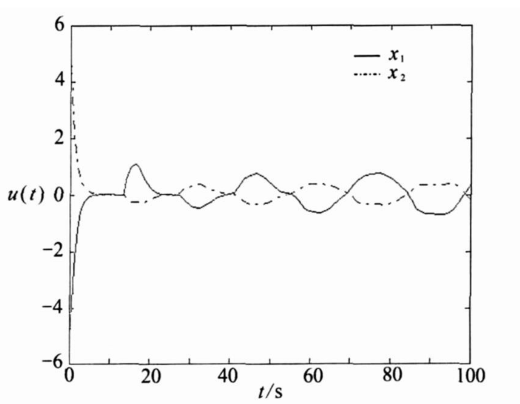

图 2 仿真曲线 ($\tau = 13.5$)

另外, 这个模型只是在时滞很小的时候才稳定, 所以对于文献[9-11] 中时滞无关的结论和文献[8] 中时滞相关的结论都是无法很好地判断出系统是不是稳定的.

4 结 论

在本文中, 通过建立 Liapunov-Krasovskii 泛函和运用矩阵的技巧, 提出了新的时滞细胞神经网络的稳定性判据. 时滞相关的判据是以线性矩阵不等式的形式给出的, 可以很容易得出时滞上界. 通过算例仿真, 可以证明文中的结论优越于已有文献的一些相关结果.

[参 考 文 献]

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: Theory[J]. IEEE Trans, Circuits and Systems, 1988, **35**(10): 1257-1272.

[2] Roska T, Boros T, Thiran P, et al. Detecting simple motion using cellular neural networks[A]. In: Proceedings 1990 IEEE Internat Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications [C]. 1990, 127-138.

[3] Singh Vimal. A Generalized LMI-Based approach to the global asymptotic stability of cellular neural networks[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 2004, **15**(1): 223-225.

[4] LOU Xu-gang, CUI Bao-tong. Global asymptotic stability of delay BAM neural networks with impulses [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, **29**(4): 1023-1031.

[5] CHEN Wu-hua, ZHENG Wei-xing. Global asymptotic stability of a class of neural networks with distributed delays[J]. IEEE Trans, Circuits and Systems, 2006, **53**(3): 644-652.

[6] Singh Vimal. Global asymptotic stability of neural networks with delay: Comparative evaluation of two criteria[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, **31**(5): 1187-1190.

[7] Arik Sabri. An analysis of exponential stability of delayed neural networks with time varying delays [J]. Neural Networks, 2004, **17**(7): 1027-1031.

[8] HUA Chang-chun, LONG Cheng-nian, GUAN Xin-ping. New results on stability analysis of neural networks with time-varying delays[J]. Physics Letter A, 2006, **352**: 335-240.

[9] Cao J, WANG Jun. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions, Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2003, **50**(1): 34-44.

[10] 周冬明, 曹进德, 张立明. 时滞神经网络全局渐近稳定性条件[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 341-348.

[11] GU Ke-qin. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[A]. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control [C]. Vol **3**. Sydney, Australia, 2000, 2805-2810.

Generalized LMI-Based Approach to the Global Asymptotic Stability of Cellular Neural Networks With Delay

LIU De-you, ZHANG Jian-hua, GUAN Xin-ping, XIAO Xiao-dan
(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, P. R. China)

Abstract: The global asymptotic stability problem of cellular neural networks with delay is investigated. A new stability condition was presented based on Liapunov-Krasovskii method, which is dependent on the size of delay. The result is given in the form of LMI(linear matric inequality), and the admitted upper bound of the delay can be obtained easily. The time delay dependent and independent results can be obtained, which include some results in the former literature. Finally, a numerical example was given to illustrate the effectiveness of the main results.

Key words: delayed cellular neural networks (DCNNs); LMI(linear matric inequality); global stability