文章编号: 1000-0887(2008) 06-0741-08

三点边值问题的正解*

缪烨红[1], 张吉慧[2]

(1. 健雄职业技术学院 基础教学部, 江苏 太仓 215400;
2. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210097)

(协平推荐)

摘要: 利用 Krasnoselskii's 不动点定理和重合度定理, 研究了 p-Laplace 三点边值问题单解或多解的存在性, 以及在共振情况下解的存在性.

关 键 词: 三点边值问题; 正解; 不动点定理; 重合度定理
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

我们研究边值问题:

$$\begin{cases} -\left(g(t)\varphi(x')\right)' = \lambda F(t,x), & t \in (0,1), \\ x'(0) = 0,\ x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varphi(x) = |x|^{p-2}x$, $p > 1$, λ 是正参数, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \eta < 1$ 是给定的常数.

目前关于含有 p-Laplace 的两点边值问题已被广泛地研究, 如文献[1-4]. 在文献[1]中, 作者应用打靶法和 Sturm 比较定理研究了当 $F(t,x) = c(t)f(x)$ 且连续, 在边值条件 $x(0) = x(T) = 0$ 下问题(1)的正解的存在性. 三点边值问题也受到越来越多的关注, 如文献[5-7]. 在文献[7]中, 作者用不动点指数定理证明了奇异问题

$$\begin{cases} -\left(\varphi(y')\right)' = a(t)f(y), & t \in (0,1), \\ y'(0) = 0,\ y(1) = \beta y(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

单解或多解的存在性, 其中 $0 \leqslant \beta < 1$, $0 < \eta < 1$, $p \geqslant 2$, $f \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, $a \in C((0,1),[0,+\infty))$ 且 $a(t)$ 在 $t = 0, 1$ 处可能奇异.

受文献[7]的启发, 本文研究问题(1)在共振与非共振情况下单个解或多解的存在性.

1 主 要 结 果

本节中假定下列条件成立:

(H_0) $F:(0,1)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 满足 Carathéodory 条件且存在函数 $h_1, h_2:(0,1) \to [0,+\infty)$, $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 使得

* 收稿日期: 2007-08-15; 修订日期: 2008-04-25
作者简介: 缪烨红(1982—), 女, 江苏靖江人, 硕士(联系人. Tel: +86-512-53940678; E-mail: myh-82@126.com);
张吉慧, 教授(Tel: +86-25-86272816; E-mail: jihuiz@jlonline.com).

$$h_1(t)f(x) \leqslant F(t,x) \leqslant h_2(t)f(x),$$

其中 h_1、h_2 和 f 满足:

(H_1) h_i 是 $(0,1)$ 上的可测函数, 且可能在 $t=0$, $t=1$ 处奇异, $0<\int_0^1 h_i(t)\mathrm{d}t<+\infty$, $i=1,2$;

(H_2) $f\in C([0,1],[0,+\infty))$, 且存在非负常数 f_0 和 f_∞ 使得

$$f_0=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{p-1}},\ f_\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{p-1}};$$

(H_3) $g\in C^1([0,1],(0,+\infty))$, g 在 $[0,1]$ 内单调递增.

本节中我们所用的工具是下面的不动点定理:

定理 A 设 E 是一 Banach 空间, $K\subset E$ 是 E 中的一个锥. 假设 Ω_1、Ω_2 是 E 的开子集, 且 $0\in\Omega_1$, $\Omega_1\subset\Omega_2$, 设 $T:K\cap\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1\to K$ 是一全连续算子满足:

(A_1) $\|Tu\|\leqslant\|u\|$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$, 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$;

或

(A_2) $\|Tu\|\geqslant\|u\|$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$, 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 内有一不动点.

考虑 Banach 空间 $C[0,1]$, 范数定义为 $\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$.

由文献[6], 可得到下列引理:

引理 1 设 $0<\alpha<1$, 假设(H_3) 成立. 那么当 $y\geqslant 0$ 时, 其中 y 是 $(0,1)$ 上的可测函数, 方程

$$\begin{cases}-(g(t)\varphi(x'))'=y(t), & t\in(0,1),\\ x'(0)=0,\ x(1)=\alpha x(\eta)\end{cases}\tag{3}$$

有唯一的解

$$x(t)=\int_t^1\phi\left(\frac{\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\frac{\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s$$

且 $x(t)\geqslant 0$, 其中 $\phi(u)=\varphi^{-1}(u)=|u|^{1/(p-1)}\mathrm{sgn}u$.

引理 2 设 $0<\alpha<1$, $y(t)$ 是非负的可测函数. 则问题(3) 的解 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的, 且 $x(t)$ 满足

$$\min_{t\in[\eta,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|,$$

其中 $\gamma=\alpha(1-\eta)/(1-\alpha\eta)$.

证明 首先证明 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的.

假如 $x(t)$ 是凸的, 若 $x''(t)>0$, 则

$$g(t)(\varphi(x'))'=g(t)(|x'|^{p-2}x')'=pg(t)x''|x'|^{p-2}>0,$$

由 $y(t)\geqslant 0$, 有

$$g'(t)\varphi(x')+g(t)(\varphi(x'))'=(g(t)\varphi(x'))'\leqslant 0.$$

另一方面, 因为 $x'(0)=0$, $x''(t)>0$, 所以 $x'(t)>x'(0)=0$, $t\in(0,1]$, 由 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上递增, 有 $g'(t)\varphi(x')\geqslant 0$ 成立, 矛盾.

因此 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的.

设 $x(t_0)=\|x\|$, 根据引理 1, 有 $x(1)=\alpha x(\eta)\leqslant x(\eta)$, 因为 $x(t)$ 是凹的, 则 $t_0\leqslant\eta<1$, $\min_{t\in[\eta,1]}x(t)=x(1)$, 且

$$\frac{x(1)-x(\eta)}{1-\eta}\leqslant\frac{x(t_0)-x(1)}{t_0-1},$$

即

$$x(t_0)\leqslant x(1)+\frac{x(1)-x(\eta)}{1-\eta}(0-1)=x(1)\frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}.$$

记 $\gamma=\alpha(1-\eta)/(1-\alpha\eta)$, 即有 $\min_{t\in[\eta,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|$.

定义锥 $K=\left\{x\in C[0,1], x(t)\geqslant 0: \min_{t\in[\eta,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|\right\}$, 定义积分算子 $T:K\to C[0,1]$ 为

$$Tx(t)=\int_t^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s F(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s F(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s,$$

则由引理 1, 问题(1) 有解 $x=x(t)$ 当且仅当 x 是算子 T 的不动点.

引理 3　假设$(\mathrm{H}_0)\sim(\mathrm{H}_3)$ 成立. 则 $T:K\to K$ 全连续.

类似地, 定义算子

$$S_ix(t)=\int_t^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_i(\tau)f(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_i(\tau)f(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s,\qquad i=1,2.$$

根据文献[2] 中的引理 2 可得下列定理:

引理 4　假设$(\mathrm{H}_0)\sim(\mathrm{H}_3)$ 成立. 则对于 $x\in K$, 有

$$(S_1x)(t)\leqslant(Tx)(t)\leqslant(S_2x)(t),\qquad t\in[0,1].$$

本节中给出两个记号:

$$A=\left\{\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\phi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\right\}^{p-1},$$
$$B=\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\frac{\int_0^s h_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\right\}^{p-1}.$$

定理 1　假设$(\mathrm{H}_0)\sim(\mathrm{H}_3)$ 成立. 若 $Af_0<\gamma^{p-1}Bf_\infty$. 则对于每一个 $\lambda\in(1/(\gamma^{p-1}Bf_\infty), 1/(Af_0))$, 边值问题(1) 至少有 1 个正解.

证明　设 $\lambda\in(1/(\gamma^{p-1}Bf_\infty), 1/(Af_0))$, 选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$\frac{1}{\gamma^{p-1}B(f_\infty-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{A(f_0+\varepsilon)}.$$

由 f_0 的定义, 存在 $R_1>0$ 使得 $f(x)\leqslant(f_0+\varepsilon)x^{p-1}$, $x\in[0,R_1]$. 选取 $x\in K$ 且 $\|x\|=R_1$,

$$Tx(t)\leqslant S_2x(t)=$$
$$\int_t^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}(\lambda(f_0+\varepsilon))^{1/(p-1)}R_1\int_0^1\varphi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant\|x\|.$$

令 $\Omega_1=\left\{x\in K:\|x\|<R_1\right\}$, 则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|, x\in K\cap\partial\Omega_1$.

另一方面, 取 R_2 使 $f(x)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)x^{p-1}, x\in[R_2,+\infty)$. 取 $R_2=\max\left\{2R_1,\gamma^{-1}R_2\right\}$, 且记 $\Omega_2=\left\{x\in K:\|x\|<R_2\right\}$, 则若 $x\in K\cap\partial\Omega_2$,

$$Tx(1)\geqslant S_1x(1)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\varphi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_1(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\lambda(f_\infty-\varepsilon))^{1/(p-1)}\gamma R_2\int_\eta^1\varphi\left(\frac{\int_0^s h_1(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\geqslant\|x\|,$$

因此 $\|Tx\|\geqslant\|x\|, x\in K\cap\partial\Omega_2$.

根据定理A 的(A_1) 得 T 存在不动点 $x\in K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$.

定理2 假定(H_0)~(H_3) 成立. 若 $Af_\infty<\gamma^{p-1}Bf_0$. 则对于每一个 $\lambda\in(1/(\gamma^{p-1}Bf_0), 1/(Af_\infty))$, 边值问题(1) 至少存在一个正解.

证明 设 $\lambda\in(1/(\gamma^{p-1}Bf_0), 1/(Af_\infty))$, 取 $\varepsilon>0$ 满足

$$\frac{1}{\gamma^{p-1}B(f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{A(f_\infty+\varepsilon)}.$$

根据 f_0 的定义, 存在 $R_3>0$ 使得

$$f(x)\geqslant(f_0-\varepsilon)x^{p-1},\qquad x\in[0,R_3].$$

取 $x\in K$ 且 $\|x\|=R_3$,

$$Tx(1)\geqslant S_1x(1)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\varphi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_1(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}(\lambda(f_0-\varepsilon))^{1/(p-1)}\gamma\|x\|\int_\eta^1\varphi\left(\frac{\int_0^s h_1(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\geqslant\|x\|.$$

若令 $\Omega_3=\left\{x\in K:\|x\|<R_3\right\}$, 则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|, x\in K\cap\partial\Omega_3$.

另一方面, 取 R_4 使 $f(x)\leqslant(f_\infty+\varepsilon)x^{p-1}, x\in[R_4,+\infty)$.

(i) 若 f 有界, 即存在 $M>0$ 使得 $f(x)\leqslant M$, 对所有 $x\in[0,\infty)$.

令 $R_4=\max\left\{2R_3,(\lambda MA)^{1/(p-1)}\right\}$, 则若 $x\in K$ 且 $\|x\|=R_4$, 可得

$$Tx(t)\leqslant S_2x(t)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\varphi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}(\lambda M)^{1/(p-1)}\int_0^1\varphi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant R_4=\|x\|.$$

(ii) 若 f 无界, 则取 $R_4>\max\left\{2R_3,\gamma^{-1}R_4\right\}$ 使

$$f(x)\leqslant f(R_4),\qquad x\in[0,R_4].$$

若 $x\in K$ 且 $\|x\|=R_4$,

$$Tx(t)\leqslant S_2x(t)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\varphi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\lambda^{1/(p-1)}\int_0^1 \phi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(R_4)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}(\lambda(f_\infty+\varepsilon))^{1/(p-1)}R_4\int_0^1 \phi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s \leqslant R_4=\|x\|.$$

记 $\Omega_4=\left\{x\in K:\|x\|<R_4\right\}$, 综上所述, 都有 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$, $x\in K\cap\partial\Omega_4$. 因此由定理A 的($A_2$), T 有不动点$x\in K\cap(\Omega_4\setminus\Omega_3)$.

定理 3 假设(H_0) ~ (H_3) 成立. 若存在两个正常数 R_1、R_2 满足 $R_1<\gamma R_2$, $AR_2^{p-1}\leqslant BR_1^{p-1}$ 使得

1) $f(x)\leqslant R_1^{p-1}/(\lambda A)$, $\forall x\in[0,R_1]$;

2) $f(x)\geqslant R_2^{p-1}/(\lambda B)$, $\forall x\in[\gamma R_2,R_2]$.

则边值问题(1) 至少有 1 个正解 $x\in K$ 且$R_1\leqslant\|x\|\leqslant R_2$.

证明 设 $\Omega_1=\left\{x\in K:\|x\|<R_1\right\}$, $\Omega_2=\left\{x\in K:\|x\|<R_2\right\}$.

对于任意 $x\in K\cap\partial\Omega_1$, 有

$$Tx(t)\leqslant S_2x(t)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_2(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{R_1}{A^{1/(p-1)}}\int_0^1\phi\left(\frac{\int_0^s h_2(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s=R_1=\|x\|.$$

则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$, $x\in K\cap\partial\Omega_1$.

另一方面, 对于任意 $x\in K\cap\partial\Omega_2$, 有 $\gamma R_2\leqslant x(t)\leqslant R_2$, $t\in[\eta,1]$, 由条件(2) 有

$$Tx(1)\geqslant S_1x(1)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\phi\left(\lambda\frac{\int_0^s h_1(\tau)f(x(\tau))\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{R_2}{B^{1/(p-1)}}\int_\eta^1\phi\left(\frac{\int_0^s h_1(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\right)\mathrm{d}s=R_2=\|x\|.$$

则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$, $x\in K\cap\partial\Omega_2$.

应用定理A, T 有不动点x 且$R_1\leqslant\|x\|\leqslant R_2$.

定理 4 假设(H_0) ~ (H_3) 成立. 此外, 假设$f_0=f_\infty=\infty$. 则 $\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$, 边值问题(1) 至少有两个正解. 其中

$$\lambda^*=\sup_{x>0}\frac{x^{p-1}}{A\max_{u\in[0,x]}f(u)}.$$

定理 5 假设(H_0) ~ (H_3) 成立. 此外, 假设$f_0=f_\infty=0$. 则 $\forall\lambda\in(0,\lambda^{**})$, 边值问题(1) 至少有两个正解. 其中

$$\lambda^{**}=\inf_{x>0}\frac{x^{p-1}}{B\min_{u\in[\gamma x,x]}f(u)}.$$

注 定理 4 和定理 5 的证明根据文献[2] 中的定理 3.3 和定理 3.5 很容易能够得到.

2 共 振 情 形

当 $\alpha=1$, $p=2$ 时, 我们应用 Mawhin 的重合度定理, 考虑如下共振情形:

$$(g(t)(x'))' = \lambda F(t,x),\ x'(0) = 0,\ x(1) = x(\eta). \tag{4}$$

本节中假设下列条件成立:

(h_1) $F:[0,1]\times R\to R$ 连续, 存在常数 $M>0$ 使得

$$xF(t,x)>0,\ 当\ |x|>M,\quad t\in[0,1],\ \lambda 是正参数;$$

(h_2) $g\in C^1([0,1],(0,+\infty))$.

定理 B(Jean Mawhin[8]) 设 L 是一零指标 Fredholm 算子, N 在 Ω 上 L-紧. 假设下列条件成立:

(B_1) $Lx+\lambda Nx\neq 0,\ (x,\lambda)\in[(D(L)\setminus\ker L)\cap\partial\Omega]\times(0,1)$;

(B_2) $Nx\notin \mathrm{Im}L,\ x\in\ker L\cap\partial\Omega$;

(B_3) $\deg(QN|_{\Omega\cap\ker L},\Omega\cap\ker L,0)\neq 0$, 其中 $Q:Y\to Y$ 连续的映射且 $\mathrm{Im}L=\ker Q$.

则 $|D[(L,N),\Omega\cap D(L)]|=|\deg(QN|_{\Omega\cap\ker L},\Omega\cap\ker L,0)|\neq 0$, 且方程 $Lx+Nx=0$ 在 $D(L)\cap\Omega$ 中至少有一解.

定理 6 假设(h_1)~(h_2)成立. 则边值问题(4)在 $C[0,1]$ 中至少有 1 个解.

证明 设 X、Y 为 Banach 空间 $C^1[0,1]$ 和 $C[0,1]$.

定义 $L:D(L)\subset X\to Y$ 为

$$D(L)=\left\{x\in AC^1[0,1]:x'(0)=0,x(1)=x(\eta)\right\},$$

对于 $x\in D(L)$, $Lx=(g(t)x')'$.

则 $\ker L=R$, 且 $\mathrm{Im}L=\left\{y\in C[0,1]:\int_\eta^1\left[\int_0^s y(\tau)\,\mathrm{d}\tau/g(s)\right]\mathrm{d}s=0\right\}$, L 是零指标 Fredholm 算子.

定义 $N:X\to Y$ 为 $Nx(t)=-\lambda F(t,x)$, $t\in(0,1)$. 定义连续映射 $P:X\to\ker L$, $Q:Y\to Y_0$ 分别为

$$Px(t)=x(0),\ Q(y)=\frac{2}{1-\eta}\int_\eta^1\frac{\int_0^s y(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{g(s)}\mathrm{d}s,$$

其中 $Y=\mathrm{Im}L\oplus Y_0$. 令 $U_1=\left\{x\in D(L):Lx+\sigma Nx=0,\ \sigma\in(0,1)\right\}$. 设 $x\in U_1$, 且假设存在 $t_0\in[0,1)$, 使得 $|x(t_0)|=\|x\|$, 则 $|x(t_0)|\leqslant M$. 如若不然, 即若 $|x(t_0)|>M$, 则

(i) $t_0\neq 0$

若 $x(t_0)>M$, 由(h_1), 有 $x'(t_0)=0, x''(t_0)<0$, 及

$$0>x(t_0)g(t_0)x''(t_0)=x(t_0)(g(t)x'(t))'|_{t=t_0}=$$
$$\lambda\sigma x(t_0)F(t_0,x(t_0))>0,$$

矛盾.

同样可以证明, 若 $x(t_0)<-M$, 仍然矛盾.

(ii) $t_0=0$

若 $x(0)>M$, 则

$$(g(t)x'(t))'|_{t=0}=g(0)x''(0)+g'(0)x'(0)=\lambda\sigma F(0,x(0))>0,$$

因此 $x''(0)>0$, 则 t 充分小时 $x'(t)$ 单调递增, 因为 $x'(0)=0$, $x(t)$ 在 $(0,1)$ 内递增, 这与 $x(0)=\|x\|$ 矛盾. 若 $x(0)<-M$, 也可同样得出矛盾. 因此, $\|x\|\leqslant M$, $\forall x\in U_1$. 令 $U_2=\left\{x\in\ker L:Nx\in\mathrm{Im}L\right\}$. 假定 $x\in U_2$, 则 $x\in\ker L=R$, $x\equiv c$ 是常数.

若 $c>M$, 由条件(h_1), 有

$$\int_{\eta}^{1}\frac{\int_{0}^{s}y(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\mathrm{d}s>0.$$

若 $c<-M$, 由条件(h_1), 有

$$\int_{\eta}^{1}\frac{\int_{0}^{s}y(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\mathrm{d}s<0.$$

也就是说 $Nx\notin \mathrm{Im}L$, 矛盾, 因此, $\|x\|=|c|\leqslant M$, $\forall x\in U_2$.

下面, 令 $U_3=\left\{x\in \ker L:\mu QNx+(1-\mu)x=0,\ \mu\in[0,1]\right\}$. 设 $x\in U_3$, 则 $x\in\ker L=R$, $x\equiv d$ 常数, 且有

$$\frac{2\mu}{1-\eta}\int_{\eta}^{1}\frac{\int_{0}^{s}\lambda F(\tau,d)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\mathrm{d}s=-(1-\mu)d.$$

易证 $|d|\leqslant M$. 故 U_3 也有界.

现记 $X=\ker L\oplus X_1$, 易见 $X_1=\ker P$.

记 $L_1=L|_{D(L)\cap X_1}$, 则 $K=L_1^{-1}:\mathrm{Im}L\to D(L)\cap X_1$ 是线性算子, 定义为

$$(Ky)(t)=\int_{0}^{t}\frac{\int_{0}^{s}y(\tau)\mathrm{d}\tau}{g(s)}\mathrm{d}s,\qquad y\in\mathrm{Im}L.$$

根据 Arzela-Ascoli 定理, $K(I-Q)N$ 是紧的, 因此 N 是L- 紧的. 设 $\Omega\subset X$ 是有界的开集且 $\Omega\supseteq\bigcup_{i=1}^{3}U_i$, 则对于 $x\in\ker L\cap\partial\Omega$,

$$\mu QNx+(1-\mu)x\neq 0,\ \mu\in[0,1],$$

由度的同伦不变性知, $\deg(QN|_{\Omega\cap\ker L},\Omega\cap\ker L,0)\neq 0$. 定理B的条件都满足, 定理得证.

[参 考 文 献]

[1] Yang X J. Positive solutions for the one dimensional p-Laplacian[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, **35**(1/2): 129-135.

[2] Agarwal R P, L H S, O' Regan D. Eigenvalues and the one-dimensional p-Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 2002, **266**(2): 384-400.

[3] L H S, O' Regan D, Zhong C K. Multiple positive solutions for the one-dimensional singular p-Laplacian}[J]. Appl Math Compute, 2002, **133**(2/3): 407-422.

[4] Wong F H. Existence of positive solutions for m-Laplacian boundary value problems[J]. Appl Math Letters, 1999, **12**(3): 11-17

[5] Feng W Y. On an m-point boundary value problem[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**(8): 5369-5374.

[6] Ma R Y. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Electronic J Differential Equations, 1999, **1999**(34): 1-8.

[7] Liu B. Positive solution of singular three-point boundary value problems for the one-dimensional p-Laplacian[J]. Comput Math Appl, 2004, **48**(5/6): 913-925.

[8] Mawhin J. Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations [M]. Lecture Notes in Mathematics. Vol **1537**. New York/Berlin, 1991.

[9] Bai C Z, Fang J X. Existence of positive solutions for three-point boundary value problems at resonance[J]. J Math Anal Appl, 2004, **291**(2): 538-549.

Positive Solutions of Three-Point Boundary Value Problems

MIAO Ye-hong[1], ZHANG Ji-hui[2]
(1. Foundation Teaching Department, Chein-Shung Institute of Technology, Taicang, Jiangsu 215400, P. R. China;
2. School of Mathematics and Computer Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P. R. China)

Abstract: The existence of single or multiple positive solutions of three-point boundary value problems involving one dimensional p-Laplacian was considered. Then the existence of solution when the problems is in resonance case was studied. The approach is based on the Krasnoselskii' s fixed point theorem and the coincidence degree theory.

Key words: three-point boundary value problems; positive solution; fixed point theorem; coincidence degree theory