

PSE 在可压缩边界层转捩问题中的应用*

张永明¹, 周 恒^{2,3}

- (1. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072;
2. 天津大学 力学系, 天津 300072;
3. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 提出了用抛物化稳定性方程(PSE) 预测层流-湍流转捩的一种新的概念. 它被试用于平板可压缩边界层转捩位置的预测问题中, 并将结果与直接数值模拟(DNS) 所得进行比较. 结果二者符合情况令人满意. 二者符合的原因在于 PSE 方法准确地再现了层流-湍流转捩中导致 breakdown 过程的机理, 即平均流剖面的修正导致其稳定性特性的明显改变.

关键词: 抛物化稳定性方程; 直接数值模拟; 转捩; breakdown

中图分类号: O357.41 **文献标识码:** A

引 言

在某些飞行器的设计中, 层流-湍流转捩的预测是一个关键的问题. 它是个非常复杂的问题. 通常, 它包括对外界扰动的感受性, 边界层内扰动的演化, breakdown 发生的判据等问题. 即使知道了边界层内的初始扰动, 还是很难预测转捩位置. 本文旨在解决在初始扰动已知的条件下转捩位置预测问题. 当然, 可以用直接数值模拟方法解决此问题^[1-2], 但此法耗时太多, 不大适用于实际工程问题. 半经验的 e^N 方法被视为预测转捩的一种有效方法^[3-6], 但它缺乏可靠的理论基础.

王新军等人^[7]用 DNS 研究了不可压缩槽道流的转捩, 发现导致 breakdown 的机理在于平均流剖面稳定性特性的改变. 随后, Tang(唐洪涛) 等人^[8]和李宁^[9]发现在不可压缩边界层中该机理也起作用, 黄章峰等人^[1]和曹伟等人^[2]发现 Mach 数 4.5 的超音速边界层中类似的机理仍起作用, 但要稍微复杂一点. 其复杂性在于 Mach 数 4.5 的边界层有两个不稳定模态, 即第一模态和第二模态. 在 breakdown 过程中, 平均流剖面稳定性特性的改变表现为第一模态波的不稳定区域放大很多, 且其最大放大率也变大很多, 而第二模态波的不稳定区域则缩小并最终消失.

* 收稿日期: 2008-05-21; 修订日期: 2008-05-26

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(10632050); 国家自然科学基金重大研究计划资助项目(90716007); 南开大学天津大学刘徽应用数学中心资助项目

作者简介: 张永明(1979—), 男, 云南人, 博士(Tel: + 86-22-27403374; E-mail: yongmingzh@yahoo.com.cn);

周恒(联系人, Tel: + 86-22-27890533; Fax: + 86-22-27407025; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn).

近年来发展出了 PSE 方法^[10-16], 其计算时间比 DNS 的小很多, 张永明和周恒^[17]检验了 PSE 方法在可压缩边界层中的有效性, 发现 PSE 的结果与 DNS 的相当一致, 这表明 PSE 可以作为一种可靠的工具用来研究可压缩边界层中扰动的非线性演化^[18].

本文用 PSE 方法研究亚音速和超音速边界层的转捩. 基本的想法是, 已知初始扰动, 用 PSE 计算它们的演化. 一旦它们的演化变得剧烈, 表现为计算发散, 或者扰动动能或摩擦因数急剧抬升, 则认为 breakdown 过程开始. 将结果与 DNS 所得进行比较, 看预测的转捩位置是否正确. 分析了平均流剖面的稳定性特性的变化, 以研究 breakdown 发生的机理.

1 控制方程和数值方法

在 PSE 方法中, 将扰动矢量 φ 表示为

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{mn}(x, y) e^{i \left[\int_{x_0}^x \alpha_{mn}(x) dx + n\beta z - m\omega t \right]}, \quad (1)$$

其中 $\hat{\varphi} = (\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})^T$ 表示形状函数矢量, x, y 和 z 表示流向、法向和展向坐标, t 表示时间, α 和 β 表示流向和法向波数, ω 表示频率, m 和 n 表示模数.

控制方程和数值方法可见其它文章, 例如文献^[17]. 这里非线性的抛物化稳定性方程为

$$\mathbf{V}_{yy}^j \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{mn}}{\partial y^2} + \left[\hat{\mathbf{A}}_{mn} \frac{\partial \hat{\varphi}_{mn}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}}_{mo} \frac{\partial \hat{\varphi}_{mn}}{\partial y} + \hat{\mathbf{D}}_{mn} \hat{\varphi}_{mn} \right] = \hat{\mathbf{F}}_{mn}, \quad (2)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $\mathbf{V}_{yy}^j, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{D}}$ 是系数矩阵, $\hat{\mathbf{F}}$ 是非线性项矢量.

2 算例研究

本文研究了两种情况, 边界层分别为亚音速和超音速.

2.1 亚音速边界层的情况

李宁曾用 DNS 研究过平板不可压缩边界层的转捩^[9]. 我们选取与其情况 C 一样的初始扰动和 Reynolds 数 $Re_0 = 425$. 但是, 我们将使用可压缩流的 PSE. 为了与不可压缩流比较, 我们取 Mach 数 $Ma = 0.02$. 基本流是 Blasius 相似性解. 计算域入口的初始扰动为 1 个二维 T-S 波和 2 个三维 T-S 波, 其参数如表 1 所示. 本算例中, m 的值从 -7 到 7, n 的值从 -3 到 3.

表 1 初始扰动参数

初始扰动	阶数 (m, n)	幅值 A	α	ω	β
二维波	(2, 0)	0.005	0.144 7- 0.002 031 i	0.052 82	0.0
三维波	(1, 1)	0.000 05	0.064 10+ 0.003 784 i	0.026 41	0.140 5
三维波	(1, -1)	0.000 05	0.064 10+ 0.003 784 i	0.026 41	- 0.140 5

图 1 和 2 分别给出了平均壁面摩擦因数 C_f 和扰动动能 e_2 沿流向的变化, 同时也给出了李宁直接数值模拟^[9]的结果, 其中摩擦因数和扰动动能的定义为

$$C_f = \tau_w^* \left[\frac{1}{2} \rho_\infty^* u_\infty^{*2} \right], \quad \tau_w^* = \mu^* \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_w, \quad e_2 = \int_{y=0}^{y=L_y} \frac{1}{2} (\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}) dy_\delta, \quad (3)$$

其中, ρ_∞^* 为自由来流密度, u_∞^* 为自由来流速度, μ^* 为粘性系数, y_δ 为用入口处边界层位移厚度作特征长度得到的无量纲长度, L_y 为计算域法向长度, 上标* 表示有量纲的量, $(\overline{\quad})$ 表示平

均量, 上角标' 表示脉动量, 下标 w 表示壁面处的值. C_f 和 e_2 都在 $x \approx 520$ 处急剧抬升, 而 DNS 所得则分别为 $x = 580$ 和 $x = 520$. 若将 C_f 或 e_2 的急剧抬升视为 breakdown 的开始, 那么对于 C_f , 我们的结果与李宁的结果只有很小的差别, 而对于 e_2 , 二者符合得很好.

对 $x = 447, 482, 516, 551, 585, 620, 654, 688, 702$ 这 9 个位置的修正后的平均流剖面作线性稳定性分析. 图 3 给出了 (ω, β) 平面内的中性曲线, 这里仅画出了 $\beta \geq 0$ 的一半. 中性曲线包围的不稳定区域从 $x = 551$ 至 $x = 620$ 急剧放大, 然后则逐渐缩小, 但直至计算发散前仍大于层流剖面的不稳定区.

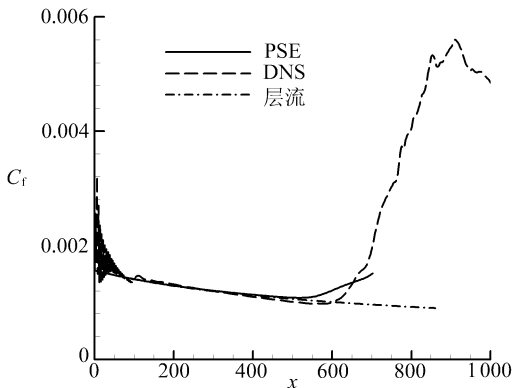


图 1 平均壁面摩擦因数 C_f

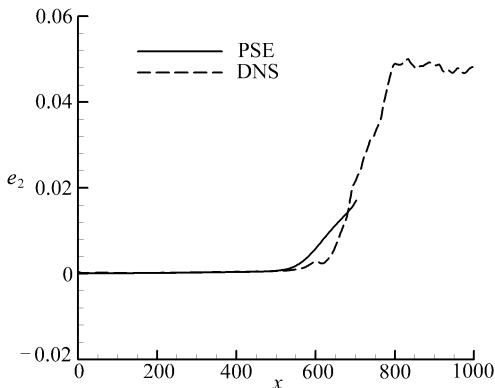


图 2 扰动动能 e_2

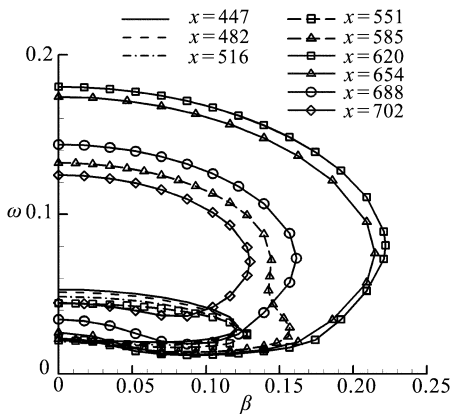


图 3 $x = 447$ 至 702 处的中性曲线

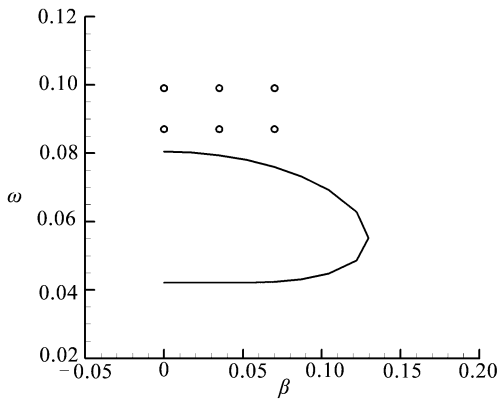


图 4 入口处 $x = 0$ 的中性曲线(实线), 以及某些扰动波的频率和展向波数(ω)

为了观察由不稳定区放大带来的影响, 假设还存在其它的初始扰动, 并用线性 PSE 计算它们的演化, 但基于修正后得平均流剖面, 这意味它们的演化只受平均流修正的影响, 并不与其它扰动相互作用. 图 4 给出了入口处的中性曲线和这些扰动的频率和展向波数, 它们都在不稳定区之外. 图 5 画出了扰动的放大率 α_i . 所有这些扰动在初始层流剖面下都是稳定的. 但在修正的平均流剖面下, 放大率从 $x = 400$ 处迅速增长, 从 $x = 600$ 处开始变成正数, 这表明如果流动中存在符合这些参数的波, breakdown 过程中它们将迅速放大, 这就证实了平均流剖面稳定性的变化是 breakdown 的主要机理.

2.2 超音速边界层的情况

很遗憾, 对于超音速边界层小幅度初始扰动引起的转捩, 没有拿到空间模式 DNS 的结果,

因为那需要太多的计算机资源. 但对于超音速边界层小幅值初始扰动引起的转捩, 黄章峰^[19]得到了时间模式 DNS 的结果. 我们选用与其情况 G 相同的参数. 基本流为 Mach 数 $Ma = 4.5$, Reynolds 数 $Re_0 = 1953$ 的 Blasius 相似性解. 计算域入口的初始扰动为 1 个二维 T-S 波和 2 个三维 T-S 波, 其参数如表 2 所示. 本算例中, m 的值从 -15 到 15 , n 的值从 -7 到 7 .

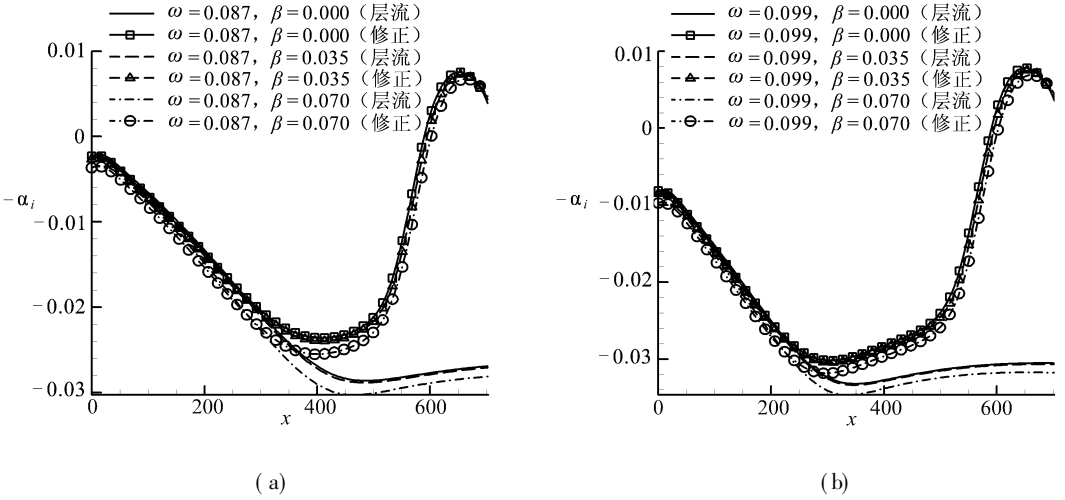


图 5 线性 PSE 得到的某些扰动波在层流和修正的平均流下的放大率

表 2 初始扰动参数

初始扰动	阶数 (m, n)	幅值 A	α	ω	β
二维波	$(5, 0)$	0.002 5	$0.068\ 81 - 0.000\ 185\ 8\ i$	0.057 44	0.0
三维波	$(5, 1)$	0.002 5	$0.069\ 39 - 0.000\ 386\ 5\ i$	0.057 44	0.034 46
三维波	$(3, 2)$	0.002 5	$0.044\ 21 - 0.001\ 331\ i$	0.034 46	0.068 93

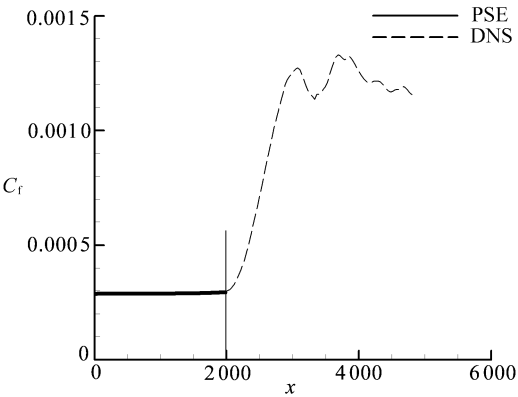


图 6 平均壁面摩擦因数 C_f

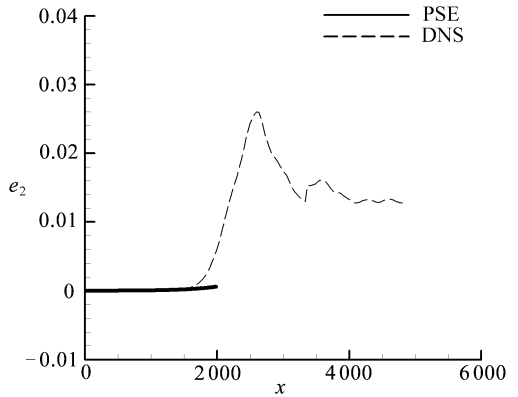


图 7 扰动动能 e_2

图 6 和 7 分别给出了平均壁面摩擦因数 C_f 和扰动动能 e_2 沿流向的变化, 也给出了黄章峰^[19]的 DNS 结果. 因为黄章峰的结果是由时间模式 DNS 得到的, 所以需要用一个时间-空间变换将他的时间 t 变换为我们的坐标 x . 黄章峰的论文中已经用到了这一变换, 即 $x = ct$, 其中 $c = 0.92$, 是扰动的平均传播速度. 从计算域入口到 $x = 1985$, PSE 和 DNS 得到的 C_f 曲线是一致的. 在 $x = 1985$ 处, DNS 得到的曲线开始急剧抬升, 表示转捩中的 breakdown 开始了, 而在同一位置, PSE 计算发散, 也可视作转捩的起始点. PSE 和 DNS 得到的扰动动能曲线也有类

似的特点, 即几乎在 DNS 所得曲线开始急剧抬升的同一位置, PSE 计算发散.

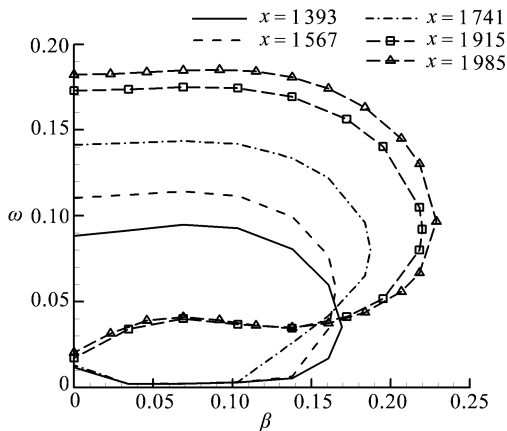


图 8 第一模态波的中性曲线

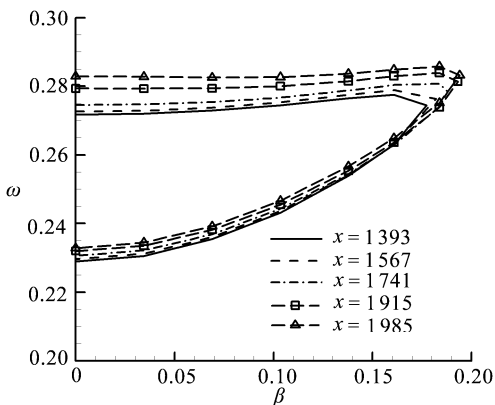


图 9 第二模态波的中性曲线

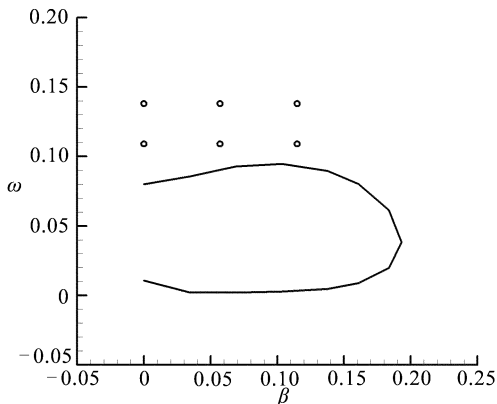


图 10 入口处 $x = 0$ 的第一模态波的中性曲线(实线)以及某些扰动波的频率和展向波数($^\circ$)

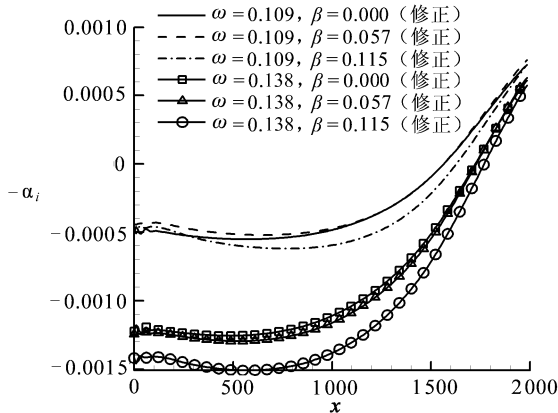


图 11 线性 PSE 得到的某些扰动波在修正后的平均流下的放大率

对 $x = 1393, 1567, 1741, 1915$ 和 1985 这 5 个位置的修正后的平均流剖面作线性稳定性分析. 图 8 和 9 分别画出了 (ω, β) 平面内第一和第二模态的中性曲线. 第一模态中性曲线包围的不稳定区域急剧放大. 另一方面, 第二模态不稳定区则无明显变化. 这就证实了 Mach 数 4.5 的边界层的 breakdown 机理与黄章峰等人^[1]所发现的相同, 即在层流-湍流转捩的 breakdown 过程中第一模态波起主导作用.

为了观察由第一模态不稳定区放大带来的影响, 假设还存在其它的初始扰动, 并用线性 PSE 计算它们在修正的平均流剖面下的演化. 图 10 给出了入口处的第一模态中性曲线和这些扰动的频率和展向波数, 它们都在第一模态不稳定区之外. 图 11 画出了扰动的放大率 $-\alpha_i$. 放大率从 $x \approx 1100$ 处迅速增长, 从 $x \approx 1600$ 处开始变成正数, 这表明如果流动中存在符合这些参数的波, breakdown 过程中它们将迅速放大, 那么也就证实了平均流剖面的第一模态稳定性的变化是 breakdown 的主要机理.

3 结 论

1) 若用 PSE 计算边界层内初始扰动的演化, 在壁面摩擦因数或扰动动能急剧抬升, 或者

计算发散处, 可视为层流-湍流转捩中 breakdown 过程的起始点.

2) 通过与 DNS 所得结果的比较可见, 上述方法正确的原因在于, PSE 和 DNS 得出的平均流剖面导致的其稳定性的变化是一致的, 即在 breakdown 过程的起始点, 中性曲线包围的不稳定区急剧放大.

更准确地讲, 对于 Mach 数 4.5 的超音速边界层(应该也适用于 Mach 数大于等于 2 的情况, 此时存在 2 个不稳定模态), 第一模态波的不稳定区放大而第二模态波的不稳定区缩小.

[参 考 文 献]

- [1] 黄章峰, 曹伟, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理——时间模式[J]. 中国科学, G 辑, 2005, 35(5): 537-547.
- [2] 曹伟, 黄章峰, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理研究[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(4): 379-386.
- [3] Cebeci T, Stewartson K. On stability and transition in three-dimensional flows[J]. AIAA J, 1980, 18(4): 398-405.
- [4] Cebeci T, Shao J P, Chen H H, et al. The preferred approach for calculating transition by stability theory[A]. In: Proceeding of International Conference on Boundary and Interior Layers [C]. Toulouse, France: Institute for Numerical Computation and Analysis, 2004.
- [5] Crouch J D, Kosorygin V S, Ng L L. Modeling the effects of steps on boundary-layer transition[A]. In: Govindarajan Rama, Ed. Proceedings of the Sixth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition [C]. Bangalore, India: IUTAM, 2004.
- [6] 苏彩虹, 周恒. 零攻角小钝头钝锥高超音速绕流边界层的稳定性分析和转捩预报[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(5): 505-513.
- [7] 王新军, 罗纪生, 周恒. 平面槽道流中层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理[J]. 中国科学, G 辑, 2005, 35(1): 71-78.
- [8] TANG Hong-tao, LUO Ji-sheng, ZHOU Heng. Mechanics of breakdown in laminar-turbulent transition of incompressible boundary layer on a flat plate[J]. Transactions of Tianjin University, 2007, 13(2): 79-87.
- [9] 李宁. 基于空间模式的平板边界层层流到湍流转捩的研究[D]. 博士论文. 天津: 天津大学, 2007.
- [10] Bertolotti F P, Herbert Th, Spalart P R. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 242(1): 441-474.
- [11] Esfahanian V, Hejranfar K, Sabetghadam F. Linear and nonlinear PSE for stability analysis of the Blasius boundary layer using compact scheme[J]. Journal of Fluids Engineering, 2001, 123(3): 545-550.
- [12] Herbert Th. Parabolized stability equations[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1997, 29(1): 245-283.
- [13] Bertolotti F P, Herbert Th. Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1991, 3(2): 117-124.
- [14] Bertolotti F P. Compressible boundary layer stability analyzed with the PSE equations[R]. AIAA Paper, 1991, 1637.
- [15] Hu S H, Zhong X. Nonparallel stability analysis of compressible boundary layer using 3-D PSE[R]. AIAA Paper, 1999, 0813.
- [16] Chang C L, Malik M R, Erlebacher G, et al. Compressible stability of growing boundary layers using parabolized stability equations[R]. AIAA Paper, 1991, 1636.

- [17] 张永明, 周恒. 抛物化稳定性方程在可压缩边界层中应用的检验[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(8): 883-893.
- [18] 张永明, 周恒. PSE 在超音速边界层二次失稳问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(1): 1-7.
- [19] 黄章峰. 超音速边界层从层流到湍流的转捩机理及湍流特性[D]. 博士论文. 天津: 天津大学, 2006.

PSE as Applied to Problems of Transition in Compressible Boundary Layers

ZHANG Yong-ming¹, ZHOU Heng^{2,3}

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China ;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China ;

3. LIU Hui Center of Applied Mathematics of Nankai University and Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: A new idea of using the parabolized stability equation (PSE) method to predict the laminar-turbulent transition is proposed. It was tested in the prediction of the location of transition for compressible boundary layers on flat plates, and the results were compared with those obtained by direct numerical simulations (DNS). The agreement is satisfactory. The reason for the agreement was found to be that the PSE method does faithfully reproduce the mechanism leading to the breakdown process in laminar-turbulent transition, i. e. the modification of mean flow profile leads to a remarkable change of its stability characteristics.

Key words: parabolized stability equations; direct numerical simulations; transition; breakdown