

从第二类梯度算子和第二类积分定理到 Gauss(球面)映射不变量

殷雅俊^{1,2}, 吴继业¹, 黄克智¹, 范钦珊²

(1. 清华大学 航天航空学院 工程力学系, 北京 100084;

2. 南京工业大学 力学部, 南京 211816)

(郭兴明推荐)

摘要: 将第二类梯度算子、第二类积分定理、Gauss 曲率相关的积分定理和 Gauss(球面)映射相结合, 证明了一系列 Gauss(球面)映射不变量。从这些不变量中, 得到一系列从原始曲面到(Gauss 单位)球面的变换。这些不变量和变换, 在几何学、物理学、生物力学和力学中, 都有潜在的用途。

关键词: 第二类梯度算子; 第二类积分定理; Gauss 曲率; Gauss(球面)映射; 不变量
中图分类号: O186.1 **文献标识码:** A

引 言

在生物膜上, 不同相的有机长链分子, 通过扩散和动力学自组装, 常发生相分离现象。即同相的长链分子聚集在一起, 形成畴区; 不同相的畴区相互连接, 生成各种各样的斑图花样^[1]。研究生物膜上的相分离和畴区的力学行为, 会遇到两大困难: 一是畴区几何形状的复杂性, 二是生物膜几何形状的复杂性。怎样克服这两大困难? 经典力学也许能为我们提供借鉴。在流体力学和弹性力学中, 我们通过引入数学变换, 把一个复杂的求解区域变换成一个简单的求解区域, 把一个困难的求解问题变换成一个容易的求解问题。与此类似, 我们也可以通过适当的数学变换, 把一个复杂的生物膜曲面映射成一个简单曲面, 在这个简单曲面上, 我们能够容易地研究相分离和畴区的力学行为。

在各种曲面中, 球面是最简单的。在本文中, 我们把从一个凸曲面到半径为 R^* 的一般球面的映射, 称为球面映射。如果 $R^* = 1$, 则一般球面就退化成 Gauss 单位球面, 而一般的球面映射就退化为几何中经典的 Gauss 映射。

当然, 一旦我们把生物膜曲面(以后通称为原始曲面)映射成球面, 则定义在原始表面上的物理量和几何量都将发生变化。毫无疑问, 搞清楚这些量在映射过程中如何变化, 是很重要的。然而, 还有一个同等重要(也许更重要)的问题是, 哪些量在映射过程中是不变的? 或者说, 哪些量是映射不变量? 在我们开始研究生物膜上的相分离和畴区的力学行为之前, 澄清这

收稿日期: 2007-11-20; 修订日期: 2008-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572076)

作者简介: 殷雅俊(1964), 男, 河南人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86-10-62795536; E-mail: yinyj@mail.tsinghua.edu.cn)。

一问题是绝对必要的

我们从哪儿着手寻找球面映射中的不变量呢？近期我们在生物膜数学上取得的进展为此提供了洞见。在研究生物膜的过程中，我们发现了第二类梯度算子^[2-4]。基于第二类梯度算子，我们证明了曲面上张量场、矢量场和标量场的第二类积分定理^[5-8]。需要注意的是，第二类梯度算子和第二类积分定理有一个共同的特征：它们都与 Gauss 曲率有关。作为几何中最基本的概念之一，Gauss 曲率与微分几何中一些重要的内容密切相关。既有著名的 Gauss-Bonnet 积分定理，又有 Gauss 映射。由此激发出一个有趣的想法：如果将第二类梯度算子、第二类积分定理、Gauss-Bonnet 积分定理与 Gauss(球面)映射结合起来，我们能得到新颖而又有价值的结果吗？答案是肯定的：我们从中揭示出了一系列映射不变量和变换，而这些不变量和变换在曲面上的静、动力学中，有潜在的用途。

1 第二类梯度算子和第二类积分定理

1.1 算子和定理简介

凸曲面 A 上的点 p 可以用矢径 $r = r(u^1, u^2)$ 描述，其中 $u^i (i = 1, 2)$ 是曲面上的 Gauss 参数坐标(图 1)。在点 p 有几个基本张量满足如下的张量代数方程^[9]：

$$L^2 - 2HL + KG = 0, \tag{1}$$

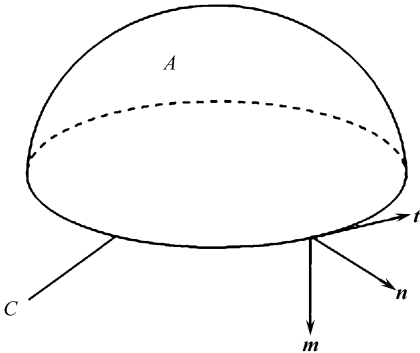


图 1 具有边界 C 的开口曲面 A

其中 G, L 和 $L^2 = L L$ 分别是曲面的第一、第二和第三基本张量。 $H = (c_1 + c_2)/2$ 和 $K = c_1 c_2$ 分别是曲面的平均曲率和 Gauss 曲率， c_1 和 c_2 是两个主曲率。式(1)与初等代数中的一元二次方程类似，它也有两个根，一个是 L ，另一个是 \hat{L} ，这两个根也满足所谓的韦达(Vite)定理

$$\hat{L} + L = 2HG, \quad \hat{L} L = KG, \tag{2a, b}$$

这里， \hat{L} 称为第二基本张量 L 的共轭张量

基本张量 G 和 \hat{L} 可以用来定义微分算子。基于第一基本张量 G ，可以定义经典微分几何中的第一类梯度算子^[9]，同样地，基于共轭张量 \hat{L} ，可以定义第二类梯度算子^[2-8]：

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = g_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = g_i \hat{L}^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2), \tag{3a, b}$$

其中， g^{ij} 和 \hat{L}^{ij} 分别是 G 和 \hat{L} 的逆变分量。在微分几何中，基于第一类梯度算子，可以导出第一类积分定理^[7-8]；对称地，基于第二类梯度算子⁻，可以证明张量场 T 的第二类积分定理^[7-8]：

$$\int_A dA \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) T = \int_C ds \hat{L} T - \int_A 2K dA T, \tag{4}$$

$$\int_A dA \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) T = \int_C dr L T, \tag{5}$$

这里 \int 是一个统一的运算符号。在式(4)中，如果去掉 $\int_C ds \hat{L} T$ 或者将其分别用内积 $\int_C ds \hat{L} T$ 和外积 $\int_C ds \hat{L} T$ 替代，我们可以得到张量场的第二类梯度定理、第二类散度定理和第二类旋度定理。式(5)称为张量场的第二类广义环量定理，如果用内积 $\int_C dr L T$ 替代 $\int_C dr L T$ ，我们得到张量场狭义的第二类环量定理。

在上述积分定理中, A 是曲面上光滑封闭曲线 C 包络的区域(图 1), $dA = n dA$ 、 $ds = m ds$ 和 $dr = t ds$ 是 3 个矢量微元, dA 是曲面上的面积微元, ds 是曲线上的弧长微元, n 是曲面的外法向单位矢量, m 是曲线 C 上位于曲面切平面内、正交于曲线 C 且指向 A 区域外方向的单位矢量, t 是沿曲线 C 的正方向的单位切线矢量. 3 个单位矢量 m 、 t 和 n 构成右手系统, 满足关系式 $m = t \times n$ 、 $t = n \times m$ 和 $n = m \times t$.

1.2 与 Gauss 曲率相关的积分定理

由式(2b)知, 张量 \hat{L} 可以通过 $\hat{L} = K L^{-1}$ 计算; 由式(3b)知, 第二类梯度算子 $\hat{\nabla}$ 可以通过张量 \hat{L} 定义. 因此可以说: \hat{L} 和 $\hat{\nabla}$ 都或多或少地受到 Gauss 曲率的控制. 进一步, 式(4)和式(5)中的第二类积分定理都间接地受到 Gauss 曲率的影响. 除此之外, 基于第二类积分定理, 还可得到与 Gauss 曲率直接相关的积分定理. 式(4)中, 用 $\hat{\nabla}$ 替代 ∇ 并令 $T = G$, 注意到

$$\hat{\nabla} \cdot G = 2Kn, \text{ 得}^{[6-8]}$$

$$\int_A 2K dA = \int_C ds \hat{L} \quad (6a)$$

由附录 A 中的式(A5)知, 在 m 、 t 和 s 构成的单位正交标架下有 $m \hat{L} = k_n m + k_g t$. 于是式(6a)变为^[6-8]

$$\int_A 2K dA = \int_C (k_n m + k_g t) ds, \quad (6b)$$

其中 $k_n = (dt/ds) \cdot n$ 和 $k_g = (dn/ds) \cdot m$ 分别是曲线 C 的法曲率和测地扭率.

式(6)是 Gauss 曲率的矢量型积分定理. 在经典微分几何中, Gauss 曲率还有一个标量型的积分定理, 即著名的 Gauss-Bonnet 积分定理.

$$\int_A K dA = 2\pi - \int_C k_g ds, \quad (7)$$

这里 $k_g = (dt/ds) \cdot m$ 是曲线 C 的测地曲率. 我们将在第 2 节中证实, 式(4)~(7)中的每一项都涉及 Gauss(球面)映射不变量.

2 Gauss(球面)映射不变量

在 Gauss(球面)映射下, 原始曲面上的区域 A 被映射成半径为 R^* 的球面上的区域 A^* ; 原始曲面 A 上的点 p 、矢径 $r = r(u^1, u^2)$ 和封闭曲线 C 分别被映射成球面 A^* 上的点 p^* 、矢径 $r^* = r^*(u^1, u^2)$ 和封闭曲线 C^* ; 点 p 的单位法向矢量 n 被映射成的点 p^* 的单位法向矢量 n^* , 且满足 Gauss(球面)映射的先决条件 $n^* = n$ (图 2). 我们对 Gauss(球面)映射下的不变量分析如下.

2.1 式(7)中的局部和整体映射不变量

在原始曲面与 Gauss 单位球面间有如下重要变换:

$$dA^* = K dA, \quad (8)$$

在 Gauss 单位球面上, Gauss 曲率 $K^* = 1$; 在半径为 R^* 的一般球面上, Gauss 曲率 $K^* = 1/R^{*2}$, 式(8)可以从 Gauss 单位球面推广至一般球面, 于是原始曲面与一般球面间有变换关系

$$K^* dA^* = K dA \quad (9)$$

式(9)表明: 原始曲面上的标量 $K dA$ 是局部映射不变量. 在式(9)两端积分, 我们得到区域 A 上的整体映射不变量

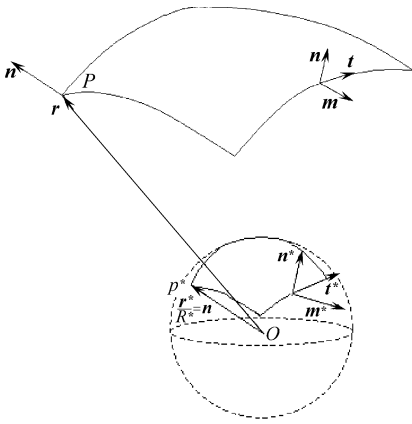


图 2 Gauss(球面)映射

$$A^* K^* dA^* = A K dA \quad (10)$$

比较式(7)与式(10),我们立即有封闭曲线 C 上的整体映射不变量

$$C^* k_g^* ds^* = C k_g ds \quad (11)$$

在 Gauss-Bonnet 积分定理的诸项中,稍做比较就会发现: $K dA$ 是整体映射不变量,而 $K dA$ 是局部映射不变量

现在,我们已经证明 $C k_g ds$ 是整体映射不变量,于是有这样的问: $k_g ds$ 是局部映射不变量吗? 在第 2 节的 2.3 中,我们会回答这个问题

2.2 式(6)中的局部和整体映射不变量

式(7)中的 Gauss-Bonnet 积分定理是一个标量型的定理,与此对应,式(9)~(11)中的诸不变量也都是标量型的。类似地,与式(6)中的矢量型积分定理对应,我们得到下面矢量型的局部和整体映射不变量:

$$K^* dA^* = K dA, \quad A^* K^* dA^* = A K dA, \quad (12a, b)$$

$$\begin{cases} C^* ds^* \hat{L}^* = C ds \hat{L}, \\ C^* (k_n^* m^* + {}^* g t^*) ds^* = C (k_n m + {}_g t) ds \end{cases} \quad (13a, b)$$

式(6)的诸项中,我们也做一个比较: $A K dA$ 是整体映射不变量,而 $K dA$ 是局部映射不变量

现在, $C (k_n m + {}_g t) ds$ 被证明是整体映射不变量,于是也有这样的问题: $(k_n m + {}_g t) ds$ 是局部映射不变量吗? 我们也把这个问题,留在第 2 节的 2.3 中回答

2.3 曲线 C 上的局部映射不变量

在 Gauss(球面)映射中,我们有 $dn^* = dn$ 在曲面上,我们还有关系式 $dn = dr \cdot n$, $n = -L$, (见文献[8]); $dn^* = dr^* \cdot n^*$, $n^* = -L^*$, 其中, \cdot 是球面上的第一类梯度算子。结合附录 A 我们得

$$dr^* \cdot L^* = dr \cdot L, \quad ds^* \hat{L}^* = ds \hat{L} \quad (14a, b)$$

式(14)表明,矢量微元 $dr^* \cdot L$ 和 $ds \hat{L}$ 都是曲线 C 上的局部映射不变量。利用关系式 $t \cdot L = k_n t - {}_g m$ 和 $m \cdot \hat{L} = k_n m + {}_g t$ (见附录 A 中的式(A1)和(A5)),式(14)可以进一步写成

$$\begin{cases} (k_n^* t^* - {}^* g m^*) ds^* = (k_n t - {}_g m) ds, \\ (k_n^* m^* + {}^* g t^*) ds^* = (k_n m + {}_g t) ds \end{cases} \quad (15a, b)$$

现在我们可以回答第 2 节的 2.2 中的问题了:式(15b)表明,矢量微元 $(k_n m + {}_g t) ds$ 的确是一个局部映射不变量。另外,式(15a)表明, $(k_n t - {}_g m) ds$ 也是一个局部映射不变量,不仅如此,它沿封闭曲线 C 的积分 $C (k_n t - {}_g m) ds = C dr \cdot L = - C dn = \mathbf{0}$ 还是一个守恒于零矢量的整体映射不变量

从式(15)可得

$$\sqrt{(k_n^*)^2 + (g^*)^2} ds^* = \sqrt{k_n^2 + g^2} ds, \tag{16}$$

显然, 标量微元 $\sqrt{k_n^2 + g^2} ds$ 是曲线上的局部映射不变量 式(15)、(16)给出

$$\frac{k_n^* m^* + g^* t^*}{\sqrt{(k_n^*)^2 + (g^*)^2}} = \frac{k_n m + g t}{\sqrt{k_n^2 + g^2}}, \quad \frac{k_n^* t^* - g^* m^*}{\sqrt{(k_n^*)^2 + (g^*)^2}} = \frac{k_n t - g m}{\sqrt{k_n^2 + g^2}}, \tag{17a, b}$$

式(17)中等式右端的单位矢量在球面映射下是不变的 注意到球面上曲线 C^* 的法曲率和测地扭率满足 $k_n^* = -1/R^*$ 和 $g^* = 0$ 于是从式(17)导出有用的变换

$$m^* = -\frac{k_n m + g t}{\sqrt{k_n^2 + g^2}}, \quad t^* = -\frac{k_n t - g m}{\sqrt{k_n^2 + g^2}}, \tag{18a, b}$$

在曲线 C 上, 等式右端的两个单位矢量被平行地映射成曲线 C^* 上的单位矢量 m^* 和 t^*

从式(18)还可导致如下重要的局部映射不变量(见附录 B):

$$\frac{1}{\sqrt{(k_n^*)^2 + (g^*)^2}} \left[k_g^* + \frac{d}{ds^*} \left(\arctan \frac{k_n^*}{g^*} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{k_n^2 + g^2}} \left[k_g + \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{k_n}{g} \right) \right] \tag{19}$$

式(19)可改写成

$$k_g^* ds^* + d \left(\arctan \frac{k_n^*}{g^*} \right) = k_g ds + d \left(\arctan \frac{k_n}{g} \right) \tag{20}$$

至此我们可以回答第 2 节的 2.1 中的问题了: 在球面映射下, $k_g ds + d \left(\arctan(k_n/g) \right)$ 是一个局部映射不变量, 而一般有 $d \left(\arctan(k_n/g) \right) \neq 0$, 故 $k_g^* ds^* \neq k_g ds$, 即 $k_g ds$ 不是局部映射不变量

2.4 基于梯度算子的局部映射不变量

如第 2 节的 2.3 所述, 我们有关系式 $dr^* = L^* n^*$ 结合式(14a)并利用 $n^* = L^{-1} n$, 我们得到 $dr = L (L^*)^{-1} n = dr n$ 这个式子对任意的 dr 都成立, 于是其系数应满足 $L (L^*)^{-1} = I$ 考虑到 $G^* = G$, 我们最终有

$$(L^*)^{-1} = L^{-1} \tag{21}$$

由式 $\hat{L}^{-1} = \hat{L}^{-1}$ 知, 式(21)可以写成

$$\frac{1}{K^*} = \frac{1}{K}, \tag{22}$$

式(22)表明, $(1/K)$ 是局部映射不变量 更确切地讲, 是具有球面映射不变性的微分算子 联立式(9)、(22)可得

$$dA^* = dA, \quad dA^* = dA, \tag{23a, b}$$

即 dA 和 dA^* 都是球面映射不变量

3 简单应用例子

以上的映射不变量在几何、物理和力学中都有广泛用途 每一个映射不变量都在原始曲面和球面的几何量之间建立了一个变换 当我们尝试解决某些科技问题时, 这些变换是有用的 这里, 我们主要讨论几何上的用途

3.1 由主曲率线构成的网络的映射不变性

式(18)可退化到特殊情形: 如果曲线 C 是原始曲面 A 上的主曲率线, 则有 $g = 0$ 此时, m 和 t 将对应于曲面的两个主方向, 而正交标架 (m, t, n) 或 (e_1, e_2, n) 就是曲面上的主曲率线标架 这里 e_1 和 e_2 是沿主曲率线的单位切线矢量 于是, 式(18)可进一步写成

$$m^* = m, t^* = t \tag{24a, b}$$

这个结果表明, 原始曲面 A 上的主曲率标架 (m, t, n) 或 (e_1, e_2, n) 被平行地映射成球面 A^* 上的主曲率标架 (m^*, t^*, n^*) (或 (e_1^*, e_2^*, n^*)) (见图3), 亦即

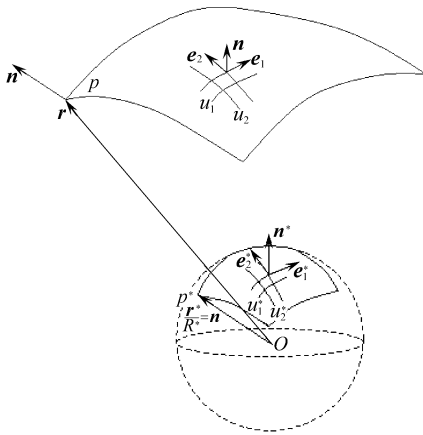


图3 主曲率线网络在球面映射下的不变性

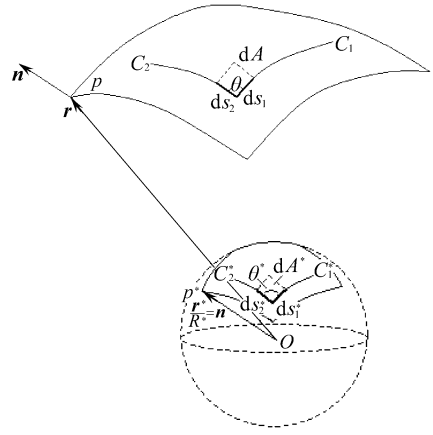


图4 两条曲线夹角的变换

$$(m^*, t^*, n^*) = (m, t, n) \text{ 或 } (e_1, e_2, n) = (e_1^*, e_2^*, n^*) \tag{25}$$

换言之, 原始曲面上的主曲率线网络在球面映射下是不变的 这是个令人吃惊的结果 注意到, 任何凸曲面都有其自己的主曲率线网络, 而式(25)则有这样的含义: 不论凸曲面的结构多么复杂, 其主曲率线网络总具有球面映射不变性 这个结果, 具有基本的重要性

3.2 与曲线夹角相关的局部映射不变量和变换

设原始曲面上的两条曲线相交于一点, 夹角为 θ 自交点沿曲线 C_1 和 C_2 分别取微小弧段 ds_1 和 ds_2 (见图4) 则以 ds_1 和 ds_2 为邻边的曲边四边形的面积 dA 可以表达成 $dA = ds_1 ds_2 \sin \theta$ 从式(9), 我们得到

$$K^* ds_1^* ds_2^* \sin^* \theta^* = K ds_1 ds_2 \sin \theta \tag{26}$$

联立式(26)和(16), 我们可以证明如下的局部映射不变量:

$$\frac{K^* \sin^* \theta^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (k_{n(i)}^*)^2 + (g(i))^2}} = \frac{K \sin \theta}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (k_{n(i)})^2 + (g(i))^2}} \tag{27}$$

注意到, $K, \sin \theta$ 和两条曲线的曲率一起形成了式(27)中的局部映射不变量 在球面上有 $g(i) = 0 (i = 1, 2)$ 和 $K^* = k_{n(1)}^* k_{n(2)}^* = 1/R^{*2}$ 于是式(27)给出夹角 θ^* 和 θ 之间的变换关系

$$\sin^* \theta^* = \frac{K \sin \theta}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (k_{n(i)})^2 + (g(i))^2}} \tag{28}$$

式(28)显示, 知道了原始表面上的角 θ , 我们就能计算球面上的角 θ^*

4 结 论

将第二类梯度算子、第二类积分定理与 Gauss(球面)映射相结合,我们揭示了一系列的球面映射不变量¹ 这些映射不变量在几何上是重要的,它们能够深化我们对弯曲空间内蕴和外蕴性质的理解¹ 当然,本文仅仅涉及了这些映射不变量在数学中的应用¹ 我们在后续的文章中,会揭示它们在力学、生物力学和物理学中的用途¹

附录 A 表达在正交单位标架下的第二基本张量

依据关系式 $dn = dr\# \quad n = - \quad d\#L$, 我们有 $dn/ds = - \quad \#L$, 结合曲线 C 上的公式 $dn/ds = - \quad k_n t + S_g m$, 可以导出

$$\#L = k_n t - S_g m \quad (A1)$$

由式(A1)可以得到

$$k_n = \#L\#t, S_g = - \quad \#L\#m, \quad (A2a, b)$$

L 和 \dot{L} 有如下联系(见附录 C):

$$L = - \quad n @ \dot{L} @ n \quad (A3)$$

利用式(A3), 我们可以将式(A2) 整理成

$$k_n = (\# \dot{L})\#m, S_g = (\# \dot{L})\#t \quad (A4a, b)$$

从式(A4)得

$$\# \dot{L} = k_n m + S_g t \quad (A5)$$

附录 B 关于测地曲率的球面映射不变量

球面上曲线 C^* 的测地曲率为 $k_g^* = (dt^*/ds^*)\#m^*$, 结合式(16)可得

$$\frac{1}{\sqrt{(k_n^*)^2 + (S_g^*)^2}} k_g^* = \frac{1}{\sqrt{k_n^2 + S_g^2}} \frac{dt^*}{ds} \# m^* \quad (B1)$$

由式(18)及微分几何中的公式 $dt/ds = k_n n + k_g m$ 和 $dm/ds = - \quad k_g t - S_g n$, 我们有

$$\frac{dt^*}{ds} \# m^* = \frac{1}{k_n^2 + S_g^2} \left[\frac{dk_n}{ds} t + k_n \frac{dt}{ds} - \frac{dS_g}{ds} m - S_g \frac{dm}{ds} \right] \# (k_n m + S_g t) =$$

$$k_g + \frac{d}{ds} \left[\arctan \frac{k_n}{S_g} \right] \quad (B2)$$

从式(B1)和(B2)可以导出关于 k_g, k_n 和 S_g 的变换:

$$\frac{1}{\sqrt{(k_n^*)^2 + (S_g^*)^2}} k_g^* = \frac{1}{\sqrt{k_n^2 + S_g^2}} \left[k_g + \frac{d}{ds} \left[\arctan \frac{k_n}{S_g} \right] \right], \quad (B3)$$

式(B3)可以进一步扩展成式(19)¹

附录 C 第二基本张量之间的关系式

根据经典微分几何,在正交的主曲率线标架下, L 可以表达为

$$L = c_1 e_1 e_1 + c_2 e_2 e_2 \quad (C1)$$

联立式(2a)和关系式 $2H = c_1 + c_2$, 我们有

$$\dot{L} = c_2 e_1 e_1 + c_1 e_2 e_2, \quad (C2)$$

诸单位矢量之间还有关系式

$$n @ e_1 = e_2, e_1 @ n = - e_2, n @ e_2 = - e_1, e_2 @ n = e_1$$

于是式(C1)和(C2)给出

$$L = - \quad n @ \dot{L} @ n, \quad \dot{L} = - \quad n @ L @ n, \quad (C3a, b)$$

式(C3a)即为式(A3)1

[参 考 文 献]

- [1] Baumgart T, Hess S T, Webb W. Imaging coexisting fluid domains in biomembrane models coupling curvature and line tension[J]. *Nature*, 2003, **425**(6960): 821-824.
- [2] YIN Ya-jun, CHEN Ya-qiu, NI Dong, et al. Shape equations and curvature bifurcations induced by inhomogeneous rigidities in cell membranes[J]. *J Biomechanics*, 2005, **38**(7): 1433-1440.
- [3] Yin Y, Yin J, Ni D. General mathematical frame for open or closed biomembranes: equilibrium theory and geometrically constraint equation[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2005, **51**(4): 403-413.
- [4] Yin Y, Yin J, Lv C. Equilibrium theory in 2D Riemann manifold for heterogeneous biomembranes with arbitrary variational modes[J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2008, **58**(1): 122-132.
- [5] YIN Ya-jun. Integral theorems based on a new gradient operator derived from biomembranes (Part): Fundamentals[J]. *Tsinghua Science and Technology*, 2005, **10**(3): 372-375.
- [6] YIN Ya-jun. Integral theorems based on a new gradient operator derived from biomembranes (Part): Applications[J]. *Tsinghua Science and Technology*, 2005, **10**(3): 376-380.
- [7] Yin Y, YIN Jie, WU Ji-ye. The second gradient operator and integral theorems for tensor fields on curved surfaces[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2007, **1**(30): 1465-1484.
- [8] Yin Y, Wu J. Symmetrical fundamental tensors, differential operators, and integral theorems in differential geometry[J]. *Tsinghua Science and Technology*, 2008, **13**(2): 121-126.
- [9] 黄克智,薛明德,陆明万.张量分析(第二版)[M].北京:清华大学出版社,2003.

From the Second Gradient Operator and Second Category of Integral Theorems to Gauss or Spherical Mapping Invariants

YIN Ya-jun^{1,2}, WU Ji-ye¹, HUANG Ke-zhi¹, FAN Qin-shan²
(1. Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace, FML, Tsinghua
University, Beijing 100084, P. R. China;
2. Division of Mechanics, Nanjing University of Technology,
Nanjing 211816, P. R. China)

Abstract: Through the combination of the second gradient operator, the second category of integral theorems, the Gauss-curvature-based integral theorems and the Gauss (or spherical) mapping, a series of invariants or geometric conservation quantities under Gauss (or spherical) mapping were revealed. From these mapping invariants important transformations between original curved surface and the spherical surface were derived. The potential applications of these invariants and transformations to geometry are prospected.

Key words: second gradient operator; integral theorem; Gauss curvature; Gauss (or spherical) mapping; mapping invariants