应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2004)01-0009-05

三维管道内有旋流动的涡势函数拟变分原理*

沈远胜[1], 刘高联[1,2], 刘永杰[1]

(1.济南大学 材料科学与工程学院,济南 250022;
2.上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

(我刊编委刘高联来稿)

摘要: 通过对一种能解决跨声速有旋流场的数学模型——赝势函数-涡势函数数学模型中的涡势函数进行详细的变分分析,并进一步对涡势函数原方程的数学改造,推导出新型数学模型中涡势函数的几种不同的变分原理,并提出对涡势函数边界条件的处理方法.

关 键 词: 赝势函数; 涡势函数; 旋度; 拟变分原理; 边界条件

中图分类号: O354　　**文献标识码:** A

引　　言

在三维流体流动的研究方面,人们根据其流动特点提出了各种数学模型. 如针对无旋流动人们提出了势函数模型[1];为求解三维流场,将整个三维空间分为 S_1 流面与 S_2 流面分别求解流体流动的气动参数[2];为解决三维流动问题,文献[3]提出了流函数法;而针对叶轮机械三元流动这样的具体问题,文献[4]详细的提出了流函数方程组法;运用缩项法,结合三元气体流动特点,文献[5]提出了广义势函数法. 此外,提出了矩函数与周角函数[6]等等. 但是在建立数学模型时由于存在这样或那样的限制条件,各种模型都有其局限性,都尚不完善. 比如势函数模型,它要求流场是无旋的,因此它的应力范围就受到了严格限制. 文献[7,8]提出的数学模型—赝势函数-涡势函数数学模型,它是建立在流体最基本的流动特点基础上,即 $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \boldsymbol{\lambda}$, 因此本模型反映的流动规律既包括无旋流动,也包括有旋流动,即适用于二维流动,也适用于三维流动,它摆脱了势函数模型对流场无旋的严格要求,又具有势函数特点(势函数对某方向的偏导数就是该方向的速度),避免了将三维流场分为两个流面分别求解然后对流场分析的繁琐过程. 运用本模型进行数值计算可以得到各节点涡势函数值,进而得到各节点赝势函数值,根据本模型与流速和旋度等物理量的关系就能够得到各节点的流速、旋度等物理量,就能对流场进行分析. 下面就该模型中的涡势函数进行变分分析,得到该函数几种不同的变分原理,并提出涡势函数边界条件的处理意见.

---

* 收稿日期: 2002-03-28; 修订日期: 2003-09-10
基金项目: 博士基金资助项目(B0005)
作者简介: 沈远胜(1964—),男,山东淄博人,副教授,博士(联系人. Tel: 86-531-2767172; E-mail: shengysh@sina.com);
刘高联(1932—),江西奉新人,教授,博导,中科院院士.

1 气动方程式

该数学模型采用坐标系为静止的柱坐标．在此基础上可写出系统的旋转角速度 $\omega=0$ 的均熵气流气动基本方程形式如下：

连续性方程 $$\frac{\partial[\rho(\Phi_\varphi/r+\Pi_1)]}{r\partial\varphi}+\frac{\partial[\rho r(\Phi_r+\Pi_2)]}{r\partial r}+\frac{\partial[\rho\Phi_z]}{\partial z}=0. \tag{1}$$

动量方程 $$\frac{\Lambda_1}{r}\left[\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial r}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi}\right]-\Lambda_3\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}=\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial r}. \tag{2}$$

$$\Lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}+\Lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}=\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}. \tag{3}$$

能量方程 $$\Lambda_1\frac{\partial\mathscr{R}}{r\partial\varphi}+\Lambda_2\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial r}+\Lambda_3\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}=0. \tag{4}$$

其中 Φ 为赝势函数，$\boldsymbol{\Pi}$ 为涡势函数，其具体的数学表达形式为：

$$\boldsymbol{\Pi}=\Pi_1\boldsymbol{i}_\theta+\Pi_2\boldsymbol{i}_r.$$

速度的表达形式为：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\Lambda_1\boldsymbol{i}_\theta+\Lambda_2\boldsymbol{i}_r+\Lambda_3\boldsymbol{i}_z,$$

$\mathscr{R}$ 为滞止焓．

2 涡势函数方程的拟变分原理

为对涡势函数进行变分分析，首先对方程(2)、(3)做如下变动．令

$$W_1=\frac{\Lambda_1}{r}\left[\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial r}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi}\right]-\Lambda_3\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial r}, \tag{5}$$

$$W_2=\Lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}+\Lambda_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}. \tag{6}$$

将(5)式对 z 求偏导，将(6) 式对 r 求偏导，则(5)式与(6)式变为：

$$\frac{\partial W_1}{\partial z}=0,\ \frac{\partial W_2}{\partial r}=0. \tag{7、8}$$

现分两种情况进行分析：

2.1 拟变分原理 Ⅰ

对(7)、(8)式应用 Galerkin 方法，以 $\delta\Pi_1$ 与 $\delta\Pi_2$ 为权函数分别乘(7)、(8)，相加，得：

$$\iiint_V\left(\frac{\partial W_1}{\partial z}\delta\Pi_2+\frac{\partial W_2}{\partial r}\delta\Pi_1\right)\mathrm{d}V=$$
$$-\iiint_V\left[W_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+W_2\frac{\partial\delta\Pi_1}{\partial r}\right]\mathrm{d}V+\oiint_A(W_1\delta\Pi_2n_z+W_2\delta\Pi_1n_r)\mathrm{d}A. \tag{9}$$

由此可知，若形式地记

$$\delta J=\iiint_V\left[W_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+W_2\frac{\partial\delta\Pi_1}{\partial r}\right]\mathrm{d}V.$$

则上式可记为：

$$\delta J=-\iiint_V\left(\frac{\partial W_1}{\partial z}\delta\Pi_2+\frac{\partial W_2}{\partial r}\delta\Pi_1\right)\mathrm{d}V+\oiint_A(W_1\delta\Pi_2n_z+W_2\delta\Pi_1n_r)\mathrm{d}A.$$

故由 $\delta J=0$ 即得(记边界 $A=A_1+A_2+A_3$，A_1 与 A_2 分别表示入出口面，A_3 表侧壁面)：

拟欧拉方程 $$\frac{\partial W_1}{\partial z}=0,\ \frac{\partial W_2}{\partial r}=0. \tag{10,11}$$

自然边办条件：A_1 与 A_3 上，$W_1=0$，$W_2=0$．

本质边界条件：A_1 上，Π_1 与 Π_2 为已知．

可见,我们只要对弱形式方程 $\delta J=\iiint_V\left[W_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+W_2\frac{\partial\delta\Pi_1}{\partial r}\right]\mathrm{d}V$ 用有限元 $\Pi_i(r,\varphi,z)=\sum_{j=1}^{27}N_j(r,\varphi,z)\Pi_{i,j}(i=1,2)$ 进行离散即可得所需之方程组,因而可以进行求解了.

2.2 拟变分原理Ⅱ

拟变分原理Ⅰ的缺点是未知量太多,为克服此缺点,可改用下法.将(2)、(3)两式改写成如下形式:

$$\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial r}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi}-\frac{r\Lambda_3}{\Lambda_1}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}=\frac{r}{\Lambda_1}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial r},\tag{12}$$

$$\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial z}+\frac{r\Lambda_2}{\Lambda_1}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}=\frac{r}{\Lambda_1}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial z}.\tag{13}$$

令

$$T_1=\frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi}+\frac{r\Lambda_3}{\Lambda_1}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}+\frac{r}{\Lambda_1}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial r},\tag{14}$$

$$T_2=\frac{r\Lambda_2}{\Lambda_1}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}-\frac{r}{\Lambda_1}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial z}.\tag{15}$$

则(12)、(13)两式可以写成:

$$\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial r}-T_1=0,\ \frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial z}+T_2=0.\tag{16、17}$$

将(16)式对 z 求偏求,将(17)式对 r 求偏导,得:

$$\frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial z\partial r}-\frac{\partial T_1}{\partial z}=0,\ \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r\partial z}+\frac{\partial T_2}{\partial r}=0.\tag{18、19}$$

(19)-(18),得:

$$\frac{\partial T_1}{\partial z}+\frac{\partial T_2}{\partial r}=0.\tag{20}$$

对(20)式应用 Galerkin 方法,以 $\delta\Pi_2$ 为权函数可得:

$$\iiint_V\left(\frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r\partial z}+\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)\delta\Pi_2\mathrm{d}V=$$
$$-\iiint_V\left[T_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+T_2\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial r}\right]\mathrm{d}V+\oiint_A(T_1n_z+T_2n_r)\delta\Pi_2\mathrm{d}A.\tag{21}$$

若形式地记:

$$\delta J=\iiint_V\left(T_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+T_2\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial r}\right)\mathrm{d}V.\tag{22}$$

则由 $\delta J=0$ 可从(22)式得出:

拟欧拉方程: $$\frac{\partial T_1}{\partial z}+\frac{\partial T_2}{\partial r}=0.\tag{20}$$

自然边界条件: $$T_1n_z+T_2n_r=0.\tag{23}$$

显然,这不符合本问题的边界条件要求,为此在(22)式中补充一边界项如下:

$$\delta\tilde{J}=\iiint_V\left(T_1\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial z}+T_2\frac{\partial\delta\Pi_2}{\partial r}\right)\delta\Pi_2\mathrm{d}V+$$
$$-\oiint_A\left[\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial z}n_r-\frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial r}n_z\right]\delta\Pi_2\cdot\mathrm{d}A.\tag{24}$$

再在(24)式右边补充一边界项:

$$\delta I=\oiint_A W_2\delta\Pi_1\cdot\mathrm{d}A.\tag{25}$$

则(24)式可写为

$$\delta\hat{J} = \iiint_V \left(T_1 \frac{\partial \delta \Pi_2}{\partial z} + T_2 \frac{\partial \delta \Pi_2}{\partial r} \right) \delta \Pi_2 \mathrm{d}V + \oiint_A \left[\frac{\partial (r\Pi_1)}{\partial z} n_r - \frac{\partial (r\Pi_1)}{\partial r} n_z \right] \delta \Pi_2 \cdot \mathrm{d}A + \oiint_A W_2 \delta \Pi_1 \cdot \mathrm{d}A. \tag{26}$$

于是我们就从 $\delta\hat{J} = 0$ 得到在 A_2 与 A_3 上所要求的自然边界条件,在 A_1 面上则有本质边界条件.

显然,此法相对于拟变分原理Ⅰ而言具有下列优越性:在本法中,Π_1 只在边界项中出现,因而 Π_1 只需定义在边界上. 而在拟变分原理Ⅰ中,Π_1 在全域内出现. 因而本法中的总未知量要比甲法中显著减少,且域越大,Π_1 减少的程度就越大.

3 涡势函数的边界条件

自从赝势函数-涡势函数数学模型提出以后,如何处理涡势函数的边界条件一直是一个棘手的问题. 如果解决了该模型的边界条件,就会为该模型的应用创造良好的应用基础. 下面从旋度、速度、涡势函数三者之间的关系入手,提出涡势函数的边界条件.

由旋度 $\boldsymbol{\zeta}$ 与涡势函数 $\boldsymbol{\Pi}$ 关系式:$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \boldsymbol{\Pi}$[8] 及旋度 $\boldsymbol{\zeta}$ 与速度 $\boldsymbol{\Lambda}$ 关系式:$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}$,可得出如下公式:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} - \frac{\partial \Lambda_3}{\partial r}, \quad -\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \Lambda_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Lambda_1)}{\partial z} \right], \tag{27、28}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\Pi_1)}{\partial r} - \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\Lambda_1)}{\partial r} - \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \varphi} \right]. \tag{29}$$

我们设其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 在入口面上为已知的分布,因而选择入口面上 $\Pi_1 = 0$,且在 $\varphi = 0$ 线上 $\Pi_2 = 0$,则入口面上的 Π_2 分布可按下式计算:

$$\Pi_2 = \int \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Lambda_1)}{\partial r} \right] \mathrm{d}\varphi. \tag{30}$$

对于壁面上的 Π_1 与 Π_2 分布可按下式计算:

$$\Pi_1 = -\int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \Lambda_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Lambda_1)}{\partial z} \right] \mathrm{d}z, \tag{31}$$

$$\Pi_2 = \int \left(\frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} - \frac{\partial \Lambda_3}{\partial r} \right) \mathrm{d}z. \tag{32}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 由本次赝势函数方程的近似解 Φ 求出,因此(31)、(32)式便是涡势函数方程侧壁上的本质边界条件,它应该迭代修正. 这时,泛函其形式上仍同拟变分原理Ⅱ中的相同,即

$$\delta\hat{J} = \iiint_V \left(T_1 \frac{\partial \delta \Pi_2}{\partial z} + T_2 \frac{\partial \delta \Pi_2}{\partial r} \right) \delta \Pi_2 \mathrm{d}V + \oiint_A \left[\frac{\partial (r\Pi_1)}{\partial z} n_r - \frac{\partial (r\Pi_1)}{\partial r} n_z \right] \delta \Pi_2 \cdot \mathrm{d}A + \oiint_A W_2 \delta \Pi_1 \cdot \mathrm{d}A. \tag{26}$$

由 $\delta\hat{J} = 0$ 可导得

拟欧拉方程:

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0. \tag{20}$$

自然边界条件:A_3 面上,$W_1 = 0, W_2 = 0$.

本质边界条件:A_1 面上,$\Pi_1 = 0, \Pi_2 = \int \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Lambda_1)}{\partial r} \right] \mathrm{d}\varphi$.

A_2 面上 Π_1 与 Π_2 按(31)、(32)式算出,再迭代修正.

4 结束语

本文通过对涡势函数原方程的数学改造,通过变分分析,得出了涡势函数几种不同形式的

变分原理,对几种变分结果进行了计算优劣分析,最后提出了涡势函数边界条件的处理办法.

由于本模型是根据流体流动的特点,通过缩项法导出的,因此它既可以计算有旋流动的问题,又可以计算超音速流动的问题,即适合于三维正问题的计算,也适合于杂交性问题的计算,同时还适合于无粘与有粘流体流动的计算和分析,因此它具有十分广泛的应用前景. 它不仅具有重要的理论价值,更重要的是它具有实际的应用价值.

[参 考 文 献]

[1] 潘文全.流体力学基础[M].北京:机械工业出版社,1983.

[2] WU Chung-hua. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbo machines of axial radial and mixed-flow types[R]. ASME Report No.50-A-79, 1950; *Trans ASME*, 1952; NACATN 2604, 1952.

[3] Giese J H. Stream functions for three dimension flows[J]. *J Math Phys*, 1951, **30**(1):31—35.

[4] 吴文权.叶轮机械三元流动流函数方程组[J].机械工程学报,1979,**15**(1):86—99.

[5] 刘高联.偏微分方程中引入通用函数的缩项法与气体三元流动的广义势函数[J].上海机械学院学报,1981,(3):15—24.

[6] 刘高联,王甲升.叶轮机械气体动力学基础[M].北京:机械工业出版社,1980.

[7] 沈远胜,俞大邦,刘高联.全三维可压缩理想流体有旋流动赝势函数模型及其在任意曲线坐标下的表达式[A].见:周连第,邵维文,惠长年 编.第十一届全国水动力学研讨会暨第四届全国水动力学学术会议文集[C].北京:海洋出版社,1997,29—34.

[8] 沈远胜.旋转系统内三维可压缩有旋流动正,反命题的赝势函数模型和变分方法[M].上海:上海大学出版社,1999.

Quasi-Variational Principle for the Vortex-Potential Function of Rotational Flow in Three-Dimension Pipe

SHEN Yuan-sheng[1], LIU Gao-lian[2], LIU Yong-jie[1]

(1. *School of Material Science and Engineering, Jinan University, Jinan* 250022, *P. R. China*;

2. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract: The variational analysis of the Pseudo-potential function-vortex-potential function model, a new mathematical model, was developed and by which the flow field with transonic speed and curl was decided, and different sorts of the variational principle for vortex potential function were established by transforming the original equation for vortex-function, the boundary conditions for vortex-potential function was raised.

Key words: pseudo-potential function; vortex-potential function; curl; quasi-variational principle; boundary condition