

圆薄膜受中心集中力的大变形^{*}

靳从睿

(阿尔伯塔大学 机械工程系, 加拿大)

(程昌钧推荐)

摘要: 给出了 F_{pp} -Hencky 圆薄膜在固定夹紧边的条件下, 受中心集中力的变形的解析解. 并讨论了非线性圆薄膜的稳定条件.

关键词: 圆薄膜; 集中力; 大变形; 精确解

中图分类号: O344.03 文献标识码: A

引言

探讨对称圆薄膜在固定夹紧边条件下受集中力的大变形问题很有意义. 陈和郑(2003)^[1]用 Hencky 变换给出了一组解. 本文将指出并非所有的解都是稳定解, 有的解会导致圆薄膜有非对称的不稳定变形.

1 方程

F_{pp} -Hencky 圆薄膜受集中力的方程:

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] = - \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad (1)$$

$$N_r \frac{dw}{dr} = - \frac{P_0}{2\pi r}. \quad (2)$$

固定夹紧边: $w = 0$,

$$u = \frac{a}{Eh} \left[a \frac{dN_r}{dr} + (1-\nu)N_r \right] = 0, \quad (3)$$

在 $r = a$, 其中 r 是径向位置, a 是圆薄膜半径, h 是厚度, w 是圆薄膜变形, N_r 是径向圆薄膜应力, E 是弹性模量, ν 是 Poisson 比, P_0 是中心集中力.

引入如下变量:

$$y = \frac{r^2}{a^2}, \quad \phi = \frac{r}{h} \frac{dw}{dr}, \quad S = \frac{8r^2 N_r}{Eh^3}, \quad F = \frac{4a^2 P_0}{\pi Eh^4}. \quad (4)$$

我们得到方程 (1) 和 (2) 的无量纲形式:

$$\frac{d^2 S}{dy^2} = - \frac{\phi^2}{y^2}, \quad (5)$$

$$S\phi + Fy = 0, \quad (6)$$

* 收稿日期: 2007-12-01; 修订日期: 2008-06-13

作者简介: 靳从睿(1980-), 女, 河北人(Tel: + 780-492-2377; E-mail: congui@ualberta.ca).

消去 ϕ ,

$$\frac{d^2 S}{dy^2} + \frac{F^2}{S^2} = 0. \tag{7}$$

固定夹紧边变成了

$$2 \frac{dS}{dy} - (1 + \nu)S = 0, \quad \text{在 } y = 1, \tag{8}$$

在圆薄膜中心, 由于集中力的作用, 应力在中心点奇异.

$$\lim_{y \rightarrow 0} S = O(y^\alpha), \quad \alpha < 1. \tag{9}$$

方程(7)是非线性二阶常微分方程, 它的积分会出现 2 个待定常数. 待定常数将由边界条件和稳定条件决定. 从物理意义上来说, 如果 N_r 或者 N_θ 出现负值圆薄膜将会褶皱, Flipp-Hencky 圆薄膜方程就不再适用了^[2-4].

2 解析解

从方程(7), 积分得到

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dS}{dy} \right)^2 = \frac{F^2}{S} - C_1, \tag{10}$$

其中 C_1 是待定常数.

方程(10)给出

$$\frac{dS}{dy} = \pm \left[\frac{2(F^2 - C_1 S)}{S} \right]^{1/2}, \tag{11}$$

该方程分 3 种情况讨论: C_1 大于 0、等于 0 和小于 0.

1) $C_1 = 0$

对方程(11)积分

$$S = \left[\frac{9}{2} F^2 \right]^{1/3} (\pm y + C_2)^{2/3}, \tag{12}$$

其中 C_2 是另 1 个待定常数.

把方程(12)代入方程(6)

$$\phi = - \left[\frac{2}{9} F \right]^{1/3} (\pm y + C_2)^{-2/3} y, \tag{13}$$

我们得到圆薄膜变形

$$\frac{w}{h} = \left[\frac{3}{4} F \right]^{1/3} [(\pm 1 + C_2)^{1/3} - (\pm y + C_2)^{1/3}]. \tag{14}$$

物理意义要求 w 是正的, 所以我们应该对方程(14)取正号, 这说明方程(11) ~ (13)也都取正号.

中心变形

$$\frac{w_0}{h} = \left[\frac{3}{4} F \right]^{1/3} [(1 + C_2)^{1/3} - C_2^{1/3}]. \tag{15}$$

径向应力从(12)可得

$$N_r = \frac{9^{1/3}}{4} \left[\frac{P_0^2 E h}{a^2 \pi^2} \right]^{1/3} \frac{(y + C_2)^{2/3}}{y} \tag{16}$$

总是非负的. 在圆薄膜中心 $y = 0$, N_r 奇异, 说明符合条件.

既然

$$N_0 = N_r + r \frac{dN_r}{dr}, \quad (17)$$

把方程(16)代入(17)可得

$$N_0 = \frac{9^{1/3}}{4} \left[\frac{P_0^2 E h}{a^2 \pi^2} \right]^{1/3} (y + C_2)^{-1/3} \left[\frac{1}{3} - \frac{C_2}{y} \right]. \quad (18)$$

说明非负的 N_0 要求 $C_2 = 0$.

把方程(12)代入方程(8)并利用 $C_2 = 0$ 我们得到

$$\frac{1 - 3\nu}{3(1 + \nu)} = 0, \quad (19)$$

说明 $\nu = 1/3$. 把 $C_2 = 0$ 代入方程(15) 给出

$$\frac{w_0}{h} = \left[\frac{3}{4} F \right]^{1/3}. \quad (20)$$

2) $C_1 > 0$

引入新变量 θ 使得

$$S = \frac{F^2}{C_1} \sin^2 \theta, \quad (21)$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi/2$. 把方程(21)代入方程(11) 给出

$$\frac{d\theta}{dy} = 2^{-1/2} C_1^{3/2} F^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad (22)$$

积分后我们得到

$$y + C_2 = (2C_1)^{-3/2} F^2 (2\theta - \sin 2\theta), \quad (23)$$

其中 C_2 是另 1 个待定常数.

把方程(21)代入方程(6), 有

$$\phi = - \frac{C_1 y}{F \sin^2 \theta}. \quad (24)$$

利用方程(4) 我们得到变形

$$\frac{w}{h} = - \int_1^y \frac{C_1}{2F \sin^2 \theta} dy. \quad (25)$$

把方程(22)代入方程(25), 给出

$$\frac{w}{h} = \int_{\theta(y)}^{\theta(y=1)} (2C_1)^{-1/2} F d\theta = (2C_1)^{-1/2} F [\theta(y=1) - \theta(y)]. \quad (26)$$

中心变形是

$$\frac{w_0}{h} = (2C_1)^{-1/2} F [\theta(y=1) - \theta(y=0)]. \quad (27)$$

径向应力由方程(4) 和(21) 给出

$$N_r = \frac{E h^3 F^2 \sin^2 \theta}{8 C_1 a^2 y} \quad (28)$$

总是非负的, 并且符合圆薄膜中心的奇异条件.

把方程(28)代入方程(17) 给出

$$N_0 = \frac{E h^3 F^2}{8 C_1 a^2} \left[\frac{(2C_1)^{3/2} \cos \theta}{F^2 \sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{y} \right]. \quad (29)$$

为了使得 N_0 非负, 我们有

$$\frac{(2C_1)^{3/2}}{F^2} \geq \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta y}. \quad (30)$$

如果 $y = 0$, 方程(30)变成

$$F^2 \sin^3 \theta \leq 0. \tag{31}$$

因为 F 是正的, 而且 $0 \leq \theta \leq \pi/2$, 所以在 $y = 0, \theta = 0$. 把这个结果代入方程(23), 我们得到 $C_2 = 0$. 所以, $C_2 = 0$ 才能给出无褶皱的解.

对固定夹紧边, 设 $\theta(y = 1) = \theta_m$, 并且把方程(21)代入(8)给出

$$\frac{(2C_1)^{3/2}}{F^2} = (1 + \nu) \frac{\sin^3 \theta_m}{\cos \theta_m}, \tag{32}$$

进一步给出

$$(2C_1)^{-1/2} F = F^{1/3} (1 + \nu)^{-1/3} \frac{\cos^{1/3} \theta_m}{\sin \theta_m}. \tag{33}$$

方程(27)给出

$$\frac{w_0}{h} = (2C_1)^{-1/2} F \theta_m. \tag{34}$$

设置

$$\left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = gF. \tag{35}$$

把方程(33)代入方程(34)消去 C_1 , 我们得到

$$g = \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m} (\theta_m - \theta_n)^3. \tag{36}$$

把方程(32)代入方程(23)给出

$$(1 + \nu)(y + C_2) = \frac{\cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m} (2\theta - \sin 2\theta). \tag{37}$$

在 $y = 1$,

$$(1 + \nu)(1 + C_2) = \frac{\cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m} (2\theta_m - \sin 2\theta_m), \tag{38}$$

给出

$$\nu = \frac{\cos \theta_m (2\theta_m - \sin 2\theta_m)}{\sin^3 \theta_m (1 + C_2)} - 1. \tag{39}$$

3) $C_1 < 0$

设置 $C_1 = -C_1$, 其中 C_1 是正数, 方程(11)变成了

$$\frac{dS}{dy} = \left[\frac{2(F^2 + C_1 S)}{S} \right]^{1/2}. \tag{40}$$

引入新变量 θ 使得

$$S = \frac{F^2}{C_1} \cot^2 \theta, \tag{41}$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

把方程(41)代入方程(40),

$$\frac{d\theta}{dy} = -2^{-1/2} C_1^{3/2} F^{-2} \sin^3 \theta \cos^{-2} \theta, \tag{42}$$

通过积分可得

$$y + C_2 = 2^{-1/2} C_1^{-3/2} F^2 \left[\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \ln \left(\cot \frac{\theta}{2} \right) \right], \tag{43}$$

其中 C_2 是另 1 个待定常数.

把方程(41)代入方程(6), 得

$$\phi = - \frac{C_1 y}{F \cot^2 \theta}. \quad (44)$$

利用方程(4) 我们得到变形

$$\frac{w}{h} = - \int_1^y \frac{C_1}{2F \cot^2 \theta} dy. \quad (45)$$

把方程(42)代入方程(45) 给出

$$\frac{w}{h} = \int_{\theta(y=1)}^{\theta(y)} (2C_1)^{-1/2} \frac{F}{\sin \theta} d\theta = (2C_1)^{-1/2} F \ln \left| \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right|_{\theta(y=1)}^{\theta(y)}. \quad (46)$$

中心变形是

$$\frac{w_0}{h} = (2C_1)^{-1/2} F \ln \left| \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right|_{\theta(y=1)}^{\theta(y=0)}. \quad (47)$$

径向应力可从方程(4) 和(41) 得出

$$N_r = \frac{Eh^3 F^2 \cot^2 \theta}{8C_1 a^2 y} \quad (48)$$

总是非负的, 并且满足中心点奇异的条件.

把方程(48)代入方程(17) 给出

$$N_\theta = \frac{Eh^3 F^2}{8C_1 a^2} \left[\frac{(2C_1)^{3/2}}{F^2} \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{y \sin^2 \theta} \right]. \quad (49)$$

为了使得 N_θ 非负, 我们有

$$\frac{(2C_1)^{3/2}}{F^2} \geq \frac{\cos^3 \theta}{\sin^2 \theta y}. \quad (50)$$

如果 $y = 0$, 方程(50) 变成

$$F^2 \cos^3 \theta \leq 0, \quad (51)$$

因为 F 是正的, 而且 $0 < \theta < \pi/2$, 所以在 $y = 0, \theta = \pi/2$. 把这个结果代入方程(43) 给出

$$C_2 = 0. \quad (52)$$

对于固定夹紧边, 把方程(41)代入方程(8) 给出

$$\frac{(2C_1)^{3/2}}{F^2} = (1 + \nu) \frac{\cos^3 \theta_m}{\sin^2 \theta_m}. \quad (53)$$

方程(47) 给出

$$\frac{w_0}{h} = - (2C_1)^{-1/2} F \ln \left| \frac{1}{\sin \theta_m} - \frac{\cos \theta_m}{\sin \theta_m} \right|. \quad (54)$$

把方程(53)代入方程(54) 给出

$$g = - \frac{1}{(1 + \nu) \cos^3 \theta_m} \ln^3 \left| \frac{1}{\sin \theta_m} - \frac{\cos \theta_m}{\sin \theta_m} \right|. \quad (55)$$

把方程(53)代入方程(43) 消去 C_1 得到

$$\nu = \frac{2[\cos \theta_m - \sin^2 \theta_m \ln(\cot(\theta_m/2))]}{\cos^3 \theta_m} - 1. \quad (56)$$

在这3个单元之间有某些联系. 因为 $\sin \theta = \theta + \theta^3/(3!) + o(\theta^3)$, 对于小的 θ 我们取 $2\theta - \sin 2\theta = (2\theta)^3/(3!)$. 可由方程(23) 得到

$$\theta^3 = \frac{3}{4}(y + C_2)(2C_1)^{3/2} F^{-2}. \quad (57)$$

忽略 $o(\theta^3)$, 方程(21) 变成

$$S = \frac{F^2}{C_1} \theta^2. \tag{58}$$

从方程(57) 得到 θ^2 , 并且把它代入方程(58) 得到

$$S = \left[\frac{9}{2} F^2 \right]^{1/3} (y + C_2)^{2/3}, \tag{59}$$

和方程(12) 完全一样. 说明单元在 θ 很小的时候, $C_1 > 0$ 单元变成了 $C_1 = 0$. 同样我们可以证明在 $\theta \rightarrow \pi/2$ 的时候, $C_1 < 0$ 单元变成了 $C_1 = 0$.

3 结 论

上述分析给出了 F_{ppH} -Hencky 圆薄膜在固定夹紧边的条件下, 受中心集中力的变形的解析解. 讨论了非线性圆薄膜的稳定条件. 结果显示中心力大小和中心变形的 3 次方成正比, 比例系数是 Poisson 比的函数,

$$\left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = g(\nu) F. \tag{60}$$

在 $\nu = 1/3$, $g(\nu) = 3/4$ 从 $C_1 = 0$ 单元得出. 在 $0 < \nu < 1/3$, $g(\nu)$ 从 $C_1 > 0$ 单元得出:

$$\nu = \frac{\cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m} (2\theta_m - \sin 2\theta_m) - 1, \tag{61}$$

$$g = \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\theta_m^3 \cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m}. \tag{62}$$

函数 $g(\nu)$ 可以通过方程(61) $\nu(\theta_m)$ 和方程(62) $g(\nu, \theta_m)$ 得到.

在 $1/3 < \nu < 1/2$ 时, $g(\nu)$ 从 $C_1 < 0$ 单元得到

$$\nu = \frac{2[\cos \theta_m - \sin^2 \theta_m \ln(\cot(\theta_m/2))]}{\cos^3 \theta_m} - 1, \tag{63}$$

$$g = - \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\sin^2 \theta_m}{\cos^3 \theta_m} \ln^3 \left| \frac{1}{\sin \theta_m} - \frac{\cos \theta_m}{\sin \theta_m} \right|. \tag{64}$$

同样, 通过方程(63) $\nu(\theta_m)$ 和方程(64) $g(\nu, \theta_m)$, 得到 $g(\nu)$ 的曲线(图 1).

Komaragiri 等人^[5] 对于圆薄膜受中心力的问题用数值实验的方法得到如下的近似解:

$$\left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = \frac{\pi}{4} f^3(\nu) F, \tag{65}$$

其中 $f(\nu) \approx 1.049 - 0.146 2\nu - 0.158 27\nu^2$. 在文献[1]中, 稳定条件没有得到讨论, 所给出的解析解是

$$\left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = \left[1 - \left(\frac{1 - 3\nu}{4} \right)^{1/3} \right]^3 \frac{F}{1 + \nu} \tag{66}$$

图 1 给出了 3 组解作为比较, 可以看出数值试验的解和本文给出的无褶皱解吻合得很好, 但是方程(66)的解只有在 $\nu = 1/3$ 才是对的.

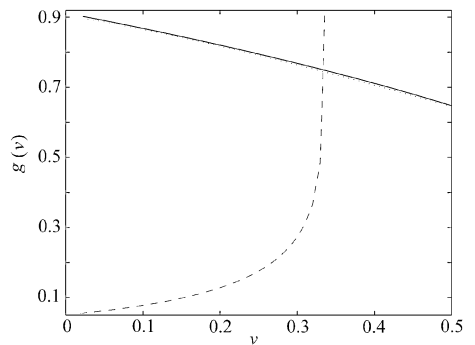


图 1 固定夹紧边条件下的 $g(\nu)$ 在 $0 < \nu < 0.5$ (实线: 方程(61)、(62)、(63) 和(64) 所给出的精确解; 点线: 方程(65) 给出的数值实验所得到的解; 虚线: 方程(66) 给出的解)

[参 考 文 献]

- [1] 陈山林, 郑周练. 圆薄膜在集中力作用下的大变形[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(1): 25-28.
- [2] Weitschke H J. Stable and unstable axisymmetric solutions for membranes of revolution[J]. Appl Mech Rev, 1989, **42**(11): 289-294.
- [3] Steigmann D J. Proof of a conjecture in elastic membrane theory[J]. ASME J Appl Mech, 1986, **53**(4): 955-956.
- [4] Beck A, Grammler H. Wrinkle-free solutions of circular membrane problems[J]. Z Angew Math Phys, 1992, **43**(3): 481-504.
- [5] Komaragiri U, Begley M R, Simmonds J G. The mechanical response of freestanding circular elastic films under point and pressure loads[J]. ASME J Appl Mech, 2005, **72**(2): 203-212.

Large Deflection of Circular Membrane Under Concentrated Force

JIN Cong-rui

(Department of Mechanical Engineering, University of Alberta, AB, T6G 2G8, Canada)

Abstract: The analytical solution of F^{I} -ppI-Hencky membrane with rigidly clamped boundary condition under concentrated force was provided. The stability of nonlinear circular membrane has been investigated.

Key words: circular membrane; concentrated force; large deformation; exact solution