

# 有限变形弹性杆中三种非线性弥散波<sup>\*</sup>

张善元, 刘志芳

(太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(程昌钧推荐)

**摘要:** 在一维弹性细杆拉压、扭转和弯曲波的经典线性理论基础上, 分别计入有限变形和弥散效应, 借助 Hamilton 变分原理, 由统一的方法导出了 3 种非线性弥散波的演化方程. 对 3 种演化方程进行了定性分析. 结果表明, 这些方程在相平面上存在同宿轨道或异宿轨道, 分别相应于孤波解或冲击波解. 根据齐次平衡原理, 用 Jacobi 椭圆函数展开对这些演化方程进行了求解, 在一定的条件下它们均可能存在孤立波解或冲击波解, 这与方程的定性分析完全一致.

**关键词:** 弹性细杆; 有限变形; 弥散效应; 冲击波; 孤立波

**中图分类号:** O347.4      **文献标识码:** A

## 引 言

固体力学在经典线性波研究方面曾取得辉煌的成就, 为物理中波动理论的发展做出了巨大的贡献<sup>[1-2]</sup>. 然而, 在固体中的非线性波, 特别是孤立波的研究及应用方面, 相对于流体力学、光纤通讯等领域起步较晚. 近 20 年来, 固体中孤立波的研究取得了一定进展, 多数研究集中在非线性弹性杆的纵波的传播<sup>[3-10]</sup>. 在文献[3-5]中用默纳汉(Murnaghan)非线性弹性本构方程, 并引入某些渐近表达到侧面边界条件中, 导出了含多个未知量的控制方程组. 为了研究一维细杆中的非线性弥散波的基本传播特征, 在长波和弱非线性的条件下, 常利用经典线性杆理论中两个关于变形的基本假定, 即 Navier-Bernolli 平截面假定和 Love 的径向应变正比于轴向应变的假定, 得到单个的非线性波动方程, 并用不同的方法讨论了一维杆中非线性纵波形成冲击波和孤立波的条件<sup>[6-10]</sup>.

在已有关于细杆波导非线性波的研究中, 有关非线性扭转波和非线性弯曲波的研究未见报导. 本文试图在经典线性杆理论的基础上, 引入非线性和弥散效应, 用统一的方法导出弹性细杆中非线性纵波、扭转波和弯曲波的支配方程. 这些方程中非线性均源于有限变形引起的几何非线性, 而弥散效应对应于 3 种波分别来源于横向 Poisson 效应、非圆截面杆扭转的翘曲变形和梁的转动惯性. 对 3 种非线性方程的定性分析表明, 它们的相平面上都可能存在同宿轨道和异宿轨道. 用 Jacobi 椭圆函数展开得到了这 3 种非线性波动方程的冲击波解和孤波解及其相应的必要条件. 这 3 种非线性方程虽然描述的是 3 种不同的变形状态, 但它们的数学

\* 收稿日期: 2007-07-24; 修订日期: 2008-05-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772129); 山西省青年科技基金资助项目(2006021005)

作者简介: 张善元(1942—), 男, 山西省翼城人, 教授, 博士生导师(联系人: Tel: + 86-351-6010918;

E-mail: syzhang@tyut.edu.cn).

结构及其行波解的特征都表现出极大的相似性.

## 1 支配方程的变分导出

一维杆的运动方程可以由 Hamilton 变分原理导出, 按照这个原理, 系统的真实运动对应于作用泛函的极值, 即泛函的一阶变分等于 0,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} L dx dt = 0, \quad (1)$$

此处,  $L = T - W$ ,  $L$  为 Lagrange 密度函数,  $T$  和  $W$  为系统的动能密度和应变能密度. 在含有 1 个未知位移  $u$  及其高阶导数的情况下,  $L$  的一般形式为

$$L = L(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots), \quad (2)$$

此处  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , 其余类同. 将式(2)代入式(1)完成变分运算, 可得到具有如下形式的描述系统运动的 Euler 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} + \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{xxx}} - \dots = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.1 杆中纵向波动方程

考虑半径为  $R$ , 材料密度为  $\rho$  的圆截面细杆, 采用 Lagrange 描述并使用圆柱坐标系  $(x, r, \theta)$ , 其中  $x$  为轴向坐标,  $r$  和  $\theta$  分别为径向和环向坐标. 细杆在纵向运动过程中处于轴对称压缩状态, 于是位移、应变和应力等与  $\theta$  无关. 由于杆是细的, 仍采用 Navier-Bernolli 和 Love 假定, 于是轴向位移  $u$  与  $r$  无关, 径向位移为  $v = -\mu u_x$ , 此处  $\mu$  为 Poisson 比. 在一维情况下, 有限变形的应变-位移关系为

$$\varepsilon = u_x + \frac{1}{2}(u_x)^2, \quad (4)$$

考虑到  $v$  是  $u$  的高阶量, 取横向剪切应变为

$$\gamma = v_x = -\mu u_{xx}. \quad (5)$$

应力-应变关系服从 Hooke 定律, 从而单位杆长的应变能密度  $W$  是关于应变的二次函数

$$W = \frac{1}{2}AE \left[ u_x + \frac{1}{2}(u_x)^2 \right]^2 + \frac{1}{4}G\mu^2 AR^2 (u_{xx})^2, \quad (6)$$

此处的  $E$  和  $G$  为弹性模量和剪切模量,  $A = \pi R^2$  为杆的横截面积, 上式(6)中等号右端第 1 项是压缩应变能, 第 2 项代表剪切应变能.

弹性细杆中有纵向扰动传播时, 单位长度的动能包括纵向运动动能和横向运动动能之和, 即

$$T = \frac{1}{2}\rho A (u_t)^2 + \frac{1}{4}\rho A \mu^2 R^2 (u_{xt})^2. \quad (7)$$

式(7)减式(6), 给出 Lagrange 密度函数

$$L = \frac{1}{2}\rho A (u_t)^2 + \frac{1}{4}\rho A \mu^2 R^2 (u_{xt})^2 - \frac{1}{2}AE \left[ u_x + \frac{1}{2}(u_x)^2 \right]^2 - \frac{1}{4}G\mu^2 AR^2 (u_{xx})^2. \quad (8)$$

利用式(3)便得到弹性细杆的纵波方程

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \frac{1}{2} [3c_0^2 (u_x)^2 + c_0^2 (u_x)^3 + \mu^2 R^2 u_{tx} - c_s^2 \mu^2 R^2 u_{xxx}]_x, \quad (9)$$

此处  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  分别为经典杆理论中的纵波波速和剪切波速. 方程(9)是个双非线性双弥散的波动方程, 它右端方括号中的前两项为非线性项, 是由有限变形产生的, 第3项是横向惯性引起的弥散项(Rayleigh-Love 对杆的修正), 第4项是横向剪切导致的几何弥散.

如果令  $u = u_x$ , 则方程(9)可以写成

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \left[ \frac{3}{2} c_0^2 u^2 + \frac{1}{2} c_0^2 u^3 + \frac{\mu^2 R^2}{2} (u_{tt} - c_s^2 u_{xx}) \right]_{xx}, \quad (10)$$

上式是关于轴向位移梯度的非线性弥散波的支配方程, 可以看出在纵波传播过程中伴随有剪切波的传播, 这是横向 Poisson 效应所致.

## 1.2 非圆截面杆扭转波动方程

考虑一个截面面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ , 剪切模量为  $G$  的非圆截面柱形杆, 采用 Lagrange 描述并采用直角坐标系  $(x, y, z)$ ,  $x$  轴与杆的扭转轴重合,  $Oxyz$  构成右手系.

当扭转波沿杆的轴向传播时, 圆截面杆中的扭转波的基本模态没有几何弥散, 而非圆截面杆由于扭转变形的同时伴随有截面的翘曲变形从而导致波形的几何弥散. 另一方面, 在讨论圆截面杆扭转时, 通常假设任意两个横截面之间的距离保持不变. 在小变形条件下, 这个假定是相当准确的. 当扭转剪应变相当大时, 则在杆的纵向纤维中出现拉应力, 这种拉应力与杆轴成一定角度, 它们在垂直于轴线平面上的投影形成了一个附加扭矩  $M_\sigma$ . 文献[11] 对这一问题从有限变形理论进行了详尽地讨论, 给出了非圆截面杆的总扭矩  $M_\tau$  与相对扭转角  $\phi$  之间的非线性关系

$$M_\tau = M_\Gamma + M_\sigma = GJ_s \phi + \frac{1}{2} EK \phi^3, \quad (11)$$

式中  $E$  和  $G$  为弹性模量和剪切模量,  $J_s$  为扭转惯性矩,  $K$  为截面参数.

$$J_s = J_p + \iint_A \left[ y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dA, \quad (12)$$

$$K = \int_A (r^2 - i_p^2) r^2 dA, \quad (13)$$

在以上两式中  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $i_p = J_p/A$ ,  $J_p = \iint_A (y^2 + z^2) dA$ ,  $\Phi = \Phi(y, z)$  为 Saint Venant 扭转函数或翘曲函数. 在讨论扭转波的传播时,  $\phi$  沿杆轴不是常数, 而是  $x, t$  的函数, 且有  $\phi(x, t) = \partial \theta(x, t) / \partial x$ ,  $\theta(x, t)$  是截面  $x$  处  $t$  时刻的扭转角.

扭杆单位长度的动能由扭转动能和轴向翘曲动能两部分组成, 即

$$T = \frac{1}{2} \rho J_p (\theta_t)^2 + \frac{1}{2} \rho J_\Phi (\theta_{xt})^2, \quad (14)$$

此处  $J_\Phi = \iint_A \Phi^2 dA$ .

单位杆长的扭转变形能  $W_\tau$  为

$$W_\tau = \int_0^\phi M_\tau d\phi = \int_0^\phi \left[ GJ_s \phi + \frac{1}{2} EK \phi^3 \right] d\phi = \frac{1}{2} GJ_s (\theta_x)^2 + \frac{1}{8} EK (\theta_x)^4. \quad (15)$$

扭转波传播时属约束扭转, 单位杆长的翘曲变形能为

$$W_x = \frac{1}{2} E \iint_A \varepsilon^2 dA = \frac{1}{2} E \iint_A (u_x)^2 dA = \frac{1}{2} E (\phi_x)^2 \iint_A \Phi^2 dA = \frac{1}{2} EJ_\Phi (\theta_{xx})^2, \quad (16)$$

式中  $\varepsilon = u_x = \phi_x \Phi$  是纵向纤维由于翘曲引起的正应变. 单位杆长的总应变能为  $W = W_\tau + W_x$ , 从而 Lagrange 密度函数为

$$L = \frac{1}{2} \rho J_p (\theta_t)^2 + \frac{1}{2} \rho J_\Phi (\theta_{xt})^2 - \frac{1}{2} GJ_s (\theta_x)^2 - \frac{1}{8} EK (\theta_x)^4 - \frac{1}{2} EJ_\Phi (\theta_{xx})^2. \quad (17)$$

将式(17)代入式(3)便得到非圆截面扭转的非线性波动方程

$$\theta_{tt} - c_s^2 \left( \frac{J_s}{J_p} \right) \theta_{xx} = \frac{1}{2} c_0^2 \left( \frac{K}{J_p} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\theta_x)^3 + \left( \frac{J_\Phi}{J_p} \right) (\theta_{tt} - c_0^2 \theta_{xx})_{xx} \quad (18)$$

或

$$\phi_{tt} - c_s^2 \left( \frac{J_s}{J_p} \right) \phi_{xx} = \left[ \frac{1}{2} c_0^2 \left( \frac{K}{J_p} \right) \phi^3 + \left( \frac{J_\Phi}{J_p} \right) (\phi_{tt} - c_0^2 \phi_{xx}) \right]_{xx} \quad (19)$$

### 1.3 梁中的弯曲波方程

考虑一个等截面直梁的平面弯曲振动,在以下讨论中,采用了 Rayleigh 对初等理论的修正,即考虑转动惯性的影响.采用 Lagrange 描述,并取梁轴为  $x$  轴,中性轴为  $y$  轴,挠度方向为  $z$  轴.在有限挠度的情况下,梁的伸长和弯曲变形相互耦合,在以下讨论中没有轴向载荷作用,同时略去轴向惯性影响,梁截面上任意点处的正应变为

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (20)$$

此处,  $w$  为挠度,梁横截面上正应力  $\sigma$  由 Hooke 定律  $\sigma = E\varepsilon$  给出,于是有限挠度情况下单位长度梁的应变能为

$$W = \frac{1}{2} \iint_A \sigma \varepsilon dA = \frac{1}{2} EI (w_{xx})^2 + \frac{1}{8} EA (w_x)^4, \quad (21)$$

此处,  $E$  为弹性模量,  $A$  和  $I$  分别为横截面面积和惯性矩.

考虑转动惯性后,单位梁长的动能包括横向运动动能和转动动能两部分,即

$$T = \frac{1}{2} \rho A (w_t)^2 + \frac{1}{2} \rho I (w_{xt})^2. \quad (22)$$

于是 Lagrange 密度函数为

$$L = \frac{1}{2} \rho A (w_t)^2 + \frac{1}{2} \rho I (w_{xt})^2 - \frac{1}{2} EI (w_{xx})^2 - \frac{1}{8} EA (w_x)^4. \quad (23)$$

利用式(3)便得到梁中非线性弯曲波的方程

$$w_{tt} - \frac{1}{2} c_0^2 \frac{\partial (w_x)^3}{\partial x} = r_1^2 (w_{tt} - c_0^2 w_{xx})_{xx}, \quad (24)$$

式中  $r_1^2 = I/A$ . 如果令  $w = w_x$ , 上式变成

$$w_{tt} = \left[ \frac{c_0^2}{2} w^3 + r_1^2 (w_{tt} - c_0^2 w_{xx}) \right]_{xx}. \quad (25)$$

## 2 三种方程的定性分析

3种非线性方程可统一地表达为

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = [b^2 v^2 + d^2 v^3 + p^2 (v_{tt} - c^2 v_{xx})]_{xx}, \quad (26)$$

此处,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $p$  等系数均为常数. 相应于纵波方程(10)  $c_i = c_s$ , 相应于扭转方程(19)和弯曲波方程(25)  $c_i = c_0$ , 且在(19)中  $b = 0$ , 在(25)中  $a = b = 0$ .

假定方程(26)有如下形式的行波解

$$v = v(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (27)$$

则方程(26)化为常微分方程

$$p^2 (c_i^2 - c^2) v \xi \xi \xi + (c^2 - a^2) v \xi \xi - b^2 (v^2) \xi \xi - d^2 (v^3) \xi \xi = 0, \quad (28)$$

关于  $\xi$  积分两次, 有

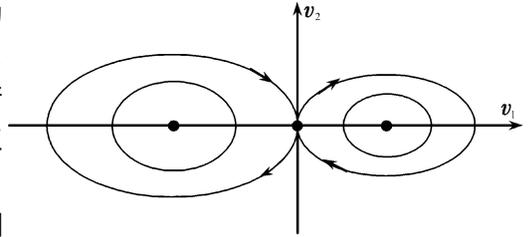
$$p^2 (c_i^2 - c^2) v \xi \xi + (c^2 - a^2) v - b^2 v^2 - d^2 v^3 = 0, \quad (29)$$

此处,为简单起见,两次积分常数均取为 0.

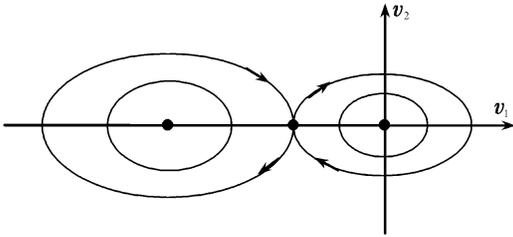
令  $v_1 = v, v_2 = v\xi$ , 则方程 (29) 可写成如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{d\xi} = v_2, \\ \frac{dv_2}{d\xi} = q[d^2v_1^3 + b^2v_1^2 - (c^2 - a^2)v_1], \end{cases} \quad (30)$$

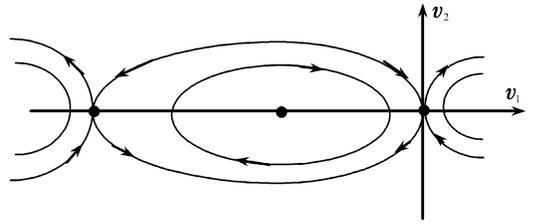
其中  $q = [p^2(c_1^2 - c^2)]^{-1}$ . 式 (30) 代表着 1 个二维自治动力系统. 式 (30) 的右边是 1 个三次多项式, 意味着系统有 3 个固定点. 进一步研究表明, 3 个固定点的类型有两种情况, 一是 2 个中心和 1 个鞍点, 此时系统相图中的分型线为同宿轨道(对应着孤立波解), 二是 2 个鞍点和 1 个中心, 系统相图中的分型线为异宿轨道(对应着冲击波解). 我们略去具体计算过程, 直接给出三类非线性方程对应的相图. 非线性纵波方程 (10) 的相图如图 1 所示. 非线性弯曲波方程 (25) 的相图如图 2 所示. 非线性扭转波方程 (19) 的相图也如图 2 所示, 但图中平衡点的坐标位置不同.



(a)  $c > c_0$  时分型线为同宿轨道

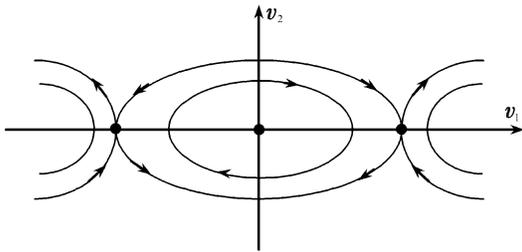


(b)  $c_s > c > c_0$  时分型线为同宿轨道

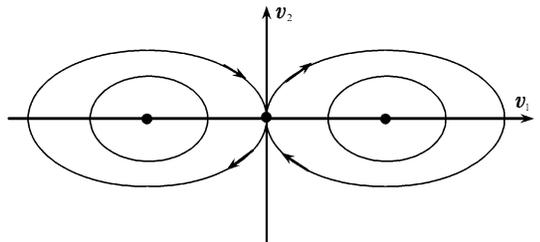


(c)  $c < c_s$  时分型线为异宿轨道

图 1 非线性纵波方程(10)的相图



(a)  $c < c_0$  时分型线为异宿轨道



(b)  $c > c_0$  分型线为同宿轨道

图 2 非线性弯曲方程(25)的相图

### 3 非线性弥散波方程的解

#### 3.1 孤立波解

为了讨论方程 (26) 的解, 假定方程 (26) 有如下形式的行波解:

$$v = v(\xi), \quad \xi = h(x - ct). \quad (31)$$

则方程 (26) 化为常微分方程

$$h^2 v \xi \xi \xi \xi + \beta_1 v \xi \xi + \beta_2 (v^2) \xi \xi + \beta_3 (v^3) \xi \xi = 0, \quad (32)$$

其中

$$\beta_1 = -\frac{c^2 - a^2}{p^2(c^2 - c_i^2)}, \quad \beta_2 = \frac{b^2}{p^2(c^2 - c_i^2)}, \quad \beta_3 = \frac{d^2}{p^2(c^2 - c_i^2)}. \quad (33)$$

首先用 Jacobi 椭圆余弦函数  $\text{cn} \xi$  讨论方程(32)的解, 令方程(32)有以下形式的解

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \text{cn}^j \xi. \quad (34)$$

为了以下讨论方便, 我们直接给出 3 种 Jacobi 椭圆函数之间的关系及其微分计算和渐近性质

$$\text{sn}^2 \xi + \text{cn}^2 \xi = 1, \quad \text{dn}^2 \xi + m^2 \text{sn}^2 \xi = 1, \quad (35)$$

$$\frac{d(\text{sn} \xi)}{d\xi} = \text{cn} \xi \text{dn} \xi, \quad \frac{d(\text{cn} \xi)}{d\xi} = -\text{sn} \xi \text{dn} \xi, \quad \frac{d(\text{dn} \xi)}{d\xi} = -m^2 \text{sn} \xi \text{cn} \xi \quad (36)$$

$$\begin{cases} \text{sn}(\xi, 0) = \sin \xi, & \text{cn}(\xi, 0) = \cos \xi, & \text{dn}(\xi, 0) = 1, \\ \text{sn}(\xi, 1) = \tanh \xi, & \text{cn}(\xi, 1) = \text{dn}(\xi, 1) = \text{sech} \xi \end{cases} \quad (37)$$

在以上各式中,  $\text{sn} \xi$  和  $\text{dn} \xi$  是 Jacobi 椭圆正弦函数和第 3 种 Jacobi 椭圆函数,  $m$  为模数 ( $0 \leq m \leq 1$ ).

从式(34),  $v(\xi)$  的最高阶次为  $n$ , 即

$$O(v(\xi)) = n. \quad (38)$$

根据微分关系式(36), 我们容易确定  $dv/d\xi$  和  $d^4v/d\xi^4$  的最高阶次分别为

$$O\left(\frac{dv}{d\xi}\right) = n + 1, \quad O\left(\frac{d^4v}{d\xi^4}\right) = n + 4. \quad (39)$$

显然  $v^2$  和  $v^3$  的最高阶次为

$$O(v^2) = 2n, \quad O(v^3) = 3n. \quad (40)$$

在展开式(34)中的  $n$  由齐次平衡原理来确定, 即由非线性方程(32)中的最高阶非线性项的阶次与最高阶导数项(弥散项)的阶次之间的平衡来确定, 于是由  $3n + 2 = n + 4$  可以得到  $n = 1$ , 从而展开式(34)可以写成

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \text{cn} \xi. \quad (41)$$

上式关于  $\xi$  微分两次, 有

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = -a_1 \text{cn} \xi (1 - 2m^2 + 2m^2 \text{cn}^2 \xi). \quad (42)$$

将式(41)和(42)代入方程(32), 进一步完成求导和代数运算, 合并  $\text{cn} \xi$  的同次幂, 由各次幂的系数为 0, 给出

$$a_0 = -\frac{\beta_2}{3\beta_3}, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_3}} hm, \quad h^2 = \frac{3\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}{3\beta_3(1 - 2m^2)}. \quad (43)$$

式(43)代入式(41)便得到

$$v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_3}} mh \text{cn}(\xi, m) - \frac{\beta_2}{3\beta_3}, \quad (44)$$

这是周期波解, 如要求实值波幅存在, 则必有  $\beta_3 > 0$ , 从而由式(33)要求  $c > c_i$ . 当模数  $m \rightarrow 1$  时,  $\text{cn} \xi \rightarrow \text{sech} \xi$ , 便得孤立波解

$$v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_3}} h \text{sech} \xi - \frac{\beta_2}{3\beta_3}. \quad (45)$$

### 3.2 冲击波解

方程(32)的解取为 Jacobi 椭圆正弦函数展开的形式:

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^n b_j \operatorname{sn}^j \xi. \quad (46)$$

平行于 3.1 小节的分析, 可以确定  $n = 1$ , 并给出如下周期波解:

$$v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_3} m h \operatorname{sn}(\xi, m) - \frac{\beta_2}{3\beta_3}}. \quad (47)$$

当模数  $m \rightarrow 1$  时,  $\operatorname{sn} \xi \rightarrow \tanh \xi$ , 便得冲击波解

$$v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_3} h \tanh \xi - \frac{\beta_2}{3\beta_3}}. \quad (48)$$

式(47)和(48)要求  $\beta_3 < 0$ , 这意味着  $c < c_i$  是冲击波解存在的必要条件.

## 4 结 论

从以上分析, 可以得出如下重要结论:

1) 在经典线性杆理论的基础上, 引入有限变形及某种弥散效应, 借助 Hamilton 变分原理, 得到了 3 种非线性弥散波方程. 这 3 种方程有相同的物理机制, 非线性均是由主变形(拉压、扭转、弯曲)的有限变形引起的. 而弥散效应都是由伴随主变形的次级运动和变形(横向 Poisson 效应、非圆截面杆扭转时的翘曲变形、梁中转动惯性)产生的. 非线性与弥散效应相互抑制、平衡的结果, 在一定条件下, 可能导致孤立波或冲击波.

2) 3 种方程数学结构是相似的, 可统一地用式(26)或(29)来描述. 3 种方程的最高阶非线性项的阶次都是 3 次的, 最高阶弥散项的导数均为 2 阶的, 这种数学结构的相似, 就决定了它们的解有某些共同的特征. 对方程的定性分析的结果表明, 在相平面上这些方程存在同宿轨道或异宿轨道, 分别相应于孤波解或冲击波解.

3) 为了研究 3 种非线性弥散波的性质, 基于齐次平衡原理的 Jacobi 椭圆函数展开是个行之有效的方法. 利用这种方法能够得到准确的周期解. 不论关于  $\operatorname{cn}$  函数展开还是  $\operatorname{sn}$  函数展开, 3 种方程的展开式都有  $n = 1$ , 这是由于它们的数学结构相似所决定的. 根据 Jacobi 椭圆函数的渐近性质, 容易判定, 当使用  $\operatorname{cn}$  函数展开或  $\operatorname{sn}$  函数展开, 分别得到孤立波解(45)或冲击波解(48). 由式(45)和(48)可以看出, 对于等截面圆杆中的非线性纵波, 当  $c > c_s$  时, 可能出现孤立波解, 当  $c < c_s$  时, 则可能出现冲击波解. 对于非圆截面杆中的非线性扭转波和梁中的非线性波, 当  $c > c_0$  时有可能存在孤立波解, 而当  $c < c_0$  时, 则可能存在冲击波解. 这与定性分析的结果是完全一致的. 这 3 类方程既可能出现孤立波解, 又可能出现冲击波解, 是由于它们均含有 2 个弥散项, 且具有不同的正负号.

### [参 考 文 献]

- [1] Graff Karl F. Wave Motion in Elastic Solids [M]. New York: Dover Publications, 1991.
- [2] Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [3] Samsonov A V, Dreiden G V, Porubov A V, et al. Longitudinal-strain soliton focusing in a narrowing nonlinearly elastic rod[J]. Phys Rev B, 1998, 57(10): 5778-5787.
- [4] Porubov A V, Velarde M G. Strain kinks in an elastic rod embedded in a viscoelastic medium[J]. Wave Motion, 2002, 35(3): 189-204.
- [5] DAI Hui-hui, FAN Xia-jun. Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long wave in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations[J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2004, 9(1): 61-79.

- [6] Samsonov A M. Strain Solutions in Solid and How to Construct Them [M]. New York: Chapman & Hall/ CRC, 2001.
- [7] Clarkson P A, Leveque R J, Saxton R. Solitary- wave interaction in elastic rods[J]. Stud Appl Math, 1986, **75**(2): 95-122.
- [8] ZHANG Shan-yuan, ZHUANG Wei. The strain solitary waves in a nonlinear elastic rod[J]. Acta Mechanica Sinica, 1987, **3**(1): 62-72.
- [9] 郭建刚, 周丽军, 张善元. 有限变形弹性杆中的几何非线性波[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(5): 614-620.
- [10] 刘志芳, 张善元. 圆杆波导中的一个非线性波动方程及准确周期解[J]. 物理学报, 2006, **55**(2): 628-633.
- [11] Kappus, Zur Elastizitätstheorie endlicher verschiebungen[J]. Z Angew Math Mech, 1939, **19**(5): 344-360.
- [12] FU Zun-tao, LIU Shi-kuo, LIU Shi-da. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations[J]. Physics Letters A, 2001, **290**(1/2): 72-76.

## Three Kinds of Nonlinear Dispersive Waves in Finite Deformation Elastic Rods

ZHANG Shan-yuan, LIU Zhi-fang

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,  
Taiyuan 030024, P. R. China)

**Abstract:** On the basis of classical linear theory on longitudinal, torsional and flexural waves in thin elastic rods, taking finite deformation and dispersive effects into consideration, three kinds of nonlinear evolution equations were derived. Qualitative analyses of three kinds of nonlinear equation were completed. It is shown that these equations have homoclinic or heteroclinic orbits on the phase plane, which correspond to solitary wave or shock wave solution respectively. Based on the principle of homogeneous balance, these equations were resolved by Jacobi elliptic function expansion method. The results show that the existence of solitary wave solution and shock wave solution are possible under certain conditions. These conclusions are consistent with that of the qualitative analysis.

**Key words:** elastic thin rod; finite deformation; dispersive effect; solitary wave; shock wave