

# 广义 Boussinesq 方程的多辛方法<sup>\*</sup>

胡伟鹏<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>1,2</sup>

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(岳珠峰推荐)

**摘要:** 广义 Boussinesq 方程作为一类重要的非线性方程有着许多有趣的性质, 基于 Hamilton 空间体系的多辛理论研究了广义 Boussinesq 方程的数值解法, 构造了一种等价于多辛 Box 格式的新隐式多辛格式, 该格式满足多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律. 对广义 Boussinesq 方程孤子解的数值模拟结果表明, 该多辛离散格式具有较好的长时间数值稳定性.

**关键词:** 广义 Boussinesq 方程; 多辛方法; 孤子解; 守恒律

**中图分类号:** O175.24      **文献标识码:** A

## 引 言

多辛结构在保持经典力学和经典场论的 Lagrange 形式方面起着非常重要的作用, 并且已经被广泛应用于某些偏微分方程系统的求解过程中<sup>[1-9]</sup>. 多辛积分方法的基本思想是设计一种在每一步迭代中保持偏微分方程的这种多辛结构的数值方法<sup>[1-2]</sup>. 许多保守型的偏微分方程, 如 Schrödinger 方程、KdV 方程、膜自由振动方程、“good” Boussinesq 方程等等, 都存在能够较好保持多种守恒律的多辛格式<sup>[2, 5-9]</sup>.

广义 Boussinesq 方程作为一类重要的非线性保守型偏微分方程, 用以描述重力作用下的浅水长波运动规律和一维非线性晶格中的长波运动规律<sup>[10-11]</sup>, 其孤子解已经得到了学术界的广泛研究<sup>[10-17]</sup>: Nimmo、Freeman<sup>[12]</sup> 和 Zhang 等人<sup>[13]</sup> 利用双线性 Bäcklund 变换法推出了 Boussinesq 方程的 Wronskian 形式的多孤子解; Kaptsov<sup>[14]</sup> 得到了一些 Boussinesq 方程的以基本初等函数表达的孤子解; Wazwaza<sup>[15, 17]</sup> 利用修正分解法, 得到了一些 Boussinesq 方程新的孤子解和周期解. 与此同时, 一些有关 Boussinesq 方程数值方法的研究成果也相继被报道出来<sup>[8-9, 18]</sup>: El-Zoheiry 利用一种隐式有限差分迭代格式模拟了 Boussinesq 方程的孤子解<sup>[18]</sup>; 曾文平等构造了非线性“good” Boussinesq 方程的多辛格式, 并利用这些格式模拟了“good” Boussinesq 方程的孤

\* 收稿日期: 2008-04-16; 修订日期: 2008-05-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572119; 10772147; 10632030); 高校博士点基金资助项目(20070699028); 陕西省自然科学基金资助项目(2006A07); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 胡伟鹏(1977—), 男, 湖北人, 博士(E-mail: huweipeng@mail.nwpu.edu.cn);  
邓子辰(1964—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: +86-29-88460403; E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

子解, 得到了一些初步结果<sup>[8,9]</sup>. 本文以此为基础, 详细研究了广义 Boussinesq 方程的多辛方法.

## 1 广义 Boussinesq 方程的多辛形式及其守恒律

广义 Boussinesq 方程

$$\partial_t u - \alpha \partial_{xx} u - \partial_{xx}(f(u)) - \beta \partial_{xxx} u = 0 \quad (1)$$

是由 Boussinesq 提出的用以描述浅水长波演化过程的一类重要的非线性方程, 其中,  $\alpha, \beta$  为实常数,  $u = u(x, t)$  为平均纵向波速. 依据 Bridges 意义下的多辛理论<sup>[1,3]</sup>, 引入正交动量:  $\partial_x u = v, \partial_t u = \partial_x p, p = \partial_x w$ , 并定义状态变量  $z = [u, v, w, p]^T \in R^4$ , 广义 Boussinesq 方程(1) 就可以写成如下的多辛偏微分方程形式<sup>[5-6]</sup>:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_t z + \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x z = \begin{bmatrix} \alpha u + f(u) \\ \beta v \\ 0 \\ -p \end{bmatrix}. \quad (2)$$

将方程(2)写成矩阵形式:

$$M \partial_t z + K \partial_x z = \cdot_z S(z), \quad z \in R^d, \quad (3)$$

式中 Hamilton 函数  $S(z) = \frac{1}{2}(\alpha u^2 + \beta v^2 - p^2) + \int f(u) du$ .

多辛形式(3) 备受学术界关注的原因之一是其存在多辛守恒律<sup>[3]</sup>. 将多辛形式(3) 中的某些基态  $z(x, t)$  线性化后可得到其对应的变分方程(线性化后的向量以  $Z$  表示)

$$M \partial_t Z + K \partial_x Z = S_{zz}(z) Z. \quad (4)$$

假定  $U, V$  是变分方程(4) 的两个解, 那么  $U, V$  必然满足

$$\partial_t (U^T M V) + \partial_x (U^T K V) = 0. \quad (5)$$

对于方程(5), 定义预辛形式

$$\omega(U, V) = U^T M V, \quad k(U, V) = U^T K V,$$

那么方程(5) 就等价于以下多辛守恒律(CLS):

$$\partial_t \omega + \partial_x k = 0. \quad (6)$$

$\omega, k$  的另一种更为抽象的定义方式: 外积定义方式为

$$\omega = \frac{1}{2} dz \wedge M dz, \quad k = \frac{1}{2} dz \wedge K dz,$$

则对于广义 Boussinesq 方程(1), 其多辛守恒律的具体形式为

$$\partial_t (du \wedge dw) + \partial_x (\beta dv \wedge du + dw \wedge dp) = 0. \quad (7)$$

多辛形式(3) 备受学术界关注的另一原因是其存在局部能量守恒律(ECL) 和局部动量守恒律(MCL). 依据 Bridges 等人的分析方法<sup>[1,3]</sup>, 局部能量守恒律和局部动量守恒律可以推导如下: 将多辛偏微分方程组对时间求变分后与  $\partial_t z$  作内积, 由于矩阵  $M$  是反对称矩阵, 因此  $\langle \partial_t z, M \partial_t z \rangle = 0$ , 则

$$\langle \partial_t z, K \partial_x z \rangle = \langle \partial_t z, \cdot_z S(z) \rangle, \quad (8)$$

同时将  $\langle \partial_t z, K \partial_x z \rangle = 0.5 \partial_t \langle z, K \partial_x z \rangle + 0.5 \partial_x \langle \partial_t z, K z \rangle$ ,  $\langle \partial_t z, \cdot_z S(z) \rangle = \partial_t S(z)$  代入上式得到局部能量守恒律

$$\partial_t e + \partial_x f = 0, \quad (9)$$

其中能量密度  $e = S(z) - 0.5 \langle \partial_x z, Kz \rangle$ , 能量通量  $f = 0.5 \langle z, K \partial_t z \rangle$ .

对应于广义 Boussinesq 方程(1), 其局部能量守恒律(9)表述为

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[ S(z) - \frac{1}{2} (\beta u \partial_x v - \beta v \partial_x u + p \partial_x w - w \partial_x p) \right] + \\ & \frac{1}{2} \partial_x (\beta v \partial_t u - \beta u \partial_t v + w \partial_t p - p \partial_t w) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

类似地, 利用对(3)式中的空间变分其得到局部动量守恒律

$$\partial_t h + \partial_x g = 0, \quad (11)$$

其中  $h = \frac{1}{2} \langle z, M \partial_x z \rangle$ ,  $g = S(z) - \frac{1}{2} \langle \partial_t z, Mz \rangle$ .

对应于广义 Boussinesq 方程(1), 其局部动量守恒律(11)表述为

$$\frac{1}{2} \partial_t (u \partial_x w - w \partial_x u) + \partial_x \left[ S(z) - \frac{1}{2} (u \partial_t w - w \partial_t u) \right] = 0. \quad (12)$$

## 2 方程(1)的多辛 Box 格式及其等价格式

Box 方法是构造多辛离散格式的最简单的离散方法, 因此利用由 Box 方法构造的多辛离散格式来模拟广义 Boussinesq 方程的孤子解所涉及到的计算量比较小, 而且更能有力的表现出多辛方法的诸多优点. 方程组(2)的多辛 Box 离散格式为

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (w_{i+1}^{j+1/2} - w_i^{j+1/2}) - \frac{\beta}{\Delta x} (v_{i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^j) = (\alpha u + f(u))_{i+1/2}^{j+1/2} \\ \frac{\beta}{\Delta x} (u_{i+1/2}^{j+1} - u_{i+1/2}^j) = \beta v_{i+1/2}^{j+1/2}, \\ - \frac{1}{\Delta t} (u_{i+1}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}) + \frac{1}{\Delta x} (p_{i+1/2}^{j+1} - p_{i+1/2}^j) = 0, \\ - \frac{1}{\Delta x} (w_{i+1/2}^{j+1} - w_{i+1/2}^j) = - p_{i+1/2}^{j+1/2}. \end{cases} \quad (13)$$

多辛 Box 离散格式(13) 满足离散的多辛守恒律

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (du_{i+1}^{j+1/2} \wedge dw_{i+1}^{j+1/2} - du_i^{j+1/2} \wedge dw_i^{j+1/2}) + \frac{1}{\Delta x} (\beta dv_{i+1/2}^j \wedge du_{i+1/2}^{j+1} - \\ & \beta du_{i+1/2}^j \wedge dv_{i+1/2}^{j+1} + dw_{i+1/2}^{j+1} \wedge dp_{i+1/2}^j - dw_{i+1/2}^j \wedge dp_{i+1/2}^{j+1}) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

类似地可以得到离散的局部能量守恒律和离散的局部动量守恒律. 为了进一步减小计算量, 削去格式(13)中的中间变量  $v, w$  和  $p$ , 得到等价于多辛 Box 离散格式(13)的新多辛隐式格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta t} (8\delta_x^2 u_{i+2}^j - 4\delta_x^2 u_{i+1}^j + 6\delta_x^2 u_i^j - 4\delta_x^2 u_{i-1}^j + \delta_x^2 u_{i-2}^j) - \frac{\alpha}{4\Delta x} (8\delta_x^2 u_i^{j+2} - 4\delta_x^2 u_i^{j+1} + \\ & 6\delta_x^2 u_i^j - 4\delta_x^2 u_i^{j-1} + \delta_x^2 u_i^{j-2}) - \frac{1}{4\Delta x} [ \delta_x^2 (f(u)_{i+2}^{j+2}) + \\ & 16\delta_x^2 (f(u)_{i+1}^{j+1}) + 36\delta_x^2 (f(u)_i^j) + 16\delta_x^2 (f(u)_{i-1}^{j-1}) + \delta_x^2 (f(u)_{i-2}^{j-2}) ] - \\ & \frac{\beta}{\Delta x} (8\delta_x^4 u_i^{j+1} - 2\delta_x^4 u_i^j + 8\delta_x^4 u_i^{j-1}) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\Delta t$  和  $\Delta x$  分别为时间步长和空间步长,

$$\delta_x^2 u_i^j = u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j, \quad \delta_x^4 u_i^j = u_i^{j+2} - 4u_i^{j+1} + 6u_i^j - 4u_i^{j-1} + u_i^{j-2}$$

等. 显然, 多辛隐式格式(15) 是比文献[8,9]中的多辛格式更加简洁的二阶隐式格式.

### 3 数值实验

为了说明多辛方法的诸多优点, 本节我们利用多辛隐式格式(15)模拟广义 Boussinesq 方程的孤子解.

考虑如下的广义 Boussinesq 方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x x u - 3\partial_x x(u^2) - \partial_{xxx} u = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) |_{t=c}, \end{cases} \quad (16)$$

式中  $c > 0$  并且  $c \neq 1$  为波速.

情形 1 如果  $c > 1$ , 则初值问题(16)具有如下孤子解<sup>[17]</sup>:

$$u(x, t) = \frac{c^2 - 1}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - 1} (x - ct) \right]. \quad (17)$$

令  $c = 2$ , 取步长  $\Delta t = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.02$ , 利用多辛隐式格式(15)在  $(x, t) \in [-10, 10] \times [0, 40]$  区间内模拟孤子解(17), 得到广义 Boussinesq 方程的数值解. 孤子解的演化过程如图 1, 同时图 2 给出了  $t \in [0, 40]$  时段内的局部能量误差和局部动量误差.

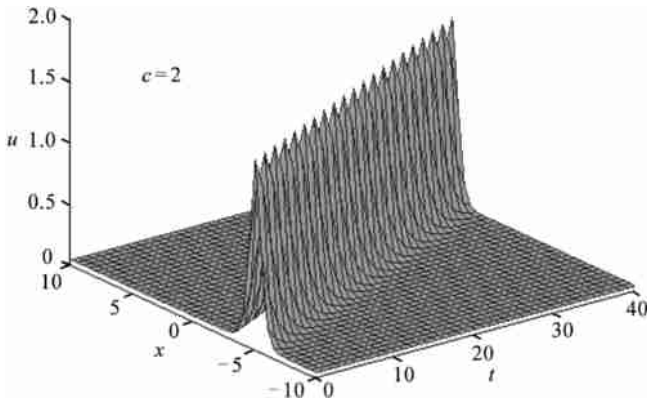


图 1 孤子解(17)的演化过程 ( $t \in [0, 40]$ )

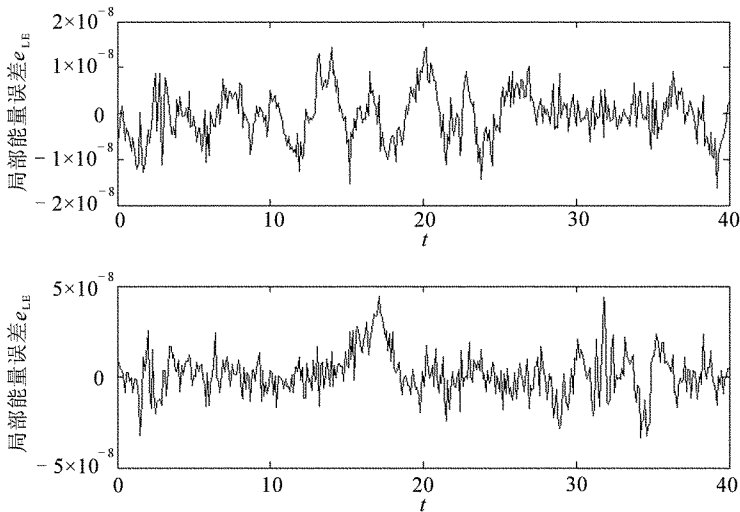


图 2 局部能量误差和局部动量误差 ( $t \in [0, 40]$ )

情形 2 如果  $0 < c < 1$ , 则初值问题(16)具有如下孤子解<sup>[17]</sup>:

$$u(x, t) = \frac{1-c^2}{6} \left[ 1 - 3 \tanh^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1-c^2} (x - ct) \right] \right]. \quad (18)$$

令  $c = 0.5$ , 仍然取步长  $\Delta t = 0.05, \Delta x = 0.02$ , 利用多辛隐式格式(15) 在  $(x, t) \in [-10, 10] \times [0, 40]$  区间内模拟孤子解(18), 同样得到广义 Boussinesq 方程的数值解. 孤子解的演化过程如图 3, 同时图 4 给出了  $t \in [0, 40]$  时段内的局部能量误差和局部动量误差.

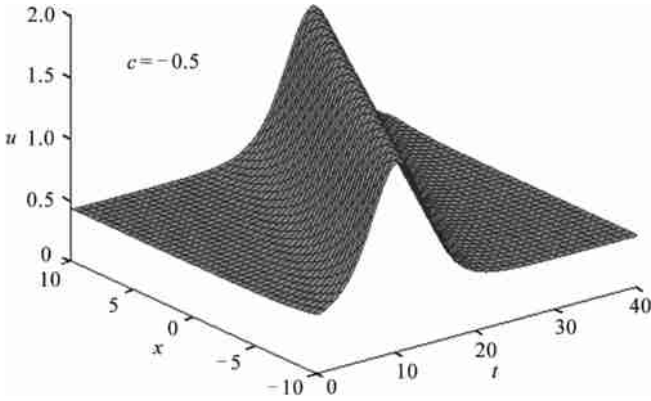


图 3 孤子解(18)的演化过程 ( $t \in [0, 40]$ )

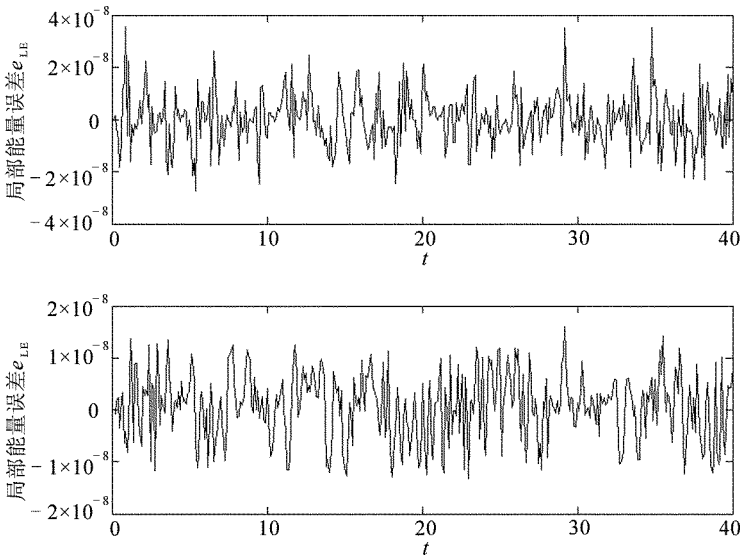


图 4 局部能量误差和局部动量误差 ( $t \in [0, 40]$ )

从以上数值结果我们发现, 利用本文构造的多辛隐式格式模拟广义 Boussinesq 方程的孤子解(17)和(18), 得到的波形和波速都不随时间变化而变化, 这说明多辛格式(15)能够很好的保持孤子解的基本几何性质; 而且在整个模拟过程中, 系统的多辛守恒律误差、局部能量误差和局部动量误差均在  $[-5 \times 10^{-8}, 5 \times 10^{-8}]$  范围内, 这进一步说明多辛格式(15)能够很好的满足多个守恒律, 并具有良好的长时间数值行为.

### 4 结 论

本文基于 Hamilton 空间体系的 Bridges 多辛理论给出了广义 Boussinesq 方程的多辛形式, 并推出了多种守恒律, 随后构造了一种等价于 Box 多辛格式的隐式多辛离散格式. 数值实验

的结果表明多辛方法具有以下两大优点: 良好的长时间数值行为和精确的保持多种守恒律.

“good” Boussinesq 的多辛格式在秦孟兆、曾文平等人的文献中已被提出, 并对其算法实现做了很多有意义的工作, 本文的特色主要表现在以下两个方面: 一方面, 本文研究的广义 Boussinesq 方程与曾文平等研究过的“good” Boussinesq 有很大区别; 另一方面是本文的数值模拟结果给出了局部能量误差和局部动量误差. 这能直接表现出多辛算法的优点.

致谢 作者感谢西北工业大学基础研究基金对本文的资助.

### [参 考 文 献]

- [1] Bridge T J, Reich S. Multi-symplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. *Physics Letters A*, 2001, **284**(4/5): 184-193.
- [2] Moore B E, Reich S. Multi-symplectic integration methods for Hamiltonian PDEs[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2003, **19**(3): 395-402.
- [3] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.
- [4] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations[J]. *Computational Physics*, 2000, **157**(2): 473-499.
- [5] Zhao P F, Qin M Z. Multisymplectic geometry and multisymplectic preissmann scheme for the KdV equation[J]. *Journal of Physics, A, Mathematical and General*, 2000, **33**(18): 3613-3626.
- [6] Islas A L, Schober C M. Multi-symplectic methods for generalized Schrödinger equations[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2003, **19**(3): 403-413.
- [7] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. 膜自由振动的多辛方法[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(9): 1054-1062.
- [8] HUANG Lang-yang, ZENG Wen-ping, QIN Meng-zhao. A new multi-symplectic scheme for nonlinear “good” Boussinesq equation[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2003, **21**(6): 703-714.
- [9] 曾文平, 黄浪扬, 秦孟兆. “Good” Boussinesq 方程的多辛算法[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(7): 743-748.
- [10] Hirota R. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, **14**(7): 805-809.
- [11] Hirota R. Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, **14**(7): 810-814.
- [12] Nimmo J J C, Freeman N C. A method of obtaining the N-soliton solutions of the Boussinesq equation in terms of a Wronskian[J]. *Physics Letters A*, 1983, **95**(1): 4-6.
- [13] Zhang Y, Chen D Y. A modified Bäcklund transformation and multi-soliton solution for the Boussinesq equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, **23**(1): 175-181.
- [14] Kaptsov O V. Construction of exact solutions of the Boussinesq equation[J]. *Journal of Applied Mechanics and Theoretical Physics*, 1998, **39**(3): 389-392.
- [15] Wazwaz Abdul-Majid. Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, **12**(8): 1549-1556.
- [16] Yan Z Y, Bluman G. New compacton soliton solutions and solitary patterns solutions of nonlinearly dispersive Boussinesq equations[J]. *Computer Physics Communications*, 2002, **149**(1): 11-18.
- [17] Wazwaz Abdul-Majid. Multiple soliton solutions for the Boussinesq equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **192**(2): 479-486.
- [18] El-Zoheiry H. Numerical investigation for the solitary waves interaction of the “good” Boussinesq equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, **45**(2/3): 161-173.

# Multi-Symplectic Method for Generalized Boussinesq Equation

HU Wei-peng<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,2</sup>

- (1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;  
2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China)

**Abstract:** Generalized Boussinesq equation, representing a group of important nonlinear equations, possesses many interesting properties. The multi-symplectic formulations of which in Hamilton space were introduced. Then an implicit multi-symplectic scheme equivalent to the multi-symplectic Box scheme was constructed to solve the partial differential equations (PDEs) that were derived from the generalized Boussinesq equation. The numerical experiments on the soliton solutions of the generalized Boussinesq equation were also reported. Finally, the results of which show that the multi-symplectic method is an efficient algorithm with excellent long-time numerical behaviors for nonlinear partial differential equation.

**Key words:** generalized Boussinesq equation; multi-symplectic method; soliton solution; conservation law