

带自由液面粘性流体运动的最小二乘有限元模拟*

汤波, 李俊峰, 王天舒

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(陈立群推荐)

摘要: 给出了一种求解带自由液面流体运动的数值方法. 流体运动的 Navier-Stokes 方程应用最小二乘有限元进行离散, 有限差分法用来进行时间推进. 采用 Lagrange 方法描述网格. 将模型的计算结果与二维矩形和三维圆柱形坝溃的实验结果进行了对比. 计算得到的时间历程与实验结果十分吻合, 验证了最小二乘有限元在此类问题中应用的可能性.

关键词: 粘性不可压流体; Lagrange 描述; 最小二乘有限元; 坝溃实验

中图分类号: O357.1; O359+.1 **文献标识码:** A

引 言

火箭升空时燃料箱内液体的晃动, 会给火箭的稳定性和操纵性带来显著影响; 高地震区中, 水电站的溃决将造成巨大的损失, 需要预估溃坝洪水带来的影响. 对于这类带有自由面粘性流体运动的问题, 解析方法有其局限性^[1], 实验代价又比较昂贵, 数值实验可能是预测及了解可能发生状况的一个选择.

数学上, 带自由面粘性流体运动的复杂性, 也吸引大批学者投身其中. 其中一个困难就是粘性不可压流体方程的求解: Navier-Stokes 方程的非线性对流项, 以及事实上作为 Lagrange 乘子出现的压力项, 都给方程的数值求解带来了困难. 以分步法为例, 它引入了非物理的 Neumann 边界条件, 并经常需要加入各种稳定项来保证计算的稳定性. 文献[2]中总结, 对于分步法, 如果时间步长太小, 压力计算有可能发生振荡; 如果步长太大, 结果又可能过度耗散.

最小二乘有限元^[3]则通过引入物理或伪变量将高阶方程转化为一阶, 直接通过最小二乘加权余量法对方程进行离散, 避免了不可压条件导致的 LBB^[4]条件, 也避免了分步法中引入的人工 Neumann 边界条件^[5].

本文采用最小二乘有限元 (LSFEM) 和 Lagrange 描述来构造计算过程. 文章结构如下: 第 1 节给出控制方程和边界条件; 第 2 节给出最小二乘有限元的一般形式; 第 3 节给出求解步骤; 由于坝溃问题有丰富的实验结果, 第 4 节将数值结果和坝溃问题的数值结果进行对比以验证此数值方法; 最后是结论.

* 收稿日期: 2007-11-08; 修订日期: 2008-06-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10302013; 10572022)

作者简介: 汤波 (1982-), 男, 安徽人, 博士生 (联系人, Tel: + 86-10-62773402; E-mail: tangbo99@mails.tsinghua.edu.cn).

1 控制方程

Lagrange 描述下, 流体方程变为不可压 Stokes 方程:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (1)$$

连续方程, 即不可压限制条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

上述方程中, \mathbf{u} 是速度场, p 为压力, ρ 是流体密度, \mathbf{f} 表示体力, ν 是流体动粘性系数, t 表示时间. 方程初始条件为给定的速度场 \mathbf{u}_0 . 边界条件为固壁处的不可穿透条件和自由面上的压力边界条件.

在 Lagrange 描述下, 自由面的位置即为网格位置, 所以对于自由面不需要特殊处理, 只需要给定自由面压力边界条件. 由于 LSFEM 很强的稳定性, 即使网格变形很大, 只要不产生网格的扭曲和破碎时, 采用这种简单的描述都可以得到稳定的结果. 这点从后面的算例中可以看到.

2 有限元离散

对于方程 (1) 和 (2) 的求解, 有限元方法渐渐得到广泛认同. 本文选用的是的最小二乘有限元方法. 为了使得到的离散插值函数为 C_0 型, 首先需要将方程 (1) 转化为一阶格式. 通过引入辅助变量旋度 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}^{[3]}$, 方程 (1)、(2) 转化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \times \omega = \mathbf{f}, \\ \omega - \nabla \times \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

在最小二乘有限元计算中, 常加入一个方程 $\nabla \cdot \omega = 0$, 这个方程可以直接从 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ 推导出来, 看起来是多余的, 但可以用在数值计算中提高计算精度^[3].

利用有限差分法进行时间离散得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \theta \left[\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nu \nabla \times \omega^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[\frac{1}{\rho} \nabla p^n + \nu \nabla \times \omega^n \right] &= \mathbf{f}^{n+1}, \\ \omega^{n+1} - \nabla \times \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \\ \nabla \cdot \omega^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

三维情况下写成标量形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0, \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \theta \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)^{n+1} \right] = \\ f_x^{n+1} - (1-\theta) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)^n \right], \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \theta \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^{n+1} \right] = \\ f_y^{n+1} - (1-\theta) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^n \right], \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + \theta \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^{n+1} \right] = \\ f_z^{n+1} - (1 - \theta) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^n \right], \\ \omega_x^{n+1} - \left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} \right) = 0, \quad \omega_y^{n+1} - \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} - \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} \right) = 0, \\ \omega_z^{n+1} - \left(\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial \omega_x^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z^{n+1}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (4b)$$

其中 $\theta = 1/2$ 为 Crank-Nicolson 格式, 为二阶时间精度, 用于求解瞬变问题.

可以看出, 动量方程的右端项有上一时刻的压力和旋度对空间的偏导数. 此偏导数可以直接由上一时刻得到的结点压力和旋度插值得到. 需要注意的是, 求右端项中的偏导数用的为上一步网格, 即网格未更新时的插值函数, 这是显式求解. 而用有限元法离散求新的流场速度、压力和旋度所用的为网格更新后的插值函数, 此为隐式求解. 所以在每个时间步要进行若干次迭代, 才能得到收敛的新网格. 计算表明, 迭代次数一般不超过 3 次. 这种迭代处理在文献[6]中有详细描述.

为以后的分析方便, 可以将方程(4)写成一阶偏微分方程的矩阵的形式, 为

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

其中 \mathbf{A} 为偏微分算子, 可由如下的偏微分算子合成:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z},$$

其中 \mathbf{u} 为待求变量, 为

$$\mathbf{u} = (u \quad v \quad w \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad p)^T.$$

从式(4)可以得到

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta\mu/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta\mu/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta\mu/\rho \\ 0 & 0 & 0 & \theta/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta\mu/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta\mu/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta\mu/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x^{n+1} - (1-\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right\}^n \right\} \\ f_y^{n+1} - (1-\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right\}^n \right\} \\ f_z^{n+1} - (1-\theta) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right\}^n \right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于采用了 Lagrange 描述, 没有非线性的对流项, 而时间离散也选择了显式方法, 所以每一迭代步得到的 \mathbf{A} 和 \mathbf{f} 均为常量矩阵, 不需要进行线性化, 这也给后续处理带来很大的方便.

这是一阶线性偏微分方程, 应用有限元方法来进行空间离散. 给定单元插值函数 φ_i , 则单元内变量值 $u_e(\mathbf{x})$ 可以表示为

$$u_e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j(\mathbf{x}) (u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, p)_j^T = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j^e, \quad (6)$$

其中 N_n 为单元结点数, \mathbf{u}_j^e 为单元第 j 个结点上的 7 个待求变量. 于是方程(5) 在每个单元上可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e \mathbf{u}_e &= \mathbf{A}_e \left(\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j^e \right) = \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{A}_0 \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j^e + \sum_{j=1}^{N_n} \sum_{k=1}^3 \mathbf{A}_k \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \mathbf{u}_j^e = \\ &\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e = \mathbf{f}_e, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{A}_0 \varphi_j + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}.$$

给定插值函数下的得到解 \mathbf{u}_e 是不能精确满足方程(7) 的, 它将产生残差

$$\mathbf{R}_e = \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e. \quad (8)$$

最小二乘方法即使式(8) 在最小二乘意义上达到极小值, 即使泛函

$$I(\mathbf{u}_e) = \int_e \left[\left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right)^T \left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right) \right] d\Omega. \quad (9)$$

取极小值, 其必要条件为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{u}_i^e} I(\mathbf{u}_e) &= \int_e \frac{d}{d\mathbf{u}_i^e} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right)^T \left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right) \right] d\Omega = \\ &2 \int_e \left[\frac{d}{d\mathbf{u}_i^e} \left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right)^T \right] \left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right) d\Omega = \\ &2 \int_e \mathbf{B}_i^T \left(\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e - \mathbf{f}_e \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10) 的求和项写为

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j^e = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n}) (\mathbf{u}_1^e, \mathbf{u}_2^e, \dots, \mathbf{u}_{N_n}^e)^T = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n}) \mathbf{U}_e.$$

方程 (10) 可以写成如下的代数形式

$$\mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e. \quad (11)$$

对应的单元刚度矩阵和载荷矩阵分别为

$$\mathbf{K}_e = \int_e (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n})^T (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n}) d\Omega, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_e (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n})^T \mathbf{f}_e d\Omega. \quad (13)$$

有限元集成后可以得到系统的总体刚度矩阵和载荷列阵

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (14)$$

此种方法最后的刚度矩阵 \mathbf{K} 为对称正定的, 可以使用预处理共轭梯度法高效求解^[3,7].

实际计算中, 经常会在方程(4) 两边附加系数来提高不可压方程在泛函中的比重^[8,9]. 这种加权最小二乘有限元的能大大提高求解中的质量守恒.

3 LSFEM 求解步骤

本章给出了最小二乘有限元求解的步骤.

选择了 Lagrange 描述, 尽管方程中对流项消失了, 得到了一个线性偏微分方程. 但此线性偏微分方程只适用于每一个迭代步, 问题非线性效应并没有消失, 而是转换为网格的移动引起的非线性. 因此, 如下的迭代步骤仍是必要的:

步 1 从方程(11) 求解 $(\mathbf{u}, p, \omega)^{n+1,j}$, 这里 j 表示新节点位置下的第 j 次迭代.

步 2 在 Lagrange 描述下更新节点位置

$$\mathbf{x}_i^{n+1,j} = \mathbf{x}_i^n + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1,j}) \Delta t. \quad (15)$$

步 3 检查速度和压力场是否收敛, 通常只检查速度就足够了, 收敛准则如下:

$$\frac{|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|}{1 + |\mathbf{u}^{n+1}|} < \varepsilon, \quad (16)$$

其中 ε 是一个小误差容许值, 通常取 10^{-6} . 如果收敛则跳到下一个时间步, 否则返回步 1 并进行下一次迭代直至收敛.

4 数值算例

坝溃问题常用来测试求解自由面问题的算法. 文献[10]中总结了大量的实验数据. 本文中同样的参数, 模拟了二维矩形区域和三维圆柱形区域下的时间历程, 并将流体流到的最前端以及剩余流体高度和实验结果进行了比较和分析.

4.1 二维矩形区域

设二维水柱初始长为 a , 高为 $n^2 a$, 假设固壁为无滑移边界条件. 在液面的上部和右边给定压力边界条件. 在 0 时刻, 最右边突然撤去支撑, 之后水柱沿着地面流下来, 此处计算了 5 种工况, 见表 1.

表 1 二维矩形坝溃问题 5 种不同计算工况 (cm)

n^2	1	1	2	2	4
a	5.715	11.43	2.857 5	5.715	2.857 5

设 z 是水流流到的最前端与初始时刻的距离, η 是剩余水柱的高度, g 为重力加速度, t 为时刻. 此种尺度下可假设流体运动受粘性和表面张力影响较小, 可以取如下无量纲参数:

$$Z = z/a, H = \eta/\sqrt{an^2}, T = nt\sqrt{g/a}, \tau = t\sqrt{g/a}.$$

将计算得到的数据无量纲后和实验数据的比较如图 1 所示, 图中实线为计算结果, 标记的符号为实验值, 不同符号表示的工况在图中标出. 需要注意的是由于实验中得不到精确的运动的初始时刻, 所以实验数据中在给定的位置 Z^* , 规定了一个时刻 T^* , 所以最后得到的计算结果需要根据 T^* 和 Z^* 进行相应的平移.

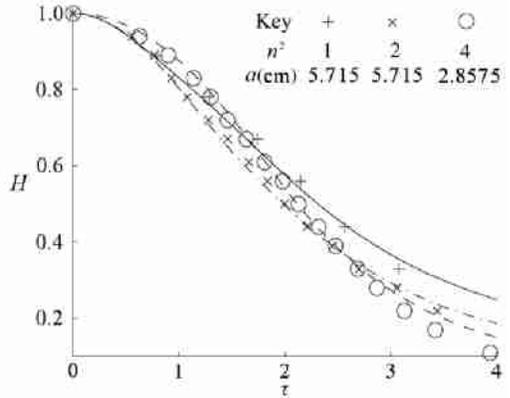
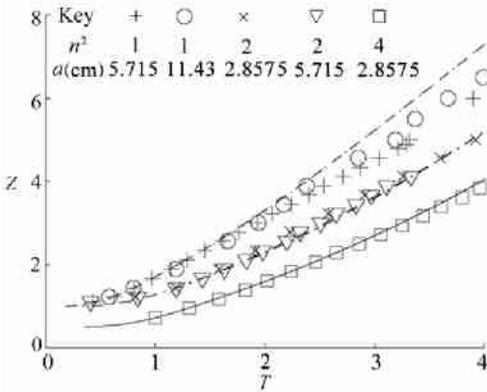


图 1 矩形区域的不同时刻液体流过距离

图 2 矩形区域的不同时刻剩余液体高度

注 在 $n^2 = 4$ 时, 图 1 中画出的是 $T/2$ 时刻对应的 $Z/2$, 即横纵坐标都压缩了 1 倍.

从图 1 中可以看出:

- 1) 在相同的 n^2 下, 实验得到的 T 和 Z 差别很小, 计算得到的结果更是如此;
- 2) 在流体流过距离不超过水柱原宽度的 3 倍时, 即图 1 中 $Z < 3$ 时, 计算得到的结果和实验结果十分吻合. 也验证了 LSFEM 在二维自由面问题中应用的能力;
- 3) 流体流出距离超过水柱原宽度的 3 倍后, 结果开始有所偏差, 但随 n^2 不同表现也不同. n^2 较小($= 1$) 时偏差大, n^2 大($= 2, 4$) 时偏差较小. 分析认为是由流体的粘性和表面张力引起的. 因为随着流体流的越来越远, 流体会变得越来越薄, 此时的表面张力和粘性的影响会逐渐增强, 使得流体流速减缓. $n^2 = 1$ 时的实验数据也提供了例证. 从图 1 中可以看出, $Z > 3$ 后, 原宽度为 5.715 cm, 图中标记为 + 的区域, 其无量纲流出距离渐渐小于原宽度为 11.43 cm, 图中标记为 ° 的区域. 这是因为宽度越小最后形成的液体越薄.

再将计算得到的剩余液面高度与实验值进行对比如图 2 所示.

此部分结果与实验数据基本吻合, 但比较图 1 误差较大. 这是因为在同样的时刻, 无量纲化后, 液体流过距离的量级比剩余液体的高度的量级大, 所以液体高度的测量的误差要比流过距离的误差大. 从实验数据中可以读出, 流体流过距离的值总在平均值附近, 而液体高度的值与平均值的差别是前者的 5 倍左右. 误差较大的另一点原因是, 在实验数据中, 有不少时刻只测了一组值. 而流体流过距离, 每种工况都测量了 4~ 8 组数据.

大约在 $\tau > 2.5$ 后, 计算得到的高度值比实验值要大, 这也是由于表面张力和粘性造成的. 图 3 长为 $a = 5.715$ cm, $n^2 = 1$ 时在 $0.5T, T, 1.5T, 2T, 2.5T, 3T$ 时刻的压力等值线. 可以看出, 在后面的时刻, 流体已经极其薄, 此时流体网格的长宽比也变得非常大, 但 LSFEM 仍然得到了稳定的结果.

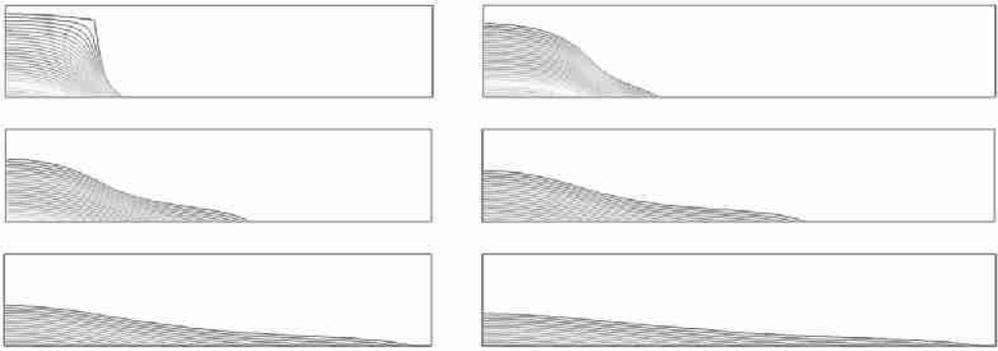


图3 矩形区域的 $0.5T, T, 1.5T, 2T, 2.5T, 3T$ 时刻的自由面形状和压力等值线

4.2 三维圆柱形区域

圆柱形液柱初始半径为 a , 高为 $n^2 a$, 假设地面为无滑移边界条件. 在液柱的上部和周围给定压力边界条件. 在 0 时刻撤去周边的支撑, 之后水柱沿着地面流下来. 由于问题为轴对称, 实际计算中取圆柱的 $1/4$, 此处计算了两种工况, 见表 2.

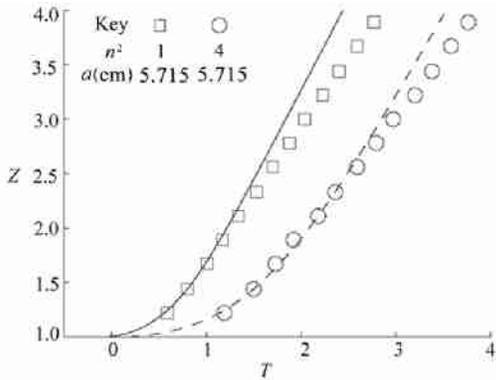


图4 圆柱区域的不同时刻液体流过距离

表2 三维圆柱形坝溃问题两种不同计算工况 (cm)

n^2	1	2
a	5.715	5.715

计算得到的流过距离与实验值的比较如图 4 所示.

从图 4 中可以看出:

1) 在流体流出距离不超过初始水柱半径的 2 倍, 即 $Z < 2$ 时, 计算得到的结果和实验结果十分吻合. 也验证了 LSFEM 在三维自由面问题中应用的能力.

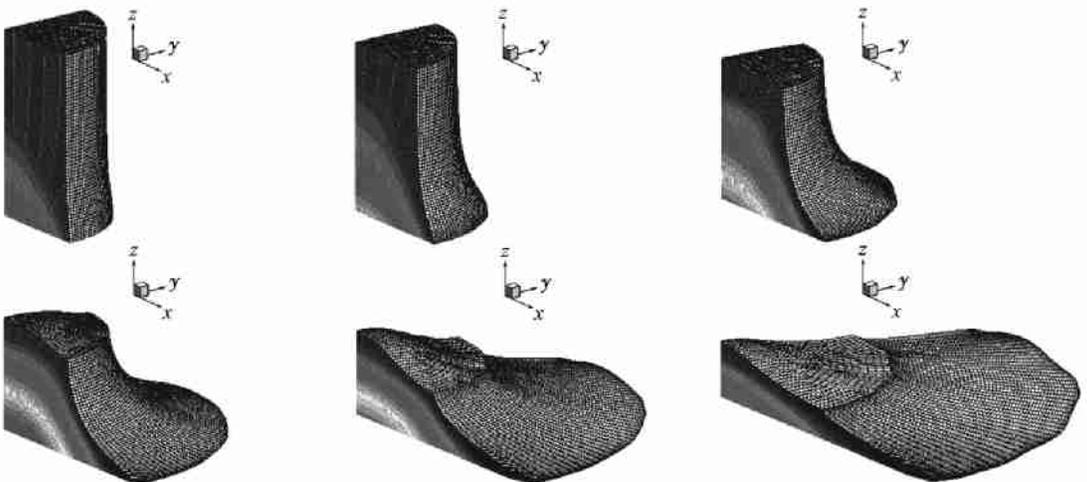


图5 圆柱形区域 $0.5T, T, 1.5T, 2T, 2.5T, 3T$ 时刻的自由面形状和压力等值线

2) $Z > 2$ 后, 计算值明显偏离实验值. 原因和二维情形类似.

图 5 给出了 $a = 5.715 \text{ m}$, $n^2 = 2$ 工况下液体在 $0.5T, T, 1.5T, 2T, 2.5T, 3T$ 时刻的压

力等值线.

5 结 论

本文用最小二乘有限元模拟了坝溃算例并和实验值进行了对比.

最小二乘有限元最吸引人的地方在于它的内秉稳定性. 它可以直接用来求解一大类流动问题而无须特殊处理, 譬如本文的算例, 在网格变形十分大的情况下仍然可以得到稳定可信的结果.

最小二乘有限元的另一个特性是它生成矩阵为对称正定, 可用许多鲁棒的算法, 譬如预处理共轭梯度法来求解.

最小二乘有限元的一个问题是质量守恒, 一个简单的提高质量守恒的方法是提高连续方程在泛函中的权重, 计算表明, 对于二维问题, 10 倍权系数, 三维问题选择 50 倍权系数可以得到较好的结果. 本文中计算得到的质量误差, 对于二维问题最大为 0.3%, 对于三维问题最大为 0.6%.

最小二乘有限元的另一个问题是其计算量比分步法大. 因为最小二乘有限元中所有变量一起求解. 再加上辅助变量, 譬如三维情况下需要求解 7 个变量而分步法中仅需要 1 个. 幸运的是, 最小二乘有限元生成矩阵的对称正定性, 使之可用较高效的算法来补救.

[参 考 文 献]

- [1] 吕敬, 李俊峰, 王天舒. 带弹性附件充液矩形贮箱俯仰运动动态响应[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(3): 317-327.
- [2] Codina R. Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 2001, **170**(1): 112-140.
- [3] Jiang B N. The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics [M]. Berlin: Springer, 1998.
- [4] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers[J]. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 1974, **8**(2): 129-151.
- [5] Guermont J L, Quartapelle L. On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1998, **26**(3): 1039-1053.
- [6] Hataishi M, Hatanaka K, Kawahara M. Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1991, **13**(7): 805-840.
- [7] Oliver K H. Least-squares methods for the solution of fluid-structure interaction problems[D]. Germany: TU Braunschweig, 2006.
- [8] Chang C L, Nelson J J. Least-squares finite element method for the Stokes problem with zero residual of mass conservation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997, **34**(2): 480-489.
- [9] Deang J M, Gunzburger M D. Issues related to least-squares finite element methods for the Stokes equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, **20**(3): 878-906.
- [10] Martin J C, Moyce W J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser A, Mathematical and Physical Sciences, 1952, **244**(882): 312-324.

Viscous Flow With Free Surface Motion by Least Square Finite Element Method

TANG Bo, LI Jun-feng, WANG Tian-shu

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R. China)

Abstract: A method for simulation of free surface problems is presented. Based on the viscous incompressible Navier-Stokes equations, the space discretization of the flow was obtained by least square finite element method and the time evolution was obtained by finite difference method. Lagrangian description was used to track the free surface. The results here were compared with experimental dam break results, including water collapse in 2D rectangular section and in 3D cylinder section. Good agreement was achieved for the distance of surge front as well as the height of residual column.

Key words: incompressible viscous fluid; Lagrangian description; least square finite element method; dam break experiment