文章编号: 1000-0887(2008) 07-0877-06

新椭球的一些性质*

沈亚军[1], 袁 俊[2]

(1. 上海大学 理学院 数学系, 上海 200444;
2. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210097)

(周哲玮推荐)

摘要: 首先讨论了当多胞形的新椭球是球的充要条件, 然后对算子 Gamma(-2) 的性质进行了探讨, 得出了一些相关的不等式.

关 键 词: 新椭球; 多胞形; 单调性
中图分类号: O186.5 文献标识码: A

引 言

众所周知, 对每一个 R^n 中的凸集, 存在唯一的一个椭球, 它关于 R^n 的中的一维子空间的转动惯量与凸集本身的转动惯量相等, 我们称这一椭球为凸集的 Lengendre 椭球. Lengendre 椭球和它的极(称为 Binet 椭球) 是经典力学中的两个重要概念[1-3].

与 Brunn-Minkowski 理论相比较, 对偶 Brunn-Minkowski 理论的发展则要晚很多. 一个自然的问题是, 在对偶 Brunn-Minkowski 理论下, 是否存在与经典的 Legendre 椭球类似的对偶几何体? 这种对偶几何体有哪些值得关注的性质? 运用 L_p 曲率理论[4-5], Lutwak, Yang 和 Zhang 发现了新椭球 $\Gamma_{-2}K$, 而且证明了一些关于 $\Gamma_{-2}K$ 的漂亮而深刻的结论[6-7].

用 $V(K)$ 表示 n 维欧氏空间 R^n 中的凸体 K 的体积, $\Gamma_{-2}K$ 表示凸体 K 对应的新椭球(其定义由 Lutwak, Yang 和 Zhang 给出). 本文将进一步研究新椭球 $\Gamma_{-2}K$ 的性质, 给出当多胞形的新椭球是球的一个充要条件, 主要结论是:

定理 1 设 P 是 R^n 中的多胞形且以原点作为其内点, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 是它的各个面的单位外法向量, 若 a_i 和 h_i 分别表示对应于单位外法向量为 $\boldsymbol{u}_i$ 的各个面的面积以及原点到该面的距离, 记 $\sum_{i=1}^{N}(a_i/h_i)=\lambda$, 那么 $\Gamma_{-2}K$ 是球当且仅当

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_i)^2\frac{a_i}{h_i}=\frac{\lambda}{n}$$

对所有的 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 成立.

一般而言, $\Gamma_{-2}K\subseteq\Gamma_{-2}L$ 并不意味着 $V(K)\leqslant V(L)$, 但若 $K\in Z^*_{-2}$(其中 $Z^*_{-2}=$

* 收稿日期: 2007-07-06; 修订日期: 2008-05-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671117; 30771709); 浙江省教育厅科研基金资助项目(20070935)
作者简介: 沈亚军(1965—), 男, 湖南永州人, 副教授, 博士生(联系人. E-mail: syjun168@sina.com).

$\{\Gamma^{*}_{-2}K: K\in\mathscr{K}^n_o\}$) 时, 算子 Γ_{-2} 的单调性可以得到保证, 即

定理 2 设 $K\in Z^{*}_{-2}, L\in\mathscr{K}^n_o$. 如果 $\Gamma_{-2}K\subseteq\Gamma_{-2}L$, 那么

$V(K)\leqslant V(L)$.

1 概念和预备知识

用 $\mathscr{K}^n$ 表示欧氏空间 R^n 中的凸体(紧的且具有非空内点的凸集). $\mathscr{K}^n_o$ 代表 $\mathscr{K}^n$ 中包含原点作为其内点的子集, ω_n 表示 R^n 中的单位球 B_n 的体积, S^{n-1} 表示 R^n 中的单位球面. 如果 $K\in\mathscr{K}^n$, 那么它的支撑函数 $h_K = h(K,\cdot): R^n\to(0,\infty)$, 定义为

$$h(K,\boldsymbol{u}) = \max\{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}): \boldsymbol{x}\in K\},\qquad \boldsymbol{u}\in S^{n-1}, \tag{1}$$

这里的 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的标准内积, $h(K,\boldsymbol{u})$ 有时也写作 $h_K(\boldsymbol{u})$. 如果 K 是一个星体且包含原点作为其内点, 那么它的径向函数 $\rho(K,\cdot)$ 定义为

$$\rho(K,\boldsymbol{u}) = \max\{\lambda\geqslant 0: \lambda\boldsymbol{u}\in K\}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$.

凸体 $K\in\mathscr{K}^n_o$, 则 K 的极 K^* (见文献[8])定义为

$$K^* := \{\boldsymbol{x}\in R^n \mid (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\leqslant 1, \boldsymbol{y}\in K\}. \tag{3}$$

如果 $K\in\mathscr{K}^n_o$, 由支撑函数、径向函数和极体的定义可得

$$h_{K^*} = 1/\rho_K \text{ 及 } \rho_{K^*} = 1/h_K. \tag{4}$$

对 $K, L\in\mathscr{K}^n$ 和 $\varepsilon>0$, 它们的 Firey L_2- 组合 $K+_2\varepsilon\cdot L$ 是一个凸体, 其支撑函数可以定义为[5-6]

$$h(K+_2\varepsilon\cdot L,\cdot)^2 = h(K,\cdot)^2 + \varepsilon h(L,\cdot)^2. \tag{5}$$

对 $K, L\in\mathscr{K}^n$, K 和 L 的 L_2- 混合体积 $V_2(K,L)$ 定义为

$$\frac{n}{2}V_2(K,L) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(K+_2\varepsilon\cdot L)-V(K)}{\varepsilon}. \tag{6}$$

这一极限的存在性由 Lutwak 给出[4]. Lutwak 在文献[4]中还证明了对每一个以原点为对称中心的凸体, 相应地存在一个定义在 S^{n-1} 上的正的 Borel 测度 $S_2(K,\cdot)$, 使得

$$V_2(K,Q) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_Q(\boldsymbol{v})^2\,\mathrm{d}S_2(K,\boldsymbol{v}). \tag{7}$$

对每一个 $Q\in\mathscr{K}^n$ 成立.

文献[5]中, Lutwak 又证明了 $S_2(K,\cdot)$ 对经典的表面积测度 S_K 是绝对连续的, 并有 Radon-Nikodym 导数

$$\frac{\mathrm{d}S_2(K,\cdot)}{\mathrm{d}S_K} = \frac{1}{h_K}. \tag{8}$$

对 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$, 凸体 K 的新椭球 $\Gamma_{-2}K$ 定义为[6]

$$\rho^2_{\Gamma_{-2}K}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(K)}\int_{S^{n-1}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2\,\mathrm{d}S_2(K,\boldsymbol{v}). \tag{9}$$

设 P 是 R^n 中的多胞形并以原点作为其内点, $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^N$、$\{a_i\}_{i=1}^N$ 及 $\{h_i\}_{i=1}^N$ 的定义同定理 1, 那么, $S_2(P,\cdot)$ 的测度集中在点 $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_N\in S^{n-1}$, 且 $S_2(P,\boldsymbol{u}_i) = a_i/h_i$, 因此, 对多胞形 P, 当 $\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$ 时,

$$\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(P)}\sum_{i=1}^N(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_i)^2\frac{a_i}{h_i}. \tag{10}$$

设$K, L \in \mathscr{K}_o^n$, 在L_2空间中, 仍有经典的Minkowski不等式

$$V_2(K, L) \geqslant V(K)^{(n-2)/n} V(L)^{2/n}, \tag{11}$$

等号成立当且仅当K是L的一个压缩.

设K、L是一个星体, 由K和L的对偶混合体积可以定义为[4]

$$V_{-2}(K, L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n+2}(\boldsymbol{v})\rho_L^{-2}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S\boldsymbol{v}. \tag{12}$$

对K和L的对偶混合体积, 又有以下基本的不等式:

$$V_{-2}(K, L) \geqslant V(K)^{(n+2)/n} V(L)^{-2/n}, \tag{13}$$

等号成立当且仅当K是L的一个压缩. 这一不等式可由Hölder不等式和式(12)直接推出.

2 多胞形的一个性质

本节我们首先给出多胞形的新椭球是球时的一个性质, 然后再建立一个相关的不等式.

定理 2.1 如果P是R^n中的多胞形, 且以原点作为其内点, $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^N$、$\{a_i\}_{i=1}^N$、$\{h_i\}_{i=1}^N$及$\lambda$的定义同定理1, 那么$\Gamma_{-2}P$是球当且仅当

$$\sum_{i=1}^N (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_i)^2 \frac{a_i}{h_i} = \frac{\lambda}{n} \tag{14}$$

对任意的$\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$成立.

证明 如果式(14)成立, 那么由定义式(10), 对所有的$\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$,

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^2(\boldsymbol{u}) = \frac{\lambda}{nV(P)},$$

这就意味着$\Gamma_{-2}P$是一个球.

反之, 若$\Gamma_{-2}P$是一个球, 则必定存在一个实数R, 使得

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^2(\boldsymbol{u}) = R \tag{15}$$

对所有的$\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$成立.

在式(10)中分别取$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i (i = 1, \cdots, n)$, 并将所有的不等式相加可得

$$nR = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l} = \frac{\lambda}{V(P)}. \tag{16}$$

结合式(15)和(16), 即得式(14), 证毕.

定理 2.2 在定理2.1的条件下,

$$V(\Gamma_{-2}P) \geqslant \omega_n\left(\sum_{i=1}^N (h_i a_i)\Big\backslash\lambda\right)^{n/2},$$

等号成立当且仅当$\Gamma_{-2}P$是一个球.

证明 不失一般性, 设$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$为$n$维空间的一组单位正交向量, P一个多胞形, 它对应的新椭球$\Gamma_{-2}P$的中心在坐标原点, 它的n个轴与$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$的方向一致(习惯上称这一位置为椭球的标准位置), 那么

$$V(\Gamma_{-2}P) = \omega_n \rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_1)\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_2)\cdots\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_n). \tag{17}$$

由$\Gamma_{-2}P$的定义知

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^2(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^N (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l},$$

因而

$$\sum_{1}^{n}\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_i)=\frac{1}{V(P)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l}=$$

$$\frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l}.$$

由于 $\|\boldsymbol{u}_l\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}_l)^2=1$，所以

$$\sum_{1}^{n}\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_i)=\frac{\lambda}{V(P)}.\tag{18}$$

由算术几何平均不等式得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_i)}{n}\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_1)\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_2)\cdots\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_n)}}$$

即

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_1)\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_2)\cdots\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_n)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(\rho^2_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_i))\Big\backslash n\right)^{-n/2},$$

等式成立当且仅当 $\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_1)=\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_2)=\cdots=\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_n)$，即 $\Gamma_{-2}P$ 是一个球.

由式(17)和(18)可得

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_1)\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_2)\cdots\rho_{\Gamma_{-2}P}(\boldsymbol{e}_n)\geqslant\left(\frac{nV(P)}{\lambda}\right)^{n/2},$$

从而

$$V(\Gamma_{-2}P)\geqslant\omega_n\left(\frac{nV(P)}{\lambda}\right)^{n/2}.$$

对于多胞形 P，其体积可表示为

$$V(P)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}h_ia_i,$$

所以

$$V(\Gamma_{-2}P)\geqslant\omega_n\left(\sum_{i=1}^{N}(h_ia_i)\Big\backslash\lambda\right)^{n/2},$$

等号成立当且仅当 $\Gamma_{-2}P$ 是一个球，证毕.

3 算子 Γ_{-2} 的单调性

用 Z^*_{-2} 表示如下中心对称的凸体：$Z^*_{-2}=\left\{\Gamma^*_{-2}K:K\in\mathscr{K}^n_{\mathrm{o}}\right\}$．本节我们将给出 Γ^*_{-2} 在 Z^*_{-2} 中的单调性的证明，主要结论是：

定理 3.1 设 $K,L\in\mathscr{K}^n_{\mathrm{o}}$．如果 $\Gamma_{-2}K\subseteq\Gamma_{-2}L$，那么

$$\frac{V_2(K,Q)}{V(K)}\geqslant\frac{V_2(L,Q)}{V(L)}\tag{19}$$

对所有 $Q\in Z^*_{-2}$ 成立.

证明 由积分表示式(7)、定义式(10)及 Fubini's 定理可得

$$\frac{V_2(K,\Gamma^*_{-2}L)}{V(K)}=\frac{V_2(L,\Gamma^*_{-2}K)}{V(L)}.\tag{20}$$

因为 $Q\in Z^*_{-2}$，那么一定存在 $M\in\mathscr{K}^n_{\mathrm{o}}$，使得 $Q=\Gamma^*_{-2}M$．由式(20)得

$$\frac{V_2(K,Q)}{V(K)}=\frac{V_2(K,\Gamma^*_{-2}M)}{V(K)}=\frac{V_2(M,\Gamma^*_{-2}K)}{V(M)},\tag{21}$$

同理

$$\frac{V_2(L,Q)}{V(L)}=\frac{V_2(M,\Gamma^*_{-2}L)}{V(M)}\tag{22}$$

因 $\Gamma_{-2}K\subseteq\Gamma_{-2}L$, 所以 $\Gamma^*_{-2}K\supseteq\Gamma^*_{-2}L$, 也即

$$h_{\Gamma^*_{-2}K}(\boldsymbol{u})\geqslant h_{\Gamma^*_{-2}L}(\boldsymbol{u}),\qquad 对所有的\ \boldsymbol{u}\in S^{n-1}\ 成立.$$

由式(7), 可得

$$V_2(M,\Gamma^*_{-2}K)\geqslant V_2(M,\Gamma^*_{-2}L),$$

联系式(21)和(22)得式(19), 证毕.

推论 3.2 设 $K\in Z^*_{-2}$, $L\in\mathscr{K}^n_o$. 如果 $\Gamma_{-2}K\subseteq\Gamma_{-2}L$, 那么

$$V(K)\leqslant V(L).$$

证明 因为 $K\in Z^*_{-2}$, 在式(19)中取 $Q=K$, 由式(11)可得

$$1\geqslant\frac{V_2(L,Q)}{V(L)}\geqslant\frac{V(K)^{(n-2)/n}V(L)^{2/n}}{V(L)}$$

即

$$V(L)\geqslant V(K).$$

定理 3.3 设 $K,L\in\mathscr{K}^n_o$. 若对所有的 $Q\in\mathscr{K}^n_o$ 有 $V_2(K,Q)\leqslant V_2(L,Q)$, 那么

(i) $$\frac{V(\Gamma_{-2}K)^{2/n}}{V(K)}\geqslant\frac{V(\Gamma_{-2}L)^{2/n}}{V(L)};\tag{23}$$

(ii) $$\frac{V(\Gamma^*_{-2}K)^{-2/n}}{V(K)}\geqslant\frac{V(\Gamma^*_{-2}L)^{-2/n}}{V(L)},\tag{24}$$

每一个等号成立的条件是当且仅当 $K=L$.

为证明定理 3.3, 我们首先引进如下引理:

引理 3.4[7] 若 $K,L\in\mathscr{K}^n_o$, 则

$$\frac{V_2(L,\Gamma_2K)}{V(L)}=\frac{V_{-2}(K,\Gamma_{-2}L)}{V(K)}.$$

定理 3.3 的证明

(i) 因为对所有的 $Q\in\mathscr{K}^n_o$ 有 $V_2(K,Q)\leqslant V_2(L,Q)$, 取 $Q=\Gamma_2M$, 则对任何 $M\in\mathscr{K}^n$ 有

$$V_2(K,\Gamma_2M)\leqslant V_2(L,\Gamma_2M),\tag{25}$$

等号成立当且仅当 $K=L$.

由引理 3.4, 有

$$V(K)V_{-2}(M,\Gamma_{-2}K)\leqslant V(L)V_{-2}(M,\Gamma_{-2}L).\tag{26}$$

取 $M=\Gamma_{-2}L$ 由式(13)得

$$\frac{V(\Gamma_{-2}K)^{2/n}}{V(K)}\geqslant\frac{V(\Gamma_{-2}L)^{2/n}}{V(L)},\tag{27}$$

等式成立当且仅当 $\Gamma_{-2}K$ 与 $\Gamma_{-2}L$ 互为压缩.

由引理 3.4, 不等式(25)与(26)等价, "当且仅当 $K=L$"包含了式(27)中等号成立的条件, 由此我们得到式(23)中等式成立的条件.

(ii) 因为 $V_2(K,Q)\leqslant V_2(L,Q)$, 取 $Q=\Gamma^*_{-2}M$, 对任意的凸体 $M\in\mathscr{K}^n_o$, 有

$$V_2(K, \Gamma^*_{-2}M) \leqslant V_2(L, \Gamma^*_{-2}M), \tag{28}$$

等式成立当且仅当 $K = L$.

联系不等式(28)、等式(20),可得

$$V(K)V_2(M, \Gamma^*_{-2}K) \leqslant V(L)V_2(M, \Gamma^*_{-2}L).$$

取 $M = \Gamma^*_{-2}L$ 考虑式(11),又可得

$$\frac{V(\Gamma^*_{-2}K)^{-2/n}}{V(K)} \geqslant \frac{V(\Gamma^*_{-2}L)^{-2/n}}{V(L)}, \tag{29}$$

等式成立当且仅当 $\Gamma^*_2 K$ 与 $\Gamma^*_2 L$ 互为压缩.

由式(28)和(29)等号成立的条件,得式(24)中等号成立的条件是当且仅当 $K = L$, 证毕.

[参 考 文 献]

[1] Leichtweiß K. Affine Geometry of Convex Bodies[M]. Heidelberg: J A Barth, 1998.

[2] Lindenstrauss J, Milman V D. Local theory of normal spaces and convexity[A]. In: Gruber P M, Wills J M, Eds. Handbook of Convex Geometry[C]. Amsterdam: North-Holland, 1993, 1149-1220.

[3] Milman V D, Pajor A. Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space[A]. In: Lindenstrauss J, Milman V D, Eds. Geometric Aspect of Functional Analysis[C]. Springer Lecture Note in Math. **1376**(1). Berlin: Springer, 1989, 64-104.

[4] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory Ⅰ: Mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1993, **38**(9): 131-150.

[5] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory Ⅱ: Affine and geominimal surface areas[J]. Adv Math, 1996, **118**(2): 244-294.

[6] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. A new ellipsoid associated with convex bodies[J]. Duke Math J, 2000, **104**(3): 375-390.

[7] Yuan J, Si L, Leng G S. Extremum properties of the new ellipsoid[J]. Tamkang Journal of Mathematics, 2007, **38**(2): 159-165.

[8] Gardner R J. Geometric Tomography[M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, 20.

Several Properties of New Ellipsoids

SHEN Ya-jun[1], YUAN Jun[2]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P.R.China)

Abstract: The polytope whose new ellipsoid is a ball was first characterized. Furthermore, some properties for operator Gamma(−2) were proved and some inequalities were obtained.

Key words: new ellipsoid; polytope; monotonicity