

超声速钝锥湍流边界层 DNS 入口 边界条件的研究*

董明^{1,2}, 周恒¹

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 天津市现代工程力学重点实验室, 天津 300072)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 如何选取恰当的入口条件, 是进行湍流边界层直接数值模拟时必须考虑的一个问题. 为此建议了一种方法, 只需要有平板湍流边界层时间模式直接数值模拟(DNS)所得的一个瞬时的流场, 而且其 Mach 数、Reynolds 数及壁面温度条件无需和实际问题中的完全相同, 就可导出超声速钝锥湍流边界层空间模式直接数值模拟所需的入口条件. 通过 3 个典型算例, 将结果与用其它方法所得结果相比, 证实了该方法的可行性.

关键词: 湍流边界层; 直接数值模拟(DNS); 超声速; 钝锥; 入口条件

中图分类号: O357.5⁺2; O543.3 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 随着航空航天技术的发展, 可压缩锥体湍流边界层问题越来越受到人们的关注. 由于用实验方法无法提供流场的全部细节, 而且对超声速问题, 实验费用昂贵, 因此直接数值模拟(DNS)方法在湍流, 特别是超声速湍流的研究所起的作用越来越重要. 董明和罗纪生^[1-3]曾对超声速尖锥及钝锥边界层的转捩及湍流问题, 进行了空间模式下的直接数值模拟. Pirozzoli 等^[4]和李新亮等^[5]也对平板湍流边界层做了类似的工作. 他们的计算方法(以后称常规 DNS 方法)都是以层流解为基本流, 而在计算域的入口处引入有限幅值的扰动, 使之在下游触发转捩. 这种方法与自然转捩的物理过程相对应. 但因包含了转捩过程, 流向计算域较长, 大大增加了计算量.

如果研究的目的是湍流, 则包含转捩过程就不是必要的. 特别是如果要计算多种参数下的湍流, 则将转捩过程包含在内, 计算量将大得不可接受. 而且, 在采用常规 DNS 方法时, 计算最容易发散的地方正是转捩的 breakdown 阶段, 不包含该段可以使计算变得更加稳定.

常规 DNS 方法计算域的入口处为层流, 可以有多种方法给定其入口条件. 如果要直接从

* 收稿日期: 2008-06-16; 修订日期: 2008-06-24

基金项目: 国家自然科学基金重点基金资助项目(10632050); 国家自然科学基金重大研究计划项目(90716007); 全国博士学位论文作者专项基金资助项目(200328).

作者简介: 董明(1981—), 男, 辽宁人, 博士(Tel: +86-22-27403374; E-mail: dongm27890175@126.com); 周恒(联系人, Tel: +86-22-27890533; Fax: +86-22-27407025; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn).

湍流段开始计算,入口条件的给定是一个难题,迄今还不能说已很好解决。

Lund 等^[6]根据已有的湍流统计理论,建议了一种空间模式平板湍流边界层入口条件的选取方法。通过数值验证,发现由于入口条件不精确引起的调整阶段很短,因而是有效的。但该方法是针对不可压缩平板湍流边界层给出的,而可压缩湍流边界层的统计理论尚不完善,目前还无法推广应用。黄章峰和周恒^[7]基于 Mach 数为 4.5 的平板湍流边界层,提出一种新的空间模式 DNS 入口条件的选取方法。他们首先做了超声速平板湍流边界层时间模式的 DNS,然后仅利用了充分发展湍流的一个瞬时的流场,就导出了相同 Mach 数、Reynolds 数及壁面条件下空间模式 DNS 所需的入口条件。而且也只需很短距离的调整,就可得到充分发展湍流流场。他们还论证了可由同一时间模式流场,导出不同 Reynolds 数,但 Mach 数及壁面条件相同时空间模式 DNS 所需的入口条件。由于时间模式的计算量比空间模式小,这种给出空间模式湍流 DNS 入口条件的方法是很诱人的。

但是,对于锥体边界层,流向的周期性条件无法应用,因此甚至无法做时间模式的 DNS。上述方法是否能被推广应用显然不是一个简单的问题。

黄章峰和周恒^[7]在从时间模式的流场导出空间模式 DNS 所需的入口条件时,用了一个时空变换,其中所用的速度正是湍流边界层近壁区相干结构的平均传播速度。这隐含着只要在入口条件中能正确反映湍流相干结构的特性,就能较好地给定入口条件。如果湍流边界层的相干结构具有较大的普适性,则我们甚至能从平板边界层时间模式 DNS 所给的某一瞬时流场,导出锥体边界层空间模式 DNS 所需的入口条件。而且还可以期望,不同 Mach 数、Reynolds 数及壁面条件下所需的入口条件都可以从上述同一时间模式 DNS 结果中导出。

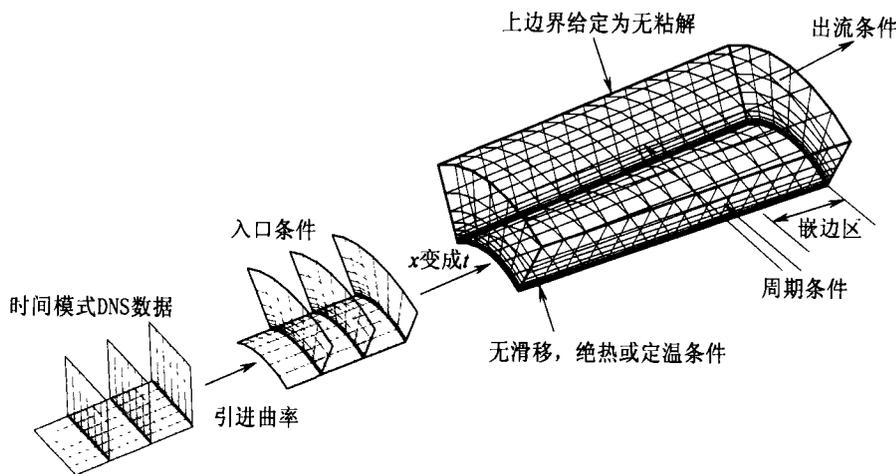


图1 入口条件的示意图

时间模式 DNS 所给的某一瞬时流场,包含了以下的基本信息,即平均流场及脉动流场。合理的空间模式 DNS 的入口条件,则应该满足以下条件:1) 入口的平均流场应尽可能接近真实的平均流场;2) 入口的脉动流场应尽可能反映真实的脉动流场。在从时间模式 DNS 所给的某一瞬时流场导出空间模式 DNS 所需入口条件时,第 1 个要求比较容易满足。而脉动流场中含有多种尺度的脉动,它们的传播速度不尽相同。如用同一个时空转换关系,显然不能同时反映不同尺度脉动进入 DNS 计算域的特性,而对不同尺度脉动采用不同时空转换关系显然也不可能。解决这一矛盾的办法,是选取一个能比较正确反映起主要作用的脉动部分传播特性的时空变换。而根据目前的理解,相干结构导致的脉动应是起主要作用的脉动,因而黄章峰等

人的时空变换中的速度就取相干结构传播的平均速度。结果是令人满意的。

以下我们就利用黄章峰和周恒^[7]对 Mach 数为 4.5 的平板湍流边界层所做的时间模式 DNS 的某一瞬时流场,导出我们所需的超声速锥体湍流边界层空间模式 DNS 所需的入口条件。

如图 1 所示,将所选的时间模式 DNS 所给出的某一瞬时流场,先在法向做一定的伸缩,使得边界层厚度与我们所研究的锥体湍流流场入口处的边界层厚度相同(即按当地边界层厚度算出的 Reynolds 数相同),并把直角坐标系下的解转换到锥体边界层所用的坐标系上。然后将流场分解为平均流场及脉动流场两部分。平均速度可直接加在空间模式 DNS 计算域的入口处,热力学平均场(平均温度与平均密度)则要根据来流 Mach 数及壁面条件的不同而做相应的修改。脉动部分则经适当的时空变换后和平均流一起加在入口处。由于边界层以外的无粘区域不含有脉动,因而边界层外缘的条件可直接给为层流解或无粘解。具体做法将在第 1 节中介绍。

本文通过 3 个具体算例(来流 Mach 数分别为 4.5、2.5 与 6,半锥角为 5°的超声速钝锥湍流边界层的直接数值模拟),实证了上述方法是有效的。

1 数值方法

除了入口边界条件,本文的计算方法与文献[2]相同,坐标系为贴体坐标系 (x, y, θ) ,其中 x 为沿任一母线的坐标,其原点位于与我们的钝锥对应的尖锥顶点, y 为锥面法向的坐标,均以锥的球头半径无量纲化, θ 为周向角坐标。各物理量以激波外均匀来流处的值无量纲化。下面介绍入口条件的选取方法。

1.1 时间模式湍流剖面的压缩与展向坐标的对应

首先,我们需要把已知的平板时间模式湍流剖面,在法向做伸缩,使得边界层厚度与我们所要研究的空间模式钝锥湍流场入口处的边界层厚度(这个厚度需要由层流解来估算)相同,并把直角坐标系下的流场转换到钝锥边界层所用的坐标上去。

为了方便,下面用变量 X 来表示流场中的各物理量,包括密度 ρ 、流向速度 u 、法向速度 v 、展向速度 w 、温度 T 与压力 p 。

记某一时刻的时间模式 DNS 所得湍流流场变量为 $\hat{X}_T(\xi, \eta, \zeta)$,其中, ξ, η, ζ 分别为直角坐标系下的流向、法向与展向坐标,它以其边界层外缘处的值无量纲化。它们可分解为平均值和与脉动量,即 $\hat{X}_T(\xi, \eta, \zeta) = \bar{X}_T(\eta) + \hat{X}'_T(\xi, \eta, \zeta)$,其中字母顶上的横杠“-”表示对 ξ, ζ 的平均,上角“'”表示脉动量。可以求出该流场对应的边界层名义厚度,记为 $\hat{\delta}_T$ 。

我们可以用文献[2]的方法计算出钝锥边界层的层流解。在选定的湍流计算域入口处的层流解记为 $X_c(y)$,与之对应的边界层名义厚度记为 δ_c 。

假定流体在计算域入口处之前刚刚完成转换,则在计算域的入口处已是湍流。把空间模式钝锥湍流场入口处的物理量记为 $X_T(y, \theta, t)$,它们也可写成其对 θ, t 的平均值与脉动量之和,即 $X_T(y, \theta, t) = \bar{X}_T(y) + X'_T(y, \theta, t)$,并把其边界层名义厚度记为 δ_T 。我们可以用上面提到的 δ_c 来估算 δ_T 。令

$$\delta_T = k_\delta \delta_c. \quad (1)$$

唐洪涛^[8]在对不可压边界层转换的研究中发现,在转换的 breakdown 过程结束后,湍流边界层的名义厚度一般会是转换前层流边界层厚度的 2~3.5 倍。因此一般可在此范围内选取 k_δ 的值。

由时间模式 DNS 所得湍流剖面 \hat{X}_T , 可根据其所具有的相似性令其在 η 方向伸缩, 以使其边界层名义厚度与 δ_T 相同. 然后, 我们需要把直角坐标系下所得的平板时间模式数据, 转换到计算锥体边界层所用的坐标上去. 最简单的做法就是二者法向坐标直接一一对应, 即令 $\eta = y$, 而展向坐标 ζ 则与钝锥的周向角坐标 θ 相对应, 原则是锥面上的单位周向弧长与平板单位展向长度相等, 即 $\zeta = x_0 \sin \alpha \cdot \theta$, 其中 x_0 为钝锥湍流计算域入口处的流向坐标, α 为钝锥的半锥角.

还应注意, 在计算钝锥边界层时, 我们把各物理量的无量纲化参考值取为它们在激波外的均匀来流中的值, 因而边界层外缘处各物理量的无量纲值不等于 1. 而就平板边界层来说, 无量纲化参考值既是均匀来流之值, 又是边界层外缘之值, 因而边界层外缘处各物理量的无量纲值等于 1. 因此要用 \hat{X}_T 做为入口条件, 就需要把 \hat{X}_T 的值先按比例做一定的放缩. 即令

$$\bar{X}_T(\xi, y, \theta) = k_u \hat{X}_T(\xi, (\hat{\delta}_T / \delta_T) y, x_0 \sin \alpha \cdot \theta), \quad (2)$$

其中, k_u 应为边界层外缘处钝锥层流解 X_c 与平板湍流解 \hat{X}_T 的比值. 即对应于 $\bar{\rho}_T, \bar{u}_T, \bar{v}_T, \bar{w}_T, \bar{T}_T, \bar{p}_T, k_u$ 应分别取 $\rho_c(\delta_T) / (\hat{\rho}_T(\hat{\delta}_T)), u_c(\delta_T) / (\hat{u}_T(\hat{\delta}_T)), v_c(\delta_T) / (\hat{v}_T(\hat{\delta}_T)), w_c(\delta_T) / (\hat{w}_T(\hat{\delta}_T)), T_c(\delta_T) / (\hat{T}_T(\hat{\delta}_T)), p_c(\delta_T) / (\hat{p}_T(\hat{\delta}_T))$. 修正后的湍流场仍可以写成其对 ξ, θ 的平均值与脉动量的和的形式如: $\bar{X}_T(\xi, y, \theta) = \bar{X}_T(y) + \bar{X}'_T(\xi, y, \theta)$.

1.2 入口处平均流场的选取

我们在上面将入口条件分解为平均量和脉动量, 是指望脉动量, 特别是其相干结构部分在一定范围内具有普适性. 而平均量虽没有普适性, 但却可以较容易地根据实际情况加以修正. 下面我们来介绍平均流场的修正方法.

考虑到无论是锥体, 还是平板; 无论是高 Mach 数, 还是低 Mach 数; 无论是定温壁面, 还是绝热壁面, 经过 Van Driest 变换的平均流向速度在近壁区都满足不可压流的缩壁面律^[24, 9-10], 而在边界层外区, 又都渐近地趋向于其边界层外之值. 也就是说, 湍流边界层内无量纲速度的分布规律又有一定的普适性. 因此边界层内的无量纲平均速度 $\bar{u}_T(y), \bar{v}_T(y), \bar{w}_T(y)$ 可由 1.1 节得到的修正解 $\bar{u}_T(y), \bar{v}_T(y), \bar{w}_T(y)$ 直接给出; 而这一边界层内的解则应与边界层外的层流解 $u_c(y), v_c(y), w_c(y)$ 光滑连接. 因而, 最终我们有

$$\begin{cases} \bar{u}_T = \bar{u}_T(1 - f((y - y_1)/(y_2 - y_1))) + u_c f((y - y_1)/(y_2 - y_1)), \\ \bar{v}_T = \bar{v}_T(1 - f((y - y_1)/(y_2 - y_1))) + v_c f((y - y_1)/(y_2 - y_1)), \\ \bar{w}_T = \bar{w}_T(1 - f((y - y_1)/(y_2 - y_1))) + w_c f((y - y_1)/(y_2 - y_1)), \end{cases} \quad (3)$$

其中, 过渡函数

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ (\tanh(7y - 4) + 1)/2, & 0 < y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

y_1, y_2 分别为边界层外的两个点, 且 $y_1 < y_2$. 公式(3)保证了平均速度在 $y = 0 \sim y_1$ 范围内为修正了的湍流剖面 \bar{X}_T , 在 $y > y_2$ 处为钝锥绕流的层流解 $X_c, y_1 \leq y \leq y_2$ 区域为过渡区.

若钝锥湍流边界层与 Mach 数及壁面温度条件与平板湍流边界层相同, 而後者的时间模式 DNS 结果是我们用以导出所需入口条件的, 则可以直接把平均温度与平均密度仿照上述给定速度的方法给出. 即

$$\begin{cases} \bar{T}_T = \bar{T}_T(1 - f((y - y_1)/(y_2 - y_1))) + T_c f((y - y_1)/(y_2 - y_1)), \\ \bar{\rho}_T = \bar{\rho}_T(1 - f((y - y_1)/(y_2 - y_1))) + \rho_c f((y - y_1)/(y_2 - y_1)). \end{cases} \quad (4)$$

但是,在 Mach 数与壁面温度条件不同的情况下,热力学平均量 $\bar{T}_T, \bar{\rho}_T$ 的值与 $\bar{T}_T, \bar{\rho}_T$ 会有较大差异,因而不能直接采用上述方法,而应考虑到壁面温度取一个尽可能接近于实际情况的平均温度或平均密度的分布。

对于平板湍流边界层,White^[11]曾建议这样的公式,其中把平均温度写成平均速度的单值函数。该公式曾多次经 DNS 结果验证^[4,10,12-13]。但在钝锥湍流边界层中,该公式计算出的平均温度比 DNS 结果低^[2-3]。考虑到绝热壁的壁面温度应该与来流总温相近,我们假设绝热壁温为 $T'_{aw} = T_e + u_e^2/(2c_p)$,下标 e 表示取边界层外缘处的值, c_p 为定压比热容。这样,仿照 White 的公式,我们给出平均温度的计算方法如下:

$$\bar{T}_T = T_w + (T'_{aw} - T_w)\bar{u}_T/u_e - \bar{u}_T^2/(2c_p), \quad (5)$$

其中, T_w 表示壁面温度值,若是绝热条件,则 $T_w = T'_{aw}$ 。

平均密度应该满足状态方程: $\bar{\rho}_T = (\bar{p}_T/R - \bar{\rho}'_T T'_T)/\bar{T}_T$,其中, R 为气体常数。又由湍流边界层方程可知 $\partial(\bar{p} + \overline{\rho v'^2})/\partial y = 0$,故有 $\bar{p}_T \approx p_c - \overline{\rho_T v_T'^2}$,则 $\bar{\rho}_T \approx (p_c/R - \overline{\rho_T v_T'^2}/R - \bar{\rho}'_T T'_T)/\bar{T}_T$ 。或进一步简化为

$$\bar{\rho}_T \approx p_c/(\bar{T}_T R). \quad (6)$$

在湍流边界层中,湍流脉动导致的输运起最主要的作用。只要脉动部分在入口处给对了,就应该很快地达到充分发展的湍流,平均量在入口处有一些误差,不至于有太大的影响。

1.3 入口处脉动流场的选取

将时间模式 DNS 所得某一瞬时脉动流场转换为空间模式入口处的脉动,需要知道时间模式的脉动向下游的传播速度。知道了传播速度,即可得到所需的时空变换。但不同尺度的脉动,其传播速度可能是不一样的,而且也很难将不同尺度的脉动完全分开。但和近壁处的相干结构对应的脉动是最重要的脉动,因此可以按照相干结构的传播速度加以转换,即令

$$t = \xi/c, \quad (7)$$

其中 c 为相干结构的平均传播速度,参照文献[7],选为 0.9。

另外,压力的瞬时值应满足状态方程 $p_T = \rho_T R T_T$ 。

2 数值结果

2.1 Mach 数为 4.5 的绝热壁钝锥湍流边界层

我们就取黄章峰和周恒的平板湍流边界层时间模式 DNS 的结果^[7],来导出钝锥湍流边界层空间模式 DNS 所需的入口条件。黄章峰和周恒的 DNS 中的参数为:来流 Mach 数为 4.5,壁面绝热条件。他们的计算域为 $L_x \times L_y \times L_z = 31.4 \times 40 \times 20.9$,计算网格数为 $N_x \times N_y \times N_z = 128 \times 256 \times 128$,网格宽度为 $\Delta x \times \Delta y_w^+ \times \Delta z = 0.245 \times 0.38 \times 0.164$,其中 $L_x, L_y, L_z, \Delta x$ 和 Δz 为以初始时刻的层流边界层排移厚度无量纲化,而 Δy_w^+ 为以壁面单位壁面度量的壁面处的法向网格宽度。

我们的钝锥的半锥角为 5° ,来流温度为 79 K,壁面处为绝热条件,基于锥头半径 R 与来流参数的 Reynolds 数 $Re = 10\,000$,计算域入口的位置为 $x = 844.3$ 。

本节共计算了3种工况,分别记为A、B与C. 它们的网格宽度均为 $\Delta x \times \Delta y_w^* \times \Delta \theta = 0.2R \times 0.12 \times 0.127^\circ$,法向计算域长度均为 $40R$,周向计算域为 16.3° ,以保证入口的壁面处计算域周向弧长与平板计算域展向宽度相同. 但是,它们的流向网格点数不同,湍流边界层初始厚度的选取也不同(即 k_δ 不同).

本节中,平均温度与平均密度可以通过两种方法来计算:1) 考虑在半锥角较小的情况下,除前缘附近外,激波较弱,这样,钝锥边界层外缘处的 Mach 数应与来流 Mach 数相差不大(经过计算我们发现,在来流 Mach 数 4.5,半锥角为 5° 的情况下,边界层外缘处的 Mach 数约为 4.28),因而我们认为钝锥和平板边界层内的流动变量分布是相近的,故我们可以直接选用式(4)得到 $\bar{\rho}$ 与 \bar{T} ;2) 用式(5)与(6)来计算 $\bar{\rho}$ 与 \bar{T} . 下面将比较两种方法的计算结果. 3种工况计算参数见表1.

表 1 3种工况的参数

工况	k_δ	$N_x \times N_y \times N_z$	平均温度与密度的计算方法
A	4.5	901 × 81 × 128	式(4)
B	2.5	901 × 81 × 128	式(4)
C	2.5	961 × 81 × 128	式(5)、(6)

速度与热力学变量的脉动量均按 1.1 节中的方法求得,即令

$$\{u'_T, v'_T, w'_T\} = \{\tilde{u}'_T, \tilde{v}'_T, \tilde{w}'_T\}, \tag{8}$$

$$\{\rho'_T, T'_T\} = \{\tilde{\rho}'_T, \tilde{T}'_T\}. \tag{9}$$

图2给出了3种情况下的壁面摩擦因数流向分布曲线,其中 $C_f = 2\bar{\mu}_w(\partial\bar{u}/\partial y)_w/(\rho_\infty u_\infty^2)$,下标 w 表示壁面处的值,下标 ∞ 表示来流中的值, μ 为粘性系数,由 Sutherland 公式确定. 由于计算域入口处3种情况的初始边界层厚度不同,故在入口附近,它们的壁面处的平均速度梯度不同,因而 C_f 的值也不同. 但是,随着向下流的演化,且3种工况中的 C_f 值逐渐靠近,特别是情况 B 和 C.

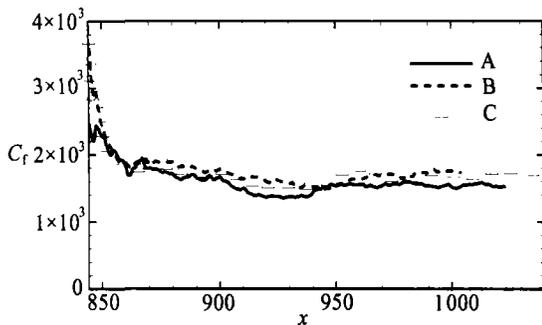


图 2 壁面摩擦因数曲线

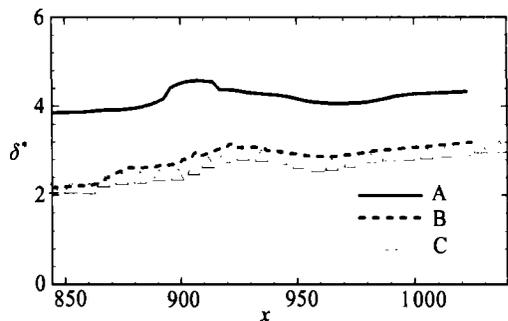


图 3 边界层排移厚度

图3给出3种工况下边界层排移厚度的流向分布曲线,其中 $\delta^* = \int_0^\delta (1 - \bar{\rho}u/(\rho_e u_e)) dy$,而 δ 则是边界层名义厚度. 可以看出,在 $x < 950$ 处,3种工况的边界层厚度增长不很规律,之后则均规则地增长,且分布曲线几乎平行. 由此可见,为达到充分发展湍流,流向调整区域的长度约为 100 个锥头半径. 公式(1)中 k_δ 的选取会影响最终湍流计算结果的边界层厚度,即 k_δ 的取值越大,计算得到的湍流边界层越厚. 可能有两个原因使得 k_δ 值不同. 一是如唐洪涛^[8]的结果所示,是由于触发转换的初始扰动不同. 二是可能转换发生的地方不同. 这些结

果都可被认为是合理的。工况 B 与 C 的差别是入口处的平均温度和平均密度的给定方法不同,但得到的 C_f 曲线与边界层厚度均非常接近,这说明使用公式(5)与(6)来计算平均温度与平均密度是可以的。

下面以工况 C 为例,分析湍流阶段物理量的平均剖面,其它工况的结果与其很接近,故从略。图 4 给出了 $x = 970$ 与 1030 两处位置的流向速度壁面律的法向分布。其中, y^+ 为壁面粘性长度, u_c^+ 为经过 Van Driest 变换的流向平均速度以壁面摩擦速度无量纲化的值(具体定义式见文献[10])。可以看出,两条曲线重合得很好,并都分别在 $y^+ \leq 8$ 与 $20 \leq y^+ \leq 200$ 范围内满足线性律 $u_c^+ = y^+$ 与对数律 $u_c^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.8$ 。这与文献[2-3]的结论相同,只是由于来流 Mach 数不同,对数律区域分布范围不同。

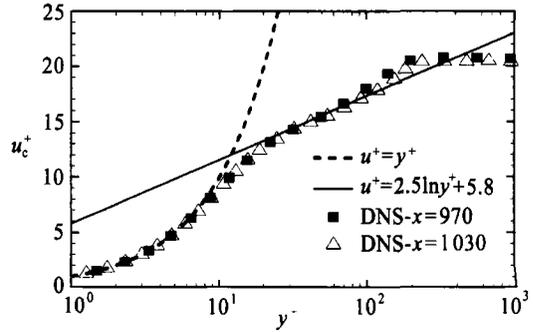
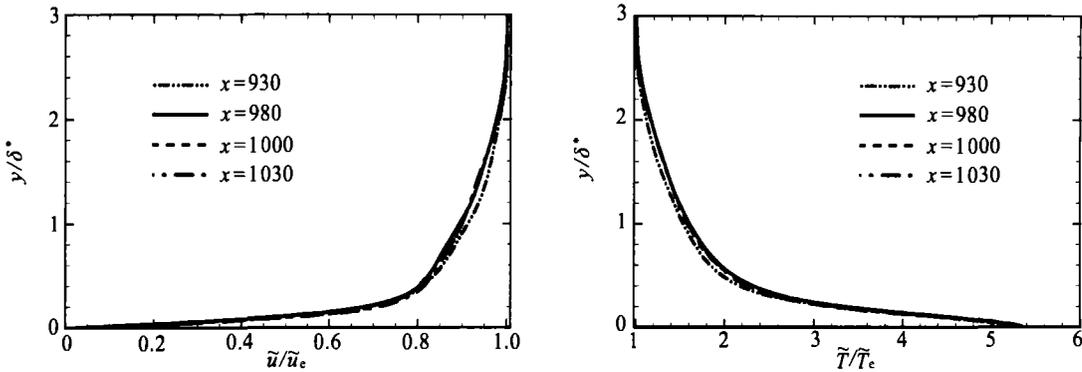


图 4 流向速度壁面律

由文献[2-3]可知,钝锥湍流边界层的平均流剖面是相似的。图 5 给出 C 工况下, $x = 930, 980, 1000$ 与 1030 处平均流剖面的法向分布图,其中图 5(a)为平均速度,图 5(b)为平均温度,它们均是采用 Favre 平均(具体定义式见文献[2]),且以边界层外缘处的值无量纲化,法向坐标以当地边界层排移厚度 δ^* 无量纲化。可以看出, $x = 980$ 以后的平均速度与平均温度剖面是相似的,而它们与 $x = 930$ 处的剖面有一定的差别。这是由于 $x = 930$ 处尚处于由于入口条件不完全合适的调整阶段,还不是充分发展的湍流。



(a) 平均速度

(b) 平均温度

图 5 湍流边界层中不同位置处的平均速度和温度剖面

从本节结果来看,我们采用的入口条件是可行的。下面还将对其它 Mach 数或壁面温度条件下的湍流边界层进行计算,并和传统 DNS 方法的结果做比较。

2.2 Mach 数为 2.5 的绝热壁钝锥湍流边界层

本节中,仍取同一锥上的湍流边界层为研究对象,壁面仍为绝热壁,来流温度不变,但 Mach 数变为 2.5, Reynolds 数变为 5000。结果将与文献[3]中用常规 DNS 方法所得结果比较。

仍从上节所用的流场数据导出所需的入口条件。但从 Mach 数为 4.5 的湍流流场导出 Mach 数为 2.5 的入口条件,不仅平均量需要修正,脉动量也需要修正。计算中,我们发现在壁面附近,采用公式(9)计算出的热力学脉动量的量级接近平均量,这样很容易导致计算发散。

由文献[2]与[3]可知,来流 Mach 数越高,热力学脉动量的均方根的值越大,暂且假设在一定范围内它们与 Mach 数成正比,则密度和温度脉动可按式修正:

$$\{\rho'_T, T'_T\} = \{\tilde{\rho}'_T, \tilde{T}'_T\} \cdot (Ma/\hat{Ma}), \tag{10}$$

其中, \hat{Ma} 为平板时间模式湍流数据的 Mach 数, Ma 为我们钝锥的来流 Mach 数.

对脉动速度做同样的修正,即

$$\{u'_T, v'_T, w'_T\} = \{\tilde{u}'_T, \tilde{v}'_T, \tilde{w}'_T\} \cdot (Ma/\hat{Ma}). \tag{11}$$

本节中共考虑了3种工况,分别记为 A、B、C. 它们的网格宽度分别为 $\Delta x \times \Delta y_w^+ \times \Delta \theta = 0.36R \times 0.49 \times (0.114^\circ, 0.102^\circ, 0.110^\circ)$, 法向计算域长度均为 $20R$, 周向计算域分别为 $14.6^\circ, 13.1^\circ, 14.0^\circ$. 公式(8)与(11)都试用了. 共计算了它们参数的差别见表 2.

表 2 3 种工况的参数

工况	入口位置 x	k_δ	网格 $N_x \times N_y \times N_z$	脉动速度 u, v, w 计算公式
A	1 001	3.5	921 × 66 × 128	式(8)
B	892	2.0	1 201 × 66 × 128	式(8)
C	965	2.0	1 021 × 66 × 128	式(11)

图 6 给出了壁面摩擦因数沿流向的分布曲线,其中实线为文献[3]的结果,标识为 A、B、C 的 3 条曲线分别为 3 种工况的计算结果. 和算例 1 相似,各工况计算出的 C_f 值在入口附近都有一个长度约为 $100R$ 调整过程,其后的值与常规方法计算的曲线一致. 图 7 给出了边界层排移厚度沿流向的分布曲线. 可以看出,在经过入口附近的调整后,各条曲线基本相互平行. 它们的厚度不同,或源于计算域入口处的边界层厚度初始值不同,因为 k_δ 的取值不同,或由于它们的入口位置不同.

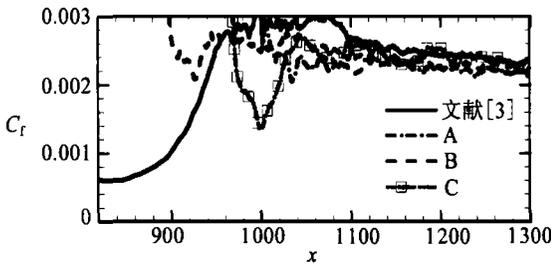


图 6 壁面摩擦因数

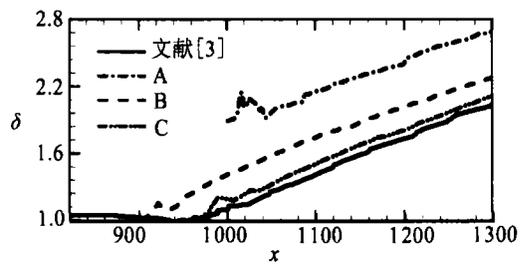


图 7 边界层排移厚度

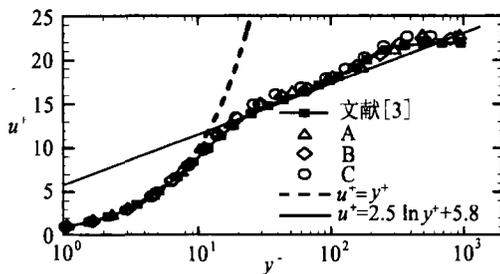


图 8 流向速度的壁面律

图 8 给出的是 $x = 1 288$ 处流向速度壁面律的对比,图中给出了文献[3]与本节 3 个工况的结果. 可以看出,4 条曲线的重合性很好,均在 $y^+ \leq 8$ 与 $20 \leq y^+ \leq 150$ 范围内满足线性律 $u_c^+ = y^+$ 与对数律 $u_c^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.8$.

图 9 给出 $x = 1 114$ 与 $1 214$ 处平均速度和温度的法向分布图. 图中包含了文献[3]与 A、B、C 3 种工况的计算结果,我们发现它们相互吻合,并都满足湍流剖面的相似性.

以上结果表明,本文所建议的导出入口条件的方法是可行的,且公式(8)与公式(11)都可用.

但显然,随着来流 Mach 数的增高或减少,脉动量的均方根值既不会无限增大,也不会无限变小,因而公式(11)也许应该加上非线性项,或至少其可用范围应限于一定的 Mach 数范围内。

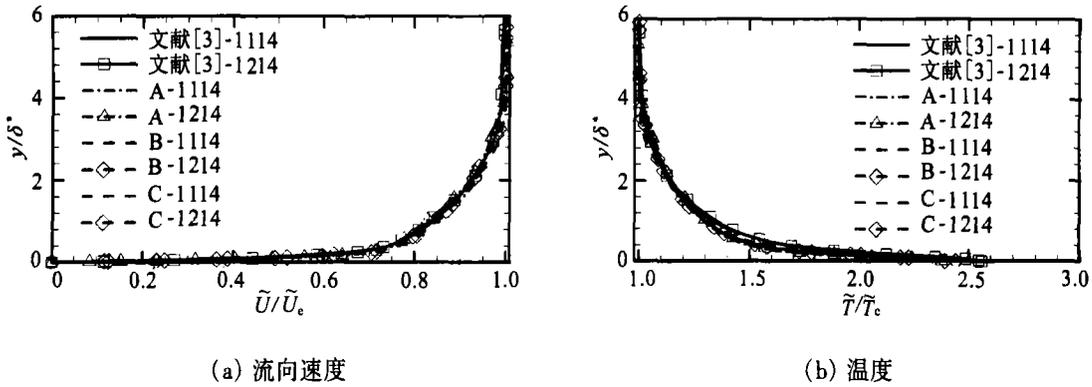


图9 平均流剖面的比较

2.3 Mach 数为 6 的定温壁钝锥湍流边界层

本节中,仍取 2.1 节中同一锥上的湍流边界层为研究对象,来流温度和 Reynolds 数不变,但 Mach 数变为 6,壁面变为定温壁,温度定为 294 K. 结果将与文献[2]中用常规 DNS 方法所得结果比较。

本节共计算了两种工况,法向计算域长度均为 $20R$,周向计算域分别为 $(14.3^\circ, 15.7^\circ)$,它们的计算网格宽度为 $\Delta x \times \Delta y^+ \times \Delta \theta = 0.4R \times 0.35 \times (0.112^\circ, 0.123^\circ)$. 脉动速度的计算公式采用式(8). 在定温壁条件下,壁面处的脉动温度应该为 0,考虑压力脉动量很小,则密度脉动量也接近 0. 故我们设

$$\{\rho'_T, T'_T\} = \{\tilde{\rho}'_T, \tilde{T}'_T\} \cdot (Ma/\hat{Ma}) \cdot f(y/(b\delta_T)), \tag{12}$$

其中, $f(y)$ 仍为式(3)中定义的过渡函数, $b\delta_T$ 为过渡区的宽度,本文 b 取 0.25, δ_T 为湍流边界层的名义厚度. 式(12)实际是在近壁处做了修正的式(10). 同样,我们也试用了不加 Mach 数修正的脉动分布如下所示:

$$\{\rho'_T, T'_T\} = \{\tilde{\rho}'_T, \tilde{T}'_T\} \cdot f(y/(b\delta_T)). \tag{13}$$

因为在这一情况,密度和温度脉动不会太大而导致计算失败.

两种工况计算参数见表 3.

表 3 两种工况的参数

工况	入口位置 x	k_δ	网格 $N_x \times N_y \times N_z$	热力学脉动量 ρ', T' 计算公式
A	792	2.0	$851 \times 81 \times 128$	式(12)
B	872	2.0	$681 \times 81 \times 128$	式(13)

图 10 给出了壁面摩擦因数流向分布的曲线,其中实线为文献[2]的计算结果,标识为 A 与 B 的曲线为本文方法的计算结果. 可以看出,在入口附近,两条曲线都经历了由于入口条件不完善而导致的调整,但是,在约 $100R$ 的下游后,3 条曲线就吻合得不错. 图 11 给出的是壁面处的热传导率 $q_w = k_w(\partial T/\partial y)_w$ 的流向分布曲线,其中 k 为导热系数,它满足 Sutherland 公式. 同样,在经过约 $100R$ 的调整段后,3 条曲线基本重合.

图 12 给出了边界层厚度沿流向分布的曲线,其中,图(a)为边界层排移厚度,图(b)为形状因子(排移厚度与动量厚度的比值). 我们可以看出,在湍流阶段,即距入口 $100R$ 长度以后,

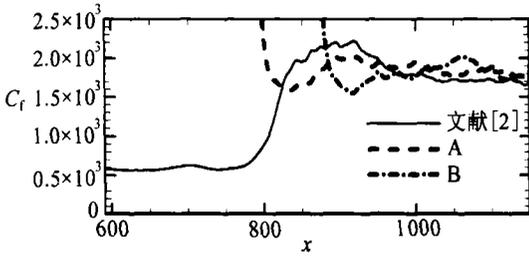


图 10 壁面摩擦因数

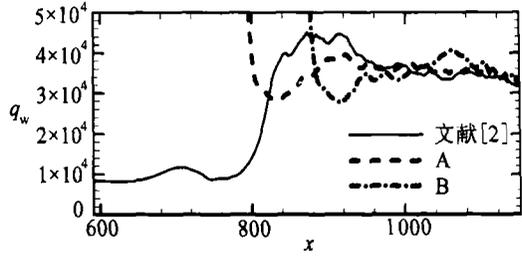
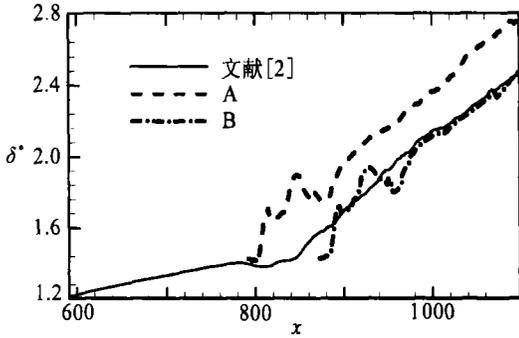
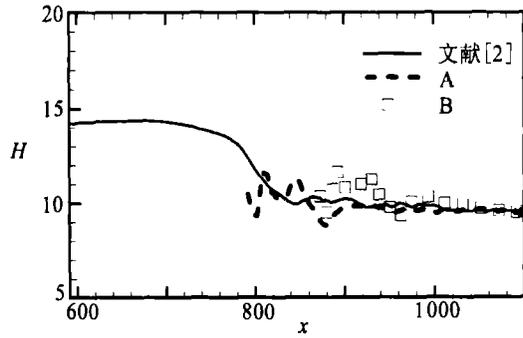


图 11 壁面热传导率



(a) 排移厚度



(b) 形状因子

图 12 边界层厚度的流向分布

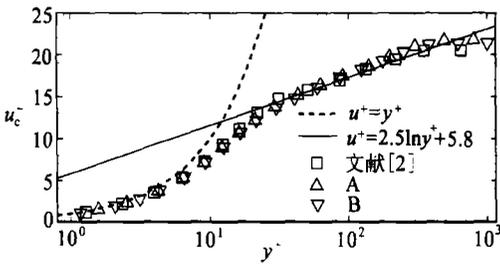
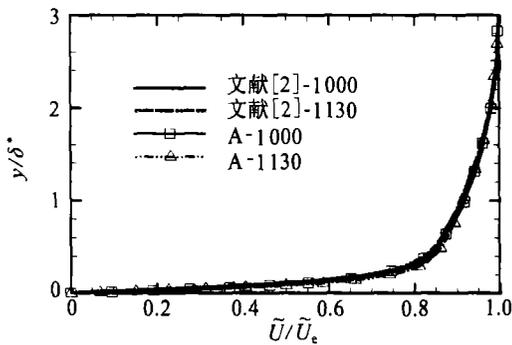


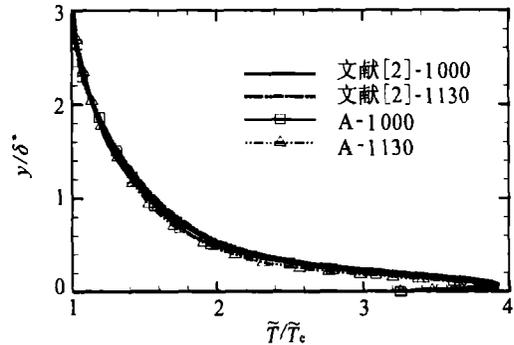
图 13 平均流向速度壁面律

本文方法的排移厚度的计算结果均与文献[2]的结果基本平行,并且它们计算出的形状因子也是趋于一致的。

图 13 给出的是 $x = 1057$ 处流向平均速度壁面律的对比。可以看出,本文方法与文献[2]的计算结果基本重合,均是在 $y^+ \leq 8$ 与 $20 \leq y^+ \leq 300$ 范围内满足线性律 $u_c^+ = y^+$ 与对数律 $u_c^+ = 2.5\ln y^+ + 5.8$ 。



(a) 流向速度



(b) 温度

图 14 平均流剖面

图 14 给出了情况 A 的在 $x = 1000$ 与 1130 两处的平均流剖面图,以及文献[2]中相应的结果,它们都重合得很好,满足相似性。情况 B 的结果相同,不再另外给出。

在上面两个例中,热力学脉动量无论做不做 Mach 数修正都能给出正确结果,但当实际的 Mach 数明显高于用以导出入口条件的流场 Mach 数时,计算的确可能发散,这时做 Mach 数修

正就是必要的了。

3 结 论

1) 3 个实例表明,的确可以利用同一个由时间模式 DNS 所得平板湍流边界层的某一瞬时流场,导出不同 Mach 数、不同温度边界条件下,锥体湍流边界层空间模式 DNS 所需的入口条件。

2) 若锥体和平板的 Mach 数及壁面温度条件相同,则入口条件的推导是直截了当的。

3) 若锥体的来流 Mach 数及壁面温度条件与平板的不同,则无论温度及密度的平均值还是脉动值分布都要做相应的修正。

4) 用这样的边界条件,从入口处到湍流充分发展处要经历一个调整过程,其调整长度约为 100 个锥头半径。

从计算量与计算稳定性上来看,本文给出的计算方法均比传统 DNS 方法为好。

致谢 本文中时间模式平板湍流数据由天津大学力学系黄章峰博士提供,在此表示衷心的感谢。

[参 考 文 献]

- [1] 董明,罗纪生. 高超声速零攻角尖锥边界层转换的机理[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(8): 912-920.
- [2] 董明. 马赫数为 6 的零攻角钝锥湍流边界层空间演化的直接数值模拟[A]. 见: 第 6 届西北地区计算物理学术会议论文集[C]. 陕西汉中, 2008, 90-97.
- [3] 董明,罗纪生. 锥体效应对超音速湍流边界层统计特性的影响[J]. 力学学报, 2008, **40**(3): 394-401.
- [4] Pirozzoli S, Grasso F, Gatski T B. Direct numerical simulation and analysis of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at $M = 2.25$ [J]. *Physics of Fluids*, 2004, **16**(3): 530-545.
- [5] 李新亮,傅德薰,马延文. 可压缩钝楔边界层转换到湍流的直接数值模拟[J]. 中国科学, G 辑, 2004, **34**(4): 466-480.
- [6] Lund T S, Wu X H, Squires K D. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations[J]. *J Comput Phys*, 1998, **140**(2): 233-258.
- [7] 黄章峰,周恒. 湍流边界层的空间模式 DNS 的入口条件[J]. 中国科学, G 辑, 2008, **38**(3): 310-318.
- [8] 唐洪涛. 不可压缩平板边界层从层流突变为湍流的机理及湍流特性[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 2007.
- [9] Li X, Fu D, Ma Y. Direct numerical simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at $Ma = 6$ [J]. *Chinese Phys Lett*, 2006, **23**(6): 1519-1522.
- [10] Guarini S E, Moser R D, Shariff K, et al. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at Mach 2.5[J]. *J Fluid Mech*, 2000, **414**(1): 1-33.
- [11] White F M. *Viscous Fluid Flow*[M]. New York: McGraw-Hill, 1974.
- [12] Gatski T B, Erlebacher G. Numerical simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer[R]. NASA Tech Memo, 2002, 2002-211934.
- [13] Maeder T, Adams N A, Kleiser L. Direct simulation of turbulent supersonic boundary layers by an extended temporal approach[J]. *J Fluid Mech*, 2001, **429**(1): 187-216.

Study on the Inflow Boundary Condition for DNS of Turbulent Boundary Layers on Supersonic Blunt Cones

DONG Ming^{1,2}, ZHOU Heng¹

(1. *Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;*

2. *Tianjin Key Laboratory of Modern Engineering Mechanics,
Tianjin 300072, P. R. China*)

Abstract: For the direct numerical simulation (DNS) of turbulent boundary layers, how to generate an appropriate inflow condition is a problem that needs to be considered. A method was proposed, by which the inflow condition for spatial-mode DNS of turbulent boundary layers on supersonic blunt cones with different Mach number, Reynolds number and wall temperature conditions can be generated, based only on a given instant flow field obtained by a temporal-mode DNS of a turbulent boundary layer on a flat plate. The effectiveness of the proposed method is shown by three typical examples, through comparing its results with those obtained by other methods.

Key words: turbulent boundary layer; direct numerical simulation(DNS); supersonic; blunt cone; inflow condition