

基于奇异值分解的 SGCMG 操纵律分析*

张景瑞

(北京理工大学 宇航科学技术学院,北京 100081)

(陈立群推荐)

摘要: 基于奇异值分解理论,对航天器姿态控制系统中使用的单框架控制力矩陀螺(SGCMG)的操纵律进行了分析和比较研究.借助于奇异值分解方法,分析了各种操纵律逃逸奇异的机理,重点分析了各种操纵律对陀螺构型奇异性、输出力矩误差的影响.通过仿真算例定量地分析与比较了各种操纵律的性能,所得结果可供工程设计人员参考.

关键词: 单框架控制力矩陀螺; 奇异值分解; 操纵律; 奇异

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A

引言

单框架控制力矩陀螺(SGCMG)具有功耗小、结构简单、可靠性高、力矩放大能力强等优点,目前已经被广泛用作大型航天器的姿态控制执行机构,如法国的 Sport-5、前苏联的 MIR^[1]等.近年来,SGCMG 也被用于具有快速姿态机动要求的中小型卫星,如法国的 Pléiades、土耳其的 BilSat 等^[2-3].

SGCMG 使用中存在的最大困难是构型奇异问题,此时各陀螺的输出力矩垂直于要求的力矩方向. SGCMG 的奇异不仅与其几何构型有关,也与操纵律的设计有关.目前已经提出了多种不同的陀螺群构型,如双平行构型、三平行构型、金字塔构型、屋顶型构型、五棱锥构型等^[4-6],它们的构型奇异特性也不尽相同.

针对 SGCMG 的构型奇异问题,目前已经提出了多种操纵律,如伪逆操纵律^[7]、带零运动的伪逆操纵律^[8]、鲁棒伪逆操纵律^[9]、广义鲁棒伪逆操纵律^[10]、加权鲁棒伪逆操纵律^[11]奇异方向搜索操纵律^[12]、约束的操纵律^[13]等.

伪逆操纵律是最小二乘意义下的最优解,但是不具有逃逸奇异的功能.所提出的这些 SGCMG 的操纵律,各有优缺点,尽管有人做过一些比较研究,但是还局限在数值仿真^[14-15]或半物理仿真^[15]的层面上,没有从机理上进行系统地分析与比较,这给实际应用时,SGCMG 操纵律选择带来了很大困惑.因此,有必要从机理上对这些操纵律进行比较研究,以使航天器设计人员能够根据任务要求和星载执行机构的实际能力,有针对性地选择合适的 SGCMG 操纵律.

* 收稿日期: 2008-01-10; 修订日期: 2008-07-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10502006);北京市优秀人才培养资助计划项目(20071D1600300398)

作者简介: 张景瑞(1974—),女,辽宁人,博士,副教授(Tel: +86-10-68914018; E-mail: zhangjingrui@bit.edu.cn).

本文借助于奇异值分解的理论,对航天器姿态控制系统中使用 SGCMG 的操纵律进行了详细的分析和比较研究.文中重点分析了各种操纵律对陀螺构型奇异性、输出力矩误差的影响机理,比较了各种操纵律在逃逸奇异时,奇异值和奇异向量的变化情况,讨论了各种操纵律脱离奇异的路径.并用仿真算例定量地比较了各种操纵律的性能.所得结果对航天器姿态控制系统设计人员具有重要参考价值.

1 SGCMG 构型奇异问题

考虑单框架力矩陀螺群的力矩方程:

$$C(\boldsymbol{\delta})\dot{\boldsymbol{\delta}} = -\frac{1}{h}T_c, \quad (1)$$

其中, $C(\boldsymbol{\delta}) \in R^{3 \times n}$ 是与各陀螺角动量的方向有关的矩阵,其第 i 列即为第 i 个陀螺的角动量方向的单位向量, n 是陀螺的个数; $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ 是 $n \times 1$ 维的陀螺框架角和框架角速度列阵; h 是单个陀螺的角动量,这里假设各陀螺的角动量都相同; $T_c \in R^3$ 是要求陀螺输出的控制力矩,即指令力矩,由姿态控制律给出.

1.1 $C(\boldsymbol{\delta})$ 的奇异值分解

将 $C(\boldsymbol{\delta})$ 进行奇异值分解,有

$$C(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{U}^T = \sum \sigma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{V} \in R^{3 \times 3}$, $\mathbf{A} \in R^{3 \times n}$, $\mathbf{U} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{A} = [\mathbf{S} \quad \mathbf{0}]$, $\mathbf{S} \in R^{3 \times 3}$, $\mathbf{0} \in R^{3 \times (n-3)}$, $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$; σ_i 是 $C(\boldsymbol{\delta})$ 的第 i 个奇异值,且假定其按降序排列,即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$; \mathbf{V} 和 \mathbf{U} 都是酉矩阵, \mathbf{v}_i 和 \mathbf{u}_i 分别表示 \mathbf{V} 和 \mathbf{U} 的第 i 列.

2 操纵律分析与比较

本节借助于奇异值分解理论来分析各种操纵律的特性并比较它们的优缺点.首先需要给出奇异性的度量.关于陀螺群构型奇异的度量,存在着一些不同的定义,这里给出最常用的行列式型定义:

$$\Gamma = \det(C(\boldsymbol{\delta})C(\boldsymbol{\delta})^T) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2, \quad \Gamma \in [0 \quad n^3/27]. \quad (3)$$

2.1 加权伪逆操纵律

考虑如下最优化问题:

价值函数

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\dot{\boldsymbol{\delta}}\|_P^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}} dt; \quad (4)$$

约束条件

$$hC(\boldsymbol{\delta})\dot{\boldsymbol{\delta}} + T_c = 0. \quad (5)$$

可写出其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\lambda}^T (hC(\boldsymbol{\delta})\dot{\boldsymbol{\delta}} + T_c), \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 是 Lagrange 乘子, \mathbf{P} 是对称正定的加权矩阵.

根据最优控制理论,其协状态方程是

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\delta}} = \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}} + hC(\boldsymbol{\delta})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

由此得

$$\dot{\delta} = -hP^{-1}C(\delta)^T\lambda. \quad (8)$$

由

$$\dot{\delta} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = hC(\delta)\dot{\delta} + T_c = 0, \quad (9)$$

将式(8)代入上式得

$$T_c = h^2C(\delta)P^{-1}C(\delta)^T\lambda,$$

从而可解得

$$\lambda = \frac{1}{h^2}(C(\delta)P^{-1}C(\delta)^T)^{-1}T_c. \quad (10)$$

将式(10)代入式(8),并令 $P^{-1} = Q$ 可得如下加权伪逆操纵律:

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h}QC(\delta)^T[C(\delta)QC(\delta)^T]^{-1}T_c. \quad (11)$$

如果令 $Q = I$, 则式(11)退化为熟知的伪逆操纵律:

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h}C(\delta)^T[C(\delta)C(\delta)^T]^{-1}T_c. \quad (12)$$

2.2 广义加权鲁棒伪逆操纵律

考虑如下最优化问题:

价值函数

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\|\dot{\delta}\|_P^2 + \|T_e\|_W^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\dot{\delta}^T P \dot{\delta} + T_e^T W T_e) dt, \quad (13)$$

其中, P, W 是对称正定的加权矩阵, T_e 是力矩误差, $T_e = hC(\delta)\dot{\delta} + T_c$. 由于这里将力矩误差作为优化指标,所以变成了无约束极值问题.

可写出 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\delta}^T P \dot{\delta} + T_e^T W T_e), \quad (14)$$

由函数求极值的必要条件,有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} = P\dot{\delta} + h^2C(\delta)^T WC(\delta)\dot{\delta} + hC(\delta)^T W T_c = 0, \quad (15)$$

由此得

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h}[P/h^2 + C(\delta)^T WC(\delta)]^{-1}C(\delta)^T W T_c. \quad (16)$$

由逆矩阵的性质:

$$[P/h^2 + C(\delta)^T WC(\delta)]^{-1}C(\delta)^T W = P^{-1}C(\delta)^T[C(\delta)P^{-1}C(\delta)^T + W^{-1}/h^2]^{-1},$$

令 $P^{-1} = Q, W^{-1}/h^2 = D$, 可得

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h}QC(\delta)^T[C(\delta)QC(\delta)^T + D]^{-1}T_c. \quad (17)$$

上式即为广义加权鲁棒伪逆操纵律^[11]. 文献[11]推荐的加权矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & w_2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & w_3 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & w_4 \end{bmatrix}, \quad D = \epsilon E, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 1 \end{bmatrix},$$

λ_i 是小于1的标量函数, $\lambda_i = \lambda_0 \sin(\omega t + \phi_i)$, $i = 1, 2, 3$; ϵ 是足够小的标量函数, $\epsilon = \epsilon_0 \exp(-\mu \Gamma)$, $\lambda_0, \omega, \phi_i, \epsilon_0, \mu$ 都是常值设计参数.

在式(17)中, 选择 $Q = I_4, D = \epsilon I_3$, 就得到鲁棒伪逆操纵律

$$\dot{\delta} = -C(\delta)^T [C(\delta)C(\delta)^T + \epsilon I_3]^{-1} T_c. \quad (18)$$

在式(17)中, 选择 $Q = I_4, D = \epsilon E$, 就得到广义鲁棒伪逆操纵律

$$\dot{\delta} = -C(\delta)^T [C(\delta)C(\delta)^T + \epsilon E]^{-1} T_c. \quad (19)$$

3 避免奇异的机理分析

3.1 伪逆操纵律时的奇异机理

操纵律(12)可改写为

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} U \Lambda^T V^T [V S^2 V^T]^{-1} T_c = -\frac{1}{h} U \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} V^T T_c = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^T T_c,$$

当 T_c 与 v_j 平行时, 可以记 $T_c = \beta v_j$, β 是1个常数, 由于

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则 $\dot{\delta} = -\frac{\beta}{h \sigma_j} u_j$, (20)

这说明 $\dot{\delta}$ 与 u_j 平行. 如果 $\sigma_j \neq 0$, 陀螺的框架角速度只能沿 u_j 方向变化; 特别是如果 $j = 3$ 时, 若 $\sigma_3 = 0$, 有 $\dot{\delta} \rightarrow \infty$, 即操纵律失效. 由式(20)可见, 如果 $j \neq 3$, 即使 $\sigma_3 = 0$, 操纵律仍然有效.

由上述分析可见, 不是所有的奇异构型都会导致伪逆操纵律失效, 如果控制力矩 T_c 垂直于 v_3 , 即使 $\sigma_3 = 0$, 仍有

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^T T_c. \quad (21)$$

可见为改善陀螺群的奇异特性, 需要从两方面采取措施, 即人为地增大奇异值或改变奇异向量的方向.

3.2 广义加权鲁棒伪逆操纵律避免奇异的机理

考虑广义加权鲁棒伪逆操纵律(17), 将其改写为如下形式:

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} Q C(\delta)^T \left[\left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i v_i u_i^T \right) Q \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i u_i v_i^T \right) + D \right]^{-1} T_c. \quad (22)$$

即

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} Q C(\delta)^T \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_j \sigma_i v_j u_j^T Q u_i v_i^T + D \right]^{-1} T_c. \quad (23)$$

a) 加权矩阵 D 的作用

为清晰地显示 D 的影响, 令 $Q = I$. 由于

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

则式(23)变为

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} C(\delta)^T \left[\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 v_i v_i^T + D \right]^{-1} T_c. \quad (24)$$

如果选择 $D = \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 v_i v_i^T$ 则

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{h} C(\delta)^T \left[\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^2 + \xi_i^2) v_i v_i^T \right]^{-1} T_c, \quad (25)$$

此时即使出现奇异,即 $\sigma_3 = 0$,上述操纵律也同样能够工作. 如果取 $D = \xi_3^2 v_3 v_3^T$,那么上式中只有第3个奇异值由0变为 ξ_3 ,这实际上减小了引入的力矩误差. 可见加权矩阵 D 的作用主要是改变 $C(\delta)$ 的奇异值. 如果 D 取为一般的对称正定矩阵,除了改变 $C(\delta)$ 的奇异值外,也会对其奇异向量产生影响,但是这种影响不容易估计,因而也无法有效地利用.

b) 加权矩阵 Q 的作用

考虑式(17). 为清晰地了解 Q 的作用,令 $D = 0, Q \neq I$,此时式(17)退化为式(11). 记 $U = [U_1 \ U_2], U_1 \in R^{n \times 3}, U_2 \in R^{n \times (n-3)}$, 则式(11)变为

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -\frac{1}{h} Q U A^T V^T [V A U^T Q U A^T V^T]^{-1} T_c = -\frac{1}{h} Q U A^T [A U^T Q U A^T]^{-1} V^T T_c = \\ &= -\frac{1}{h} U \begin{bmatrix} U_1^T Q U_1 S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} V^T T_c = -\frac{1}{h} U_1 U_1^T Q U_1 \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} V^T T_c = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \zeta_i v_i^T T_c, \end{aligned}$$

其中 ζ_i 是 $U_1 U_1^T Q U_1$ 的第 i 个列向量.

当 T_c 与 v_j 平行时,记 $T_c = \beta v_j$, 由于

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$\text{则 } \dot{\delta} = -\frac{\beta}{h \sigma_j} \zeta_i. \quad (26)$$

比较式(20)和(26),很清楚 Q 的作用是改变了奇异向量的方向. 如果 $\sigma_i \neq 0$,陀螺的框架角速度不必沿 u_i 方向变化;可以选择时变的 Q 来实时地改变 ζ_i 的方向,从而使框架角速度不断调整,以改变框架构型,使其脱离奇异. 如果 $i = 3$,当奇异时 $\sigma_3 = 0$,有 $\dot{\delta} \rightarrow \infty$,即仅仅使用加权矩阵 Q 的操纵律仍然失效. 因此在应用中,应该同时使用 D 和 Q ,前者用来改变奇异值,后者用来改变奇异向量的方向. 虽然文献[11]推荐了一种 D 和 Q 的选择方法,但是用起来并不方便,且没有将奇异方向的改变同奇异值的敏感性联系起来. 关于 D 和 Q 的选择,作者将在另一篇文章中讨论.

4 仿真结果

考虑 FP 构型的陀螺群,使用公式(3)中定义的 Γ 作为奇异度量,下面比较一般伪逆操纵律(GP)、鲁棒伪逆操纵律(RP)和加权鲁棒伪逆操纵律(WRP)的特性. 为突出研究结果,RP只考虑选择加权矩阵 D ,而WRP只考虑加权矩阵 Q . 为了检验陀螺群脱离奇异的能力,这里指令力矩为阶跃信号,以便陀螺群尽快进入奇异状态. 仿真初始条件为:

$$[\delta_1(0) \ \delta_2(0) \ \delta_3(0) \ \delta_4(0)] = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$[\dot{\delta}_1(0) \ \dot{\delta}_2(0) \ \dot{\delta}_3(0) \ \dot{\delta}_4(0)] = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

指令力矩为

$$T_c = [1.155 \ 0 \ 0]; \quad D = \xi_3^2 v_3 v_3^T, \quad \xi_3 = 0.0001;$$

Q 的选择是经过 ζ_3 的选择间接实现的,当接近奇异时,将 u_3 偏转一个小的角度,以改变奇异向

量的方向。

仿真结果如图 1~图 3 所示。由图 1 可见 GP 操纵律是陀螺群在 1 s 后陷入奇异,之后无法脱离奇异状态;由图 2 可见,RP 操纵律通过适当选择 D 可以使陀螺群脱离奇异,但是带来了输出力矩误差,而且脱离奇异后又会反复陷入奇异;图 3 显示出,WRP 操纵律通过选择 Q 可以使陀螺群脱离奇异,并且带来的力矩误差很小,但是需要较大的框架角速度。

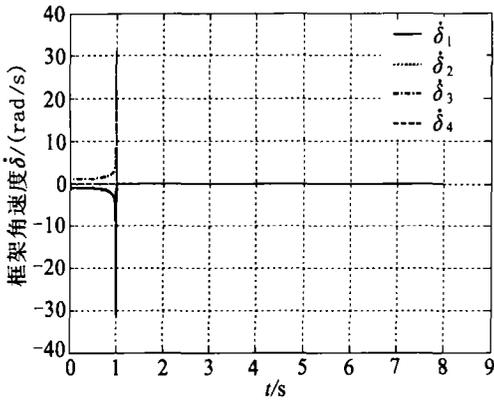


图 1a GP 的框架角速度

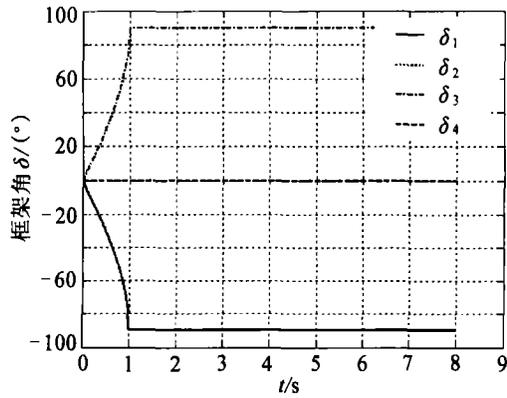


图 1b GP 的框架角

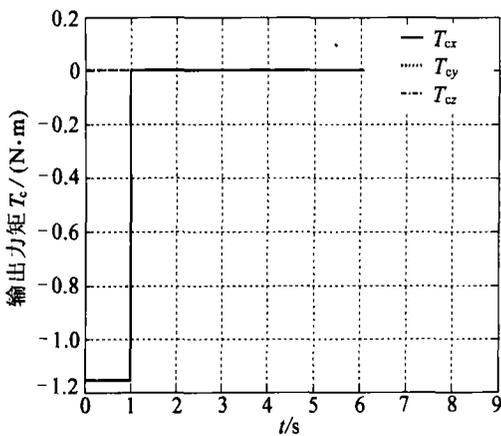


图 1c GP 的输出力矩

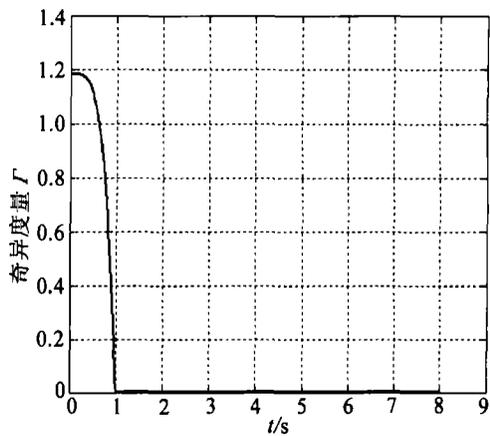


图 1d GP 的奇异度量

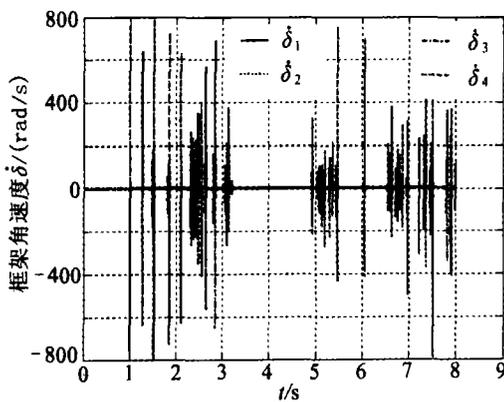


图 2a RP 的框架角速度

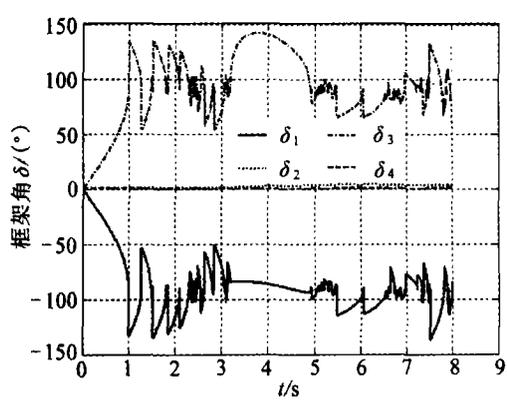


图 2b RP 的框架角

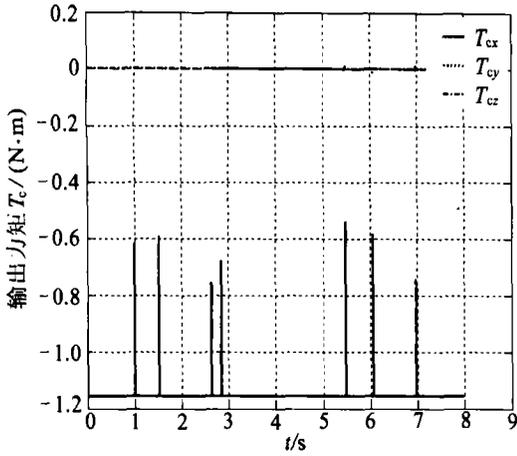


图 2c RP 的输出力矩

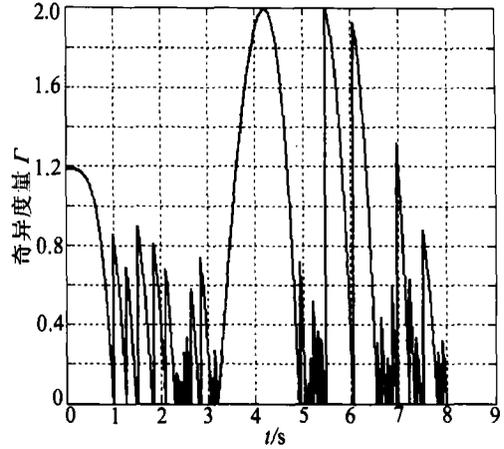


图 2d RP 的奇异度量

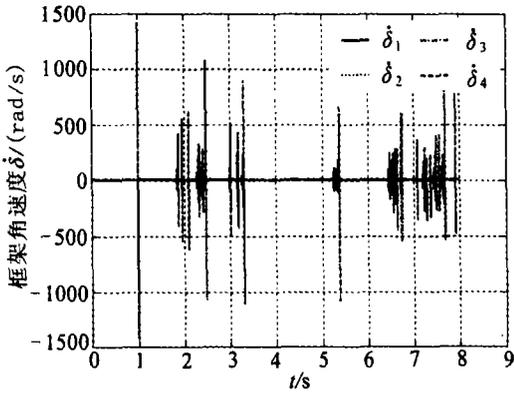


图 3a WRP 的框架角速度

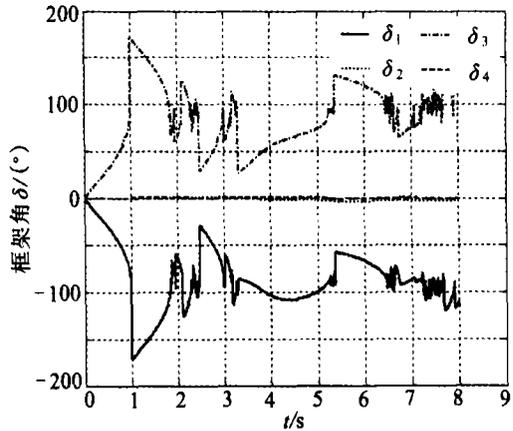


图 3b WRP 的框架角

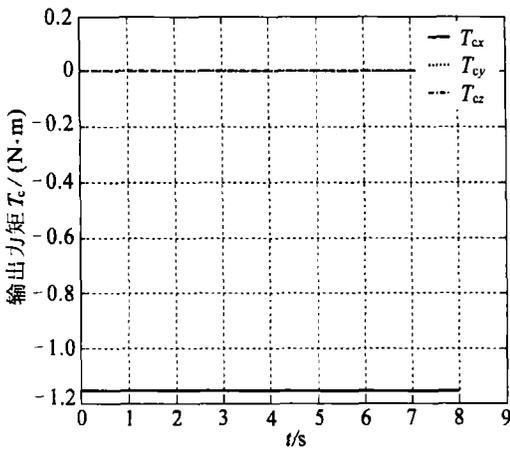


图 3c WRP 的输出力矩

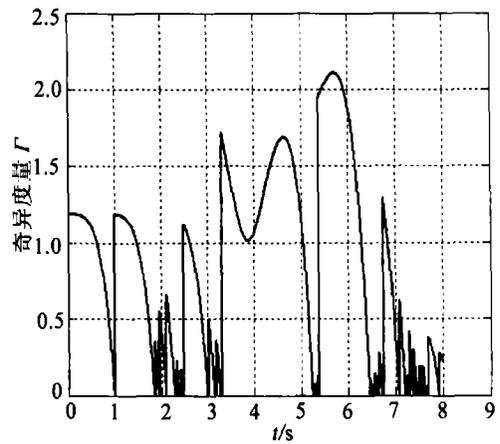


图 3d WRP 的奇异度量

需要指出的是,正常工作状态下,陀螺主要吸收周期变化的干扰角动量,对于常值干扰,由于其随时间的积累作用,会很快使陀螺群饱和,陀螺群自身不能脱离饱和,需要施加外部卸载。

5 结 论

本文研究了 SGCMG 作为航天器姿态控制执行机构的奇异问题。文中借助于奇异值分解

理论,分析了几种常用操纵律逃逸奇异和引入输出力矩误差的机理。

分析和比较显示出,一般伪逆操纵律脱离奇异的能力较差,加权鲁棒伪逆操纵律在避免奇异方面具有优势。但是单独使用加权矩阵 D 或 Q 的效果并不十分理想,单独使用 D 可能导致大的输出力矩误差,单独使用 Q 可能导致过大的框架角速度要求。如何同时选择加权矩阵 D 和 Q ,是需要进一步研究的课题。本文所得结论,对使用 SGC MG 的航天器的姿态控制系统设计,具有重要的参考价值。

致谢 作者感谢北京理工大学优秀青年教师资助计划(2007YS0202)对本文的资助。

[参 考 文 献]

- [1] Branets V N, Weinberg D M, Verstchagin V P, et al. Development experience of the attitude control system using single-axis control moment gyros for long-term orbiting space station[J]. *Journal of Acta Astronautica*, 1988, 18:91-98.
- [2] Baudoin Alain. PLÉIADES: A multi mission and multi co-operative program[A]. In: IAF-01-B 1 07. *Proc 52nd International Astronautical Congress*[C]. Toulouse, France, 1-5 Oct, 2001.
- [3] Lappas V J, Oosthuizen P, Madle P, et al. Analysis and in-orbit performance of the BILSAT-1 microsatellite twin control moment gyroscope experimental cluster[R]. AIAA-2004-5246, 2004.
- [4] Margulies G, Aubrun J N. Geometric theory of single-gimbal control moment gyro systems[J]. *Journal of the Astronautic Sciences*, 1978, 26(2): 159-191.
- [5] 张锦江. 单框架控制力矩陀螺系统的构型分析和对比研究[J]. *中国空间科学技术*, 2003, 23(3): 52-56.
- [6] Yoshikawa T. Steering law for roof type configuration control moment gyro system[J]. *Automatica*, 1977, 13:359-368.
- [7] John E F. A reactive torque control law for gyroscopically controlled space vehicles[R]. NASA TM X-64790, 1973.
- [8] Bedrossian N S, Paradiso J P, Bergmann E V, et al. Steering laws design for redundant single gimbal control moment gyroscopes[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1990, 13(6): 1083-1089.
- [9] Ford K A, Christopher D H. Singular direction avoidance steering for control-moment gyros[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2000, 23(4): 648-656.
- [10] Wie B, David B, Christopher H. Singularity robust steering logic for redundant single-gimbal control moment gyros[R]. AIAA-2000-4453, 2000.
- [11] Wie B. New singularity escape/avoidance steering logic for control moment gyro systems[R]. AIAA 2003-5659, 2003.
- [12] Cornick D E. Singularity avoidance control laws for single gimbal control moment gyros[R]. AIAA79-1698, 1979.
- [13] Kurakawa H. Constrained steering law of pyramid-type control moment gyros and ground tests[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1997, 20(3): 445-449.
- [14] 吴忠, 吴宏鑫. 单框架控制力矩陀螺系统操纵律研究综述[J]. *宇航学报*, 2000, 21(4): 140-145.
- [15] 张锦江, 李季芬, 吴宏鑫. 用单框架控制力矩陀螺的大型航天器姿态控制系统实物仿真研究[J]. *宇航学报*, 2004, 25(4): 382-388.

Steering Laws Analysis of SGCMGs Based on Singular Value Decomposition Theory

ZHANG Jing-rui

(*School of Aerospace Science Engineering, Beijing Institute of Technology,
Beijing 100081, P. R. China*)

Abstract: The steering laws of single gimbal control moment gyros (SGCMGs) are analyzed and compared for a spacecraft attitude control system based on the singular value decomposition (SVD) theory. The mechanism of the steering laws escaping singularity, especially the steering laws of how to affect the singularity of gimbal configuration and the output torque error, was researched via SVD theory. The performance of various steering laws was analyzed and compared quantitatively by simulation. The obtained results can be used as a reference for the engineering designers.

Key words: single gimbal control moment gyros; singular value decomposition; steering law; singularity