

# 磁弹性耦合效应引起的铁磁直杆磁场中 振动频率的改变\*

王省哲

(兰州大学 西部灾害与环境力学教育部重点实验室;  
兰州大学 土木工程与力学学院, 兰州 730000)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 基于磁弹性广义变分原理和 Hamilton 原理, 对处于外加磁场中的软铁磁体, 建立了磁弹性动力学理论模型. 分别通过关于铁磁杆磁标势和弹性位移的变分运算, 获得了包含磁场和弹性变形的所有基本方程, 并给出描述磁弹性耦合作用的磁体力和磁面力. 采用摄动技术和 Galerkin 方法, 将所建立的磁弹性理论模型用于外加磁场中铁磁直杆的振动分析. 结果表明, 由于磁弹性耦合效应, 外加磁场将对铁磁杆的振动频率产生影响: 当铁磁杆的振动位移沿着磁场方向时, 其频率减小并出现磁弹性屈曲失稳; 当铁磁杆的振动位移垂直于磁场方向时, 其频率将会增大. 理论模型能够很好地解释已有实验观测的振动频率改变现象.

**关键词:** 铁磁杆; 磁弹性相互作用; 广义变分原理; 振动频率; 摄动方法

**中图分类号:** O344      **文献标识码:** A

## 引 言

铁磁材料制成的杆、梁、板、壳等结构在现代高新电磁设备与仪器中有着极为广泛的应用. 关于铁磁结构的磁弹性行为的研究可以追溯到上世纪 60 年代, Moon 和 Pao<sup>[1]</sup> 最早开展了外加横向磁场中铁磁梁式板的磁弹性实验并发现: 随着外加磁场的增大, 铁磁板的振动频率将会降低, 并且当磁场达到某一临界值时其频率降为 0, 即所谓的磁弹性屈曲现象; 而且铁磁梁式板发生磁弹性屈曲时, 所对应的临界磁场值与板的长度、厚度比成  $-3/2$  次方降低. 其后, Moon 和 Pao<sup>[2]</sup> 进一步提出了一磁体力偶模型来描述磁弹性屈曲现象. 然而, 由于理论预测的磁场临界值和实验观测值往往存在着较大的差异, 并由此吸引了一大批学者致力于这一问题的研究以及探究理论与实验结果二者存在较大差异的原因<sup>[3-5]</sup>. 另一方面, 一些学者<sup>[6-8]</sup> 基于诸如理性力学方法、变分方法等建立了磁弹性变形体的一般理论, 在这些模型中大都预先采用 Maxwell 应力张量来表述作用于铁磁体上的磁力. 后来的研究发现, 这些基于 Maxwell 应力张量的理论模型, 在描述铁磁介质的磁弹性行为中存在一定的局限性, 其中大部分模型可以揭示横向磁场中的铁磁板的磁弹性屈曲现象, 但往往无法解释处于面内磁场中的低磁化率铁磁板

\* 收稿日期: 2007-12-20; 修订日期: 2008-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10502022); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-050878)

作者简介: 王省哲(1972—), 男, 陕西扶风人, 教授(Tel: +86-931-8913956; E-mail: xzwang@lzu.edu.cn).

振动频率随磁场升高的实验现象<sup>[9]</sup>。基于磁弹性广义变分原理,Zhou 和 Zheng<sup>[10-11]</sup>建立了一新的磁弹性模型,分析了处于外加横向或斜磁场中的铁磁板屈曲和弯曲行为,该模型不但预测了横向磁场中铁磁薄板的磁弹性屈曲,理论预测值与实验观测结果更为接近<sup>[12]</sup>,同时也首次成功地对面内磁场中铁磁板振动频率升高现象<sup>[9]</sup>,给出了理论预测与解释。

除了关于横向磁场中铁磁板的磁弹性屈曲的实验与理论研究外,Moon 于 1978 年开展了处于外加横向磁场中一铁磁弹性直杆的振动实验<sup>[13]</sup>。对于铁磁杆,其振动弯曲模式可以有两个方向:一是沿着外加磁场方向,另一个是垂直于磁场的方向,若无外加磁场作用,两种弯曲模式所对应的振动频率是相同的。然而,实验结果显示:对于处于外加横向磁场中的铁磁杆的振动,“沿着磁场方向的铁磁杆的振动频率降低,而垂直于磁场方向,铁磁杆的振动频率将会有较小的增加”<sup>[13]</sup>。对于这一实验现象,到目前为止尚未见相关的进一步研究与报道。基于 Hamilton 原理和磁弹性广义变分原理,本文建立了一磁弹性动力学模型用于预测外加磁场中铁磁杆的振动频率的变化,其中的磁弹性相互耦合作用是通过作用于铁磁体上的磁体力和磁面力来表述的。利用摄动技术和 Galerkin 方法,进一步解析分析了铁磁杆在外加磁场中的磁弹性振动频率特性,结果表明:本文所建立的磁弹性动力学模型,从理论上很好地解释了磁场中铁磁弹性杆磁弹性振动频率的改变,即铁磁杆沿着磁场方向振动时其振动频率降低,而垂直于磁场方向振动时频率升高。

## 1 磁弹性耦合动力学模型

考虑一处于外加稳恒磁场  $\mathbf{B}_0$  中的各向同性、均匀、线性软铁磁介质。为简单起见,我们仅考虑低频的磁弹性动力系统,并且忽略电场和涡电流对铁磁介质动力特性的影响。在不考虑铁磁介质内的电荷分布、传导电流情形下,铁磁系统的准静态磁能可表示为<sup>[10-11,14]</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_{em}\{\phi, \mathbf{u}\} = & \frac{1}{2}\mu_0 \int_t \left[ \int_{\Omega^+(\mathbf{u})} \mu_r (\nabla \phi^+)^2 dv + \int_{\Omega^-(\mathbf{u})} (\nabla \phi^-)^2 dv \right] dt + \\ & \int_t \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \phi^- ds dt, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,上式中最后一项表示外加磁场  $\mathbf{B}_0$  所作的功, $\phi$  表示磁标量势函数并且满足  $-\nabla \phi = \mathbf{H}$ ,  $S_0$  为一包围且远离铁磁体的封闭曲面, $\mathbf{u}$  表示铁磁体的变形位移矢量, $\Omega^+$  和  $\Omega^-$  分别表示铁磁体内部区域和外部空气区域。

对于线性铁磁介质,其电磁本构关系表示如下:

$$\mathbf{M}^+ = \chi \mathbf{H}^+, \quad \text{在 } \Omega^+ \text{ 内}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}^+ = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^+, \quad \text{在 } \Omega^+ \text{ 内}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^- = \mu_0 \mathbf{H}^-, \quad \text{在 } \Omega^- \text{ 内}, \quad (4)$$

这里,  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{M}$  分别为磁场强度和磁化强度,  $\mathbf{B}$  为磁感应强度;上标“+”和“-”分别表示铁磁体内、外区域  $\Omega^+$  和  $\Omega^-$  中的相关物理量, $\mu_0$  和  $\mu_r$  分别表示真空中的磁导率和铁磁体内的相对磁导率; $\chi$  为铁磁介质的磁化率且有关系式  $\chi = \mu_r - 1$ 。

在不考虑外部机械载荷作用情形下,可变形铁磁介质的 Lagrange 泛函可表示为

$$\Pi_{me}\{\phi, \mathbf{u}\} = \frac{1}{2} \int_t \int_{\Omega^+} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{t} : \boldsymbol{\varepsilon}) dv dt, \quad (5)$$

其中,  $\rho$  表示铁磁介质的密度,  $\mathbf{t}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  分别表示应力和应变,  $\dot{\mathbf{u}}$  表示铁磁体内任一点的速度。在小变形假设下,铁磁弹性体的本构关系和几何方程表示为

$$t = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]/2, \quad (6)$$

这里,  $\lambda$  和  $G$  为 Lamé 系数,  $\mathbf{I}$  为单位二阶张量, 上标 “T” 表示张量或矩阵的转置.

将磁能  $\Pi_{\text{em}}$  和 Lagrange 泛函  $\Pi_{\text{me}}$  进行叠加, 便可获得铁磁介质动力系统总的广义磁弹性能量:

$$\begin{aligned} \Pi\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}\} &= \Pi_{\text{em}}\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}\} + \Pi_{\text{me}}\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}\} = \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \int_i \left[ \int_{\Omega^+(\mathbf{u})} \mu_r (\nabla \phi^+)^2 dv + \int_{\Omega^-(\mathbf{u})} (\nabla \phi^-)^2 dv \right] dt + \\ &+ \int_i \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \phi^- ds dt + \frac{1}{2} \int_i \int_{\Omega^+} (\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{t} : \boldsymbol{\varepsilon}) dv dt. \end{aligned} \quad (7)$$

由上式, 我们注意到尽管铁磁介质的变形  $\mathbf{u}$  并没有显含在磁标势  $\phi$  中, 但是通过改变铁磁体内外的积分区域  $\Omega^+(\mathbf{u})$  和  $\Omega^-(\mathbf{u})$  进而对铁磁系统的磁能产生影响. 由于考虑铁磁体的小变形, 这里忽略了铁磁体变形对式(7)最后一项中关于铁磁体的动能和应变能的影响.

令  $\delta \mathbf{u}$  和  $\delta \phi$  分别为铁磁体的位移和磁标势变分, 则有

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } S_u \text{ 上}, \quad (8)$$

$$\delta \phi = \delta \phi^+ = \delta \phi^-, \quad \text{在 } S \text{ 上}, \quad (9)$$

这里,  $S = \Omega^+ \cap \Omega^-$  表示铁磁介质的表面,  $S_u$  表示位移边界. 分别关于  $\mathbf{u}$  和  $\phi$  进行变分运算, 则可以得到<sup>[10-11]</sup>,

$$\begin{aligned} \delta \Pi\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}\} &= - \int_i \mu_0 \left[ \int_{\Omega^+(\mathbf{u})} \mu_r (\nabla^2 \phi^+) \delta \phi^+ dv + \int_{\Omega^-(\mathbf{u})} (\nabla^2 \phi^-) \delta \phi^+ dv \right] dt + \\ &+ \int_i \left[ \oint_{S_0} \mu_0 \left( \mu_r \frac{\partial \phi^+}{\partial n} - \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \right) \delta \phi^+ ds + \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mu_0 \nabla \phi^- + \mathbf{B}_0) \delta \phi^- ds \right] dt + \\ &+ \int_i \left[ - \int_{\Omega^+} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dv + \int_{\Omega^+} (\nabla \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f}^{\text{em}}) \cdot \delta \mathbf{u} dv + \right. \\ &\left. \int_{S_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{F}^{\text{em}}) \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dv \right] dt, \end{aligned} \quad (10)$$

上式中,  $\mathbf{f}^{\text{em}}$  和  $\mathbf{F}^{\text{em}}$  分别表示作用于铁磁体上的磁体力和磁面力, 并与文献中的类似<sup>[10-11]</sup>.

由  $\delta \mathbf{u}$  和  $\delta \phi$  的任意性与独立性以及  $\delta \Pi\{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}\} = 0$ , 则可获得关于铁磁体内外磁场以及变形场的所有方程及边界条件.

#### 准静态磁场基本方程

$$\nabla^2 \phi^+ = 0, \quad \text{在 } \Omega^+(\mathbf{u}) \text{ 内}, \quad (11)$$

$$\nabla^2 \phi^- = 0, \quad \text{在 } \Omega^-(\mathbf{u}) \text{ 内}. \quad (12)$$

相应的磁场交接条件

$$\phi^+ = \phi^-, \quad \mu_r \frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n}, \quad \text{在 } S \text{ 上}. \quad (13)$$

与边界条件

$$-\nabla \phi^- = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0, \quad \text{在 } \infty \text{ 处或在 } S_0 \text{ 上}. \quad (14)$$

#### 铁磁体弹性动力学方程

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f}^{\text{em}} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \text{在 } \Omega^+ \text{ 内}. \quad (15)$$

相应的边界条件

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \text{在 } S_u \text{ 上}, \quad (16)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{F}^{\text{em}}, \quad \text{在 } S_t \text{ 上,} \tag{17}$$

其中,  $\mathbf{u}^*$  表示位移边界  $S_u$  上的指定位移. 磁体力  $\mathbf{f}^{\text{em}}$  和磁面力  $\mathbf{F}^{\text{em}}$  分别表示为

$$\mathbf{f}^{\text{em}} = \frac{\mu_0 \mu_r \chi}{2} \nabla (\mathbf{H}^+)^2, \quad \text{在 } \Omega^+ \text{ 内,} \tag{18}$$

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = - \frac{\mu_0 (\mu_r^2 - 1)}{2} (H_t^+)^2 \mathbf{n}, \quad \text{在 } S_t \text{ 上,} \tag{19}$$

上式中,  $H_t^+$  表示磁场强度  $\mathbf{H}^+$  的切向分量,  $\mathbf{n}$  表示铁磁体外法向单位矢量. 由方程(11) ~ (12) 可以看出: 铁磁体内、外区域的磁场分布依赖于铁磁体的当前构型(即铁磁体的变形), 于是磁体力和磁面力为位移的函数, 方程(15)为一非线性偏微分方程.

## 2 铁磁杆的磁弹性振动

本节中, 我们将基于上节所建立的磁弹性动力学模型对铁磁杆磁场中的磁弹性振动问题进行分析. 如图 1 所示, 一圆截面软铁磁弹性杆处于外加的横向磁场  $\mathbf{B}_0$  中, 铁磁杆的横截面半径记为  $a$ , 长度为  $L$ . 为方便起见, 以下分析中采用了直角坐标  $\{Oxyz\}$  和柱坐标系  $\{Or\theta z\}$ .

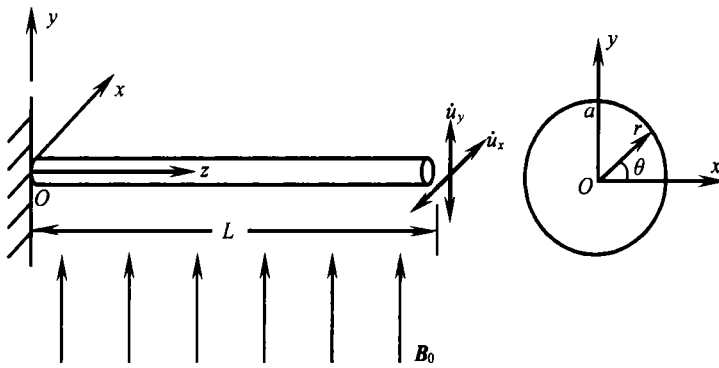


图 1 横向磁场中的圆截面铁磁杆

首先对铁磁杆变形前的磁场分布进行分析. 对于细长铁磁杆(即:  $L \gg a$ ), 磁场的端部效应可忽略, 由磁场方程(11) ~ (14)给出未变形的“刚性”铁磁杆的磁场基本方程如下:

$$\frac{\partial^2 \Phi^+}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi^+}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^+}{r^2 \partial \theta^2} = 0, \quad \text{在 } \Omega^+ (\mathbf{u} = \mathbf{0}) \text{ 内,} \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^-}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi^-}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^-}{r^2 \partial \theta^2} = 0, \quad \text{在 } \Omega^- (\mathbf{u} = \mathbf{0}) \text{ 内,} \tag{21}$$

$$\Phi^+ = \Phi^-, \quad \mu_r \frac{\partial \Phi^+}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial r}, \quad \text{在 } r = a \text{ 上,} \tag{22}$$

$$-\nabla \Phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}, \quad \text{在 } S_0 \text{ 上或 } \infty \text{ 处,} \tag{23}$$

这里,  $\Phi^+$  或  $\Phi^-$  表示未变形铁磁杆内或外的磁标势.

求解方程(20) ~ (23), 不难得到如下的解:

$$\mathbf{H}_0^+ = - \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \Phi^+ = \frac{2B_0}{\mu_0 (\mu_r + 1)} (\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta), \tag{24}$$

在  $\Omega^+ (\mathbf{u} = \mathbf{0})$  内,

$$\mathbf{H}_0^- = - \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \Phi^- =$$

$$\frac{B_0}{\mu_0} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \mathbf{e}_r \sin\theta + \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \mathbf{e}_\theta \cos\theta \right],$$

在  $\Omega^- (\mathbf{u} = \mathbf{0})$  内, (25)

其中,  $\mathbf{e}_r$  和  $\mathbf{e}_\theta$  分别表示沿柱坐标  $r$  和  $\theta$  方向的单位矢量. 接下来我们将分别对铁磁杆沿外加磁场方向( $y$  轴) 和垂直磁场方向( $x$  轴) 的两种振动模式下的频率特性进行分析.

### 2.1 铁磁杆沿磁场方向的振动

采用经典的 Bernoulli-Euler 梁理论, 铁磁悬臂杆的振动方程与边界条件可表示为

$$EJ \frac{\partial^4 u_y}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = q_y^{\text{em}}(z, t) \quad (0 < z < L), \quad (26)$$

$$z = 0: u_y = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (27)$$

$$z = L: \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} = 0, \quad (28)$$

其中,  $E$  和  $J$  分别表示弹性模量和截面惯性矩,  $A$  表示铁磁杆横截面面积,  $q_y^{\text{em}}$  为作用于铁磁杆轴线上并沿着振动方向( $y$  轴方向) 等效磁力, 即

$$q_y^{\text{em}}(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{f}^{\text{em}} \cdot \mathbf{e}_y r dr d\theta + \int_0^{2\pi} [\mathbf{F}^{\text{em}} \cdot \mathbf{e}_y]_{r=a} a d\theta, \quad (29)$$

这里我们采用摄动方法来分析铁磁杆变形后的磁场分布. 令  $\bar{u}_y(z)$  为铁磁杆振动问题所对应的特征函数, 并有

$$u_y(z, t) = \alpha_1 \bar{u}_y(z) e^{i\omega_1 t}, \quad (30)$$

其中,  $\alpha_1$  为一小的正数,  $\omega_1$  表示振动频率.

考虑到变形前、后坐标  $\bar{y}$  和  $y$  的关系:

$$\bar{y} = y + u_y(z, t) = y + \alpha_1 \bar{u}_y(z) e^{i\omega_1 t}, \quad (31)$$

则铁磁杆变形后构型上的磁场强度  $\mathbf{H}^+(x, \bar{y}, z, t)$  可以通过变形前的  $\mathbf{H}_0^+(x, y, z)$  进行渐进展开为

$$\mathbf{H}^+(x, \bar{y}, z, t) = \mathbf{H}_0^+(x, y) + \alpha_1 \bar{u}_y(z) \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(x, y)}{\partial y} e^{i\omega_1 t} + \dots \quad (32)$$

考虑到笛卡尔直角坐标系与柱坐标系的关系, 有下列关系式:

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \quad (33)$$

将“刚性”磁场分布式(24)和(33)代入式(32), 则

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(r, \theta, z, t) = & \mathbf{H}_0^+(r, \theta) + \alpha_1 \bar{u}_y(z) \left[ \sin\theta \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(r, \theta)}{\partial \theta} \right] e^{i\omega_1 t} + \dots = \\ & \frac{2B_0}{\mu_0(\mu_r + 1)} (\mathbf{e}_r \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta) + \\ & \alpha_1 \bar{u}_y(z) \frac{2B_0}{\mu_0(\mu_r + 1)} \left( \frac{\cos^2\theta}{r} \mathbf{e}_r - \frac{\sin 2\theta}{2r} \mathbf{e}_\theta \right) e^{i\omega_1 t} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

由磁力表达式(18)~(19), 并忽略关于  $\alpha_1$  的二阶以上小量便可获得作用于铁磁杆上的磁体力和磁面力:

$$\mathbf{f}^{\text{em}} = \frac{\mu_0 \mu_r \chi}{2} \nabla (\mathbf{H}^+)^2 = \mathbf{0}, \quad (35)$$

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = -\frac{\mu_0(\mu_r^2 - 1)}{2}(H_r^+)^2 \mathbf{n} = -\frac{2B_0^2\chi}{\mu_0(\mu_r + 1)} \left[ 1 - 2\alpha_1 \bar{u}_y \frac{\sin\theta}{r} e^{i\omega_1 t} \right] \mathbf{e}_r \cos^2\theta. \quad (36)$$

相应的铁磁杆轴线上的等效磁力为

$$q_y^{\text{em}}(z, t) = \frac{B_0^2\pi\chi}{\mu_0(\mu_r + 1)} \alpha_1 \bar{u}_y(z) e^{i\omega_1 t}. \quad (37)$$

将式(37)代入式(26)~(28),则可以得到关于  $\bar{u}_y(z)$  的特征方程如下:

$$EJ \frac{d^4 \bar{u}_y(z)}{dz^4} - \frac{B_0^2\pi\chi}{\mu_0(\mu_r + 1)} \bar{u}_y(z) = \rho A \omega_1^2 \bar{u}_y(z) \quad (0 < z < L), \quad (38)$$

$$z = 0: \bar{u}_y = 0, \quad \frac{d\bar{u}_y}{dz} = 0, \quad (39)$$

$$z = L: \frac{d^2 \bar{u}_y}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^3 \bar{u}_y}{dz^3} = 0. \quad (40)$$

这里,采用 Galerkin 方法进行铁磁杆在外加磁场下的频率近似计算,并选取悬臂梁自由振动的特征函数为<sup>[15]</sup>

$$\bar{u}_y(z) = z \sin\beta - z \sinh\beta + \frac{L \cos\beta + L \cosh\beta}{L \sin\beta - L \sinh\beta} (z \cos\beta - z \cosh\beta). \quad (41)$$

显然特征函数式(41)满足了悬臂铁磁杆的所有边界条件,即式(39)~(40).将式(41)代入式(38)并对方程两边关于  $z$  从 0 到  $L$  进行积分,则可得到频率关系式

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\rho A} \frac{B_0^2\pi\chi}{\mu_0(\mu_r + 1)}, \quad (42)$$

其中

$$\omega_0^2 = \int_0^L EJ \frac{d^4 \bar{u}_y}{dz^4} \bar{u}_y dz \Big/ \left( \int_0^L \rho A \bar{u}_y^2 dz \right) = \frac{EJ\beta^4}{\rho A} \quad (43)$$

为悬臂杆的自由振动固有频率.由式(42)可以看出:铁磁杆的磁弹性振动频率随着外加磁场  $B_0^2$  的增大而降低,当外加磁场  $B_0^2$  达到某一临界值时频率降为 0(即  $\omega_1^2 = 0$ ),此时铁磁杆将出现与外加横向磁场中铁磁板类似的磁弹性屈曲现象<sup>[1-2]</sup>,相应的临界磁场可表示为

$$\frac{B_c^2}{\mu_0 E} = \frac{J\beta^4(\mu_r + 1)}{\pi\chi}. \quad (44)$$

这里,不妨考虑一阶振动模式,即取特征值的近似值  $\beta = 1.875/L$ (见文献[15]),并将铁磁杆横截面惯性矩  $J = \pi a^4/4$  代入式(44),得到

$$\frac{B_c}{\mu_0 E} = (1.875)^2 \sqrt{\frac{\mu_r + 1}{\chi}} \left( \frac{L}{a} \right)^{-2}. \quad (45)$$

上式表明,铁磁杆沿外加磁场方向振动情形下的磁弹性屈曲临界值与杆的长、截面半径之比  $L/a$  成  $-2$  次方.这一频率降低的预测结果与 Moon<sup>[13]</sup> 的实验观测结果定性上相一致.但由于原文中没有给出铁磁杆的相关材料参数与磁学性能参数的细节,本文尚未给出模型预测值与实验结果的对比.进一步的对比工作有待于今后开展较为精细的实验测试以及在理论预测模型中对于磁场的分析要考虑到铁磁杆的有限尺寸引起的磁场端部效应等.

## 2.2 铁磁杆垂直于磁场方向的振动

记  $u_x$  为铁磁悬臂杆垂直于外加磁场方向的振动位移,则不难得到此种情形下相应的振动方程和边界条件:

$$EJ \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = q_x^{\text{em}}(z, t) \quad (0 < z < L), \quad (46)$$

$$z = 0: \quad u_x = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \tag{47}$$

$$z = L: \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} = 0, \tag{48}$$

这里,  $q_x^{em}$  表示作用于铁磁杆轴线上的等效磁力,其表示如下:

$$q_x^{em}(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{f}^{em} \cdot \mathbf{e}_x r dr d\theta + \int_0^{2\pi} [\mathbf{F}^{em} \cdot \mathbf{e}_x]_{r=a} a d\theta. \tag{49}$$

令  $\bar{u}_x(z)$  为特征函数以及  $\bar{x}$  为铁磁杆变形后构型上的一点,  $x$  为对应的变形前状态下的点的坐标,则有

$$u_x(z, t) = \alpha_2 \bar{u}_x(z) e^{i\omega_2 t}, \tag{50}$$

$$\bar{x} = x + \alpha_2 \bar{u}_x(z) e^{i\omega_2 t}, \tag{51}$$

$$\mathbf{H}^+(\bar{x}, y, z, t) = \mathbf{H}_0^+(x, y) + \alpha_2 \bar{u}_x(z) \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(x, y)}{\partial x} e^{i\omega_2 t} + \dots, \tag{52}$$

这里,  $\alpha_2$  为一小的正数,  $\omega_2$  表示频率. 两种不同坐标系下有关系式

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \tag{53}$$

进一步将磁场分布式(24)和(53)代入式(52),则考虑变形影响的铁磁杆内的磁场分布为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(r, \theta, z, t) = & \mathbf{H}_0^+(r, \theta) + \alpha_2 \bar{u}_x(z) \left[ \cos\theta \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{H}_0^+(r, \theta)}{\partial \theta} \right] e^{i\omega_2 t} + \dots = \\ & \frac{2B_0}{\mu_0(\mu_r + 1)} (\mathbf{e}_r \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta) + \\ & \alpha_2 \bar{u}_x(z) \frac{2B_0}{\mu_0(\mu_r + 1)} \left( -\frac{\sin 2\theta}{2r} \mathbf{e}_r + \frac{\sin^2 \theta}{r} \mathbf{e}_\theta \right) e^{i\omega_2 t} + \dots. \end{aligned} \tag{54}$$

利用式(18)~(19), (49)和(54),可以得到等效磁力为

$$q_x^{em}(z, t) = -\frac{B_0^2 \pi \chi}{\mu_0(\mu_r + 1)} \alpha_2 \bar{u}_x(z) e^{i\omega_2 t}. \tag{55}$$

进一步应用 Galerkin 方法并采用与前面类似的计算频率方法可以获得

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{\rho A} \frac{B_0^2 \pi \chi}{\mu_0(\mu_r + 1)}, \tag{56}$$

其中

$$\omega_0^2 = \int_0^L EJ \frac{d^4 \bar{u}_x}{dz^4} \bar{u}_x dz \bigg/ \left( \int_0^L \rho A \bar{u}_x^2 dz \right) = \frac{EJ\beta^4}{\rho A}. \tag{57}$$

从式(56)可以看出:与铁磁杆沿外加磁场方向的振动特性不同,沿着垂直于磁场方向的振动频率随着外加磁场  $B_0^2$  的增大而升高,这一结果与 Moon<sup>[13]</sup>的实验结果是相吻合的.

### 2.3 基于磁体力偶模型的振动频率预测

Moon 和 Pao<sup>[1,2]</sup>从微电流机制的偶极子模型出发提出了磁体力偶模型,并将其应用于横向磁场中铁磁板的磁弹性屈曲现象的预测,该模型中所对应的磁体力偶表示为

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}^+ \times \mathbf{B}_0 = \chi \mathbf{H}^+ \times \mathbf{B}_0. \tag{58}$$

则作用于铁磁杆轴线上的等效磁力偶可表示为

$$\mathbf{C} = \chi \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{H}^+ \times \mathbf{B}_0 r dr d\theta. \tag{59}$$

将前面所获得的铁磁杆沿着磁场方向振动所对应的磁场分布式(34),或垂直于磁场振动的磁

场分布式(54)代入上面的等效磁力偶表达式中,均得到了  $C = 0$ , 即等效磁力偶为 0。这就意味着基于磁体力偶模型无法预测出处于外加磁场中铁磁杆的振动频率的改变。

### 3 结 论

基于磁弹性广义变分原理及 Hamilton 原理,本文建立了一处于外加磁场中铁磁体的磁弹性动力学模型。通过对系统广义磁弹性能的变分获得了关于准静态磁场、力学变形场的所有基本方程以及作用于铁磁体上的磁体力与磁面力的表达式。进一步采用摄动技术与 Galerkin 方法,将所建立的理论模型应用于横向磁场中铁磁杆的两种振动模式下的频率特性分析中,并首次预测了已有文献中的实验结果,即铁磁杆沿着磁场方向的磁弹性振动频率将随外加磁场的增大而降低并出现磁弹性屈曲现象,而铁磁杆垂直于外加磁场方向的振动频率将随外加磁场的增大而升高。

#### [参 考 文 献]

- [1] Moon F C, Pao Y H. Magnetoelastic buckling of a thin plate[J]. *ASME J Appl Mech*, 1968, **35**(1):53-58.
- [2] Moon F C, Pao Y H. Vibration and dynamic instability of a beam-plate in a transverse magnetic field [J]. *ASME J Appl Mech*, 1969, **36**(1):1-9.
- [3] Dalrymple J M, Peach M O, Viegela G L. Magnetoelastic buckling of thin magnetically soft plate in cylinder model[J]. *ASME J Appl Mech*, 1974, **41**(1):145-150.
- [4] Miya K, Hara K, Someya K. Experimental and theoretical study on magnetoelastic buckling of a ferromagnetic cantilevered beam-plate[J]. *ASME J Appl Mech*, 1978, **45**(3):355-360.
- [5] Peach M O, Christopherson N S, Dalrymple J M, et al. Magnetoelastic buckling: why theory and experiment disagree[J]. *Exp Mech*, 1988, **28**(1):65-69.
- [6] Brown W F. *Magnetoelastic Interaction*[M]. Tracts. In: *Natural Philosophy*, No. 9. Berlin: Springer, 1966.
- [7] Pao Y H, Yeh C S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solid[J]. *Internat J Engng Sci*, 1973, **11**(4):415-436.
- [8] Van Lieshout P H, Rongen P M J, Van de Ven A A F. A variational principle for magnetoelastic buckling[J]. *J Engng Math*, 1987, **21**:227-252.
- [9] Tagaki T, Tani J, Matsubara Y, et al. Electromagneto-mechanical coupling effects for non-ferromagnetic and ferromagnetic structures[A]. In: Miya K, Ed. *Proc 2nd Internat Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and Other Structures Surrounding the Fission Plasma Torus*[C]. Japan: Tokai, 1993, 81-90.
- [10] ZHOU You-he, ZHENG Xiao-jing. A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic fields[J]. *Internat J Engng Sci*, 1997, **35**(15):1405-1417.
- [11] ZHOU You-he, ZHENG Xiao-jing. A generalized variational principle and theoretical model for magnetoelastic interaction of ferromagnetic bodies[J]. *Science in China, Ser A*, 1999, **42**(6):618-626.
- [12] ZHENG Xiao-jing, ZHOU You-he, WANG Xing-zhe, et al. Bending and buckling of ferroelastic plates [J]. *ASCE J Eng Mech*, 1999, **125**(2):180-185.
- [13] Moon F C. Problems in magneto-solid mechanics[A]. In: *Mechanics Today*[C]. Vol 4 (A78-35706 14-70). New York: Pergamon Press, Inc, 1978. 307-390.
- [14] WANG Xing-zhe, Lee J S, ZHENG Xiao-jing. Magneto-thermo-elastic instability of ferromagnetic



plates in thermal and magnetic fields[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2003, 40(22):6125-6142.

[15] Meirovitch L. *Analytical Methods in Vibrations*[M]. New York: Macmillan, 1967.

## Changes of Natural Frequency of a Ferromagnetic Rod in Magnetic Field Due to Magnetoelastic Interaction

WANG Xing-zhe

(*Key Laboratory of Mechanics on Western Disasters and Environment, Ministry of Education of China; College of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China*)

**Abstract:** Based on magnetoelastic generalized variational principle and Hamilton's principle, a dynamic theoretical model characterizing the magnetoelastic interaction of a soft ferromagnetic medium in an applied magnetic field is developed. From variational manipulation respectively on magnetic scale potential and elastic displacement, the all fundamental equations for the magnetic field and mechanical deformation, as well as the the magnetic body force and magnetic traction for describing magnetoelastic interaction, were derived. The theoretical model was applied to a ferromagnetic rod vibrating in an applied magnetic field by means of perturbation technique and Galerkin method. The results show that the magnetic field will change the natural frequencies of the ferromagnetic rod by decrease as the bending motion along the applied magnetic field where the magnetoelastic buckling will take place, but by increase when bending motion of the rod is perpendicular to the field. The prediction by the model qualitatively agrees with the natural frequency changes of the ferromagnetic rod observed in the experiment.

**Key words:** ferromagnetic rod; magnetoelastic interaction; generalized variational principle; vibration frequency; perturbation method