

# 部分植被化复式河道水流的二维解析解\*

槐文信, 徐冶钢, 杨中华, 曾玉红

(水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉大学, 武汉 430072)

(戴世强推荐)

**摘要:** 运用涡粘模型理论对部分植被化复式河道的水流水深平均流速和边壁切应力分布进行了求解。通过对水流微元体进行纵向受力分析建立相应的控制微分方程, 其中植被对水流的影响归结为拖曳力项。同时将复式渠道划分为 3 个子区域, 通过联立求解各区域微分方程中的定解系数, 最终得到均匀流的条件下各区水深平均流速的横向分布的解析解。在获得水深平均流速的横向分布后, 可进一步给出对泥沙输移有重要影响的河床切应力的横向分布。通过与试验测得的资料比较, 表明给出的解析解能够为工程设计提供足够精度的水力特性的预报。

**关键词:** 复式河道; 水深平均流速; 拖曳力; 涡粘模型; 解析解; 植被

**中图分类号:** TV133 **文献标识码:** A

## 引言

有植被的河道水流是一种特殊而复杂的水流问题, 正确理解流经植被的水动力特性对河道管理和进行有植被渠道的设计有十分重要的作用。自 20 世纪 80 年代后期开始, 陆续有学者根据实际工程的需要, 有针对性地开展相关的研究工作。当水流流经柔性植被时, 植被的弯曲流线化和波动十分明显, Wilson 等人<sup>[1]</sup>认为植被的形状及柔韧性变化幅度大, 由于这种波动和变形作用, 柔性植被对水流结构的影响定量化始终没有得到很好的解决, 有代表性的如 Jarvela<sup>[2]</sup>对柔性淹没植被对于水流结构和阻力的影响进行的研究。同时为了发展河道内有柔性植被的阻力率, 许多研究人员进行了大量的研究工作 (Carollo 等人<sup>[3]</sup>, Kouwen 和 Fathi-Moghadam<sup>[4]</sup>)。至于刚性植被水流的研究, Hsieh<sup>[5]</sup>及 Li 和 Shen<sup>[6]</sup>对矩形渠道中圆柱后的波进行研究以检验大树的阻流作用, 他们的试验结果表明种树密度和排列模式对流速有很大影响。Pasche 和 Rouve<sup>[7]</sup>对滩地有植被的复式断面水流问题进行了研究, 物理模型为: 梯形主槽并带有河漫滩地, 滩地种树且不淹没, 他们认为水流可简化为只考虑横向与纵向的二维物理过程, 并对滩槽有动量交换部分纵向流速的横向分布的线型分别用三次幂函数和对数曲线进行了模拟, 公式看起来简单, 却不利于实际应用。在进行河岸植被对水流影响试验的同时, 许多学者试图通过求解特定的水流运动微分方程来研究河岸植被对水流的影响, 典型的方法为三维代数应力模型 (ASM) 和大涡模拟技术 (LES)。最近国内的一些科研院所也有对飘游水生植物对

\* 收稿日期: 2007-10-12; 修订日期: 2008-07-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50679061; 50709025; 50749031)

作者简介: 槐文信 (1963—), 男, 陕西乾县人, 教授; 博士生导师 (联系人, Tel: + 86-27-68772211; E-mail: wxhuai@whu.edu.cn)。

水流特性进行了相关研究,如河海大学的朱红钧对凤眼莲生态型河道进行了水流特性的实验研究,从时均流速、紊动强度、雷诺应力 3 个角度比较种植凤眼莲前后水流运动的变化。

本文拟对河漫滩非淹没的刚性植被对纵向水深平均流速的横向分布的影响进行研究,和以往的试验研究及数值模拟不同的是,本文将基于恒定均匀流假定,给出其解析解。这方面 Shiono 和 Knight<sup>[8-9]</sup>对复式断面无植被水流,基于水深平均涡粘性方法和动量方程,在恒定均匀流的合理假设下,给出了复式断面水深平均纵向流速的横向分布解析解。本文对河漫滩有植被水流,在未计及二次流的情况下,给出的解析解对工程设计应用依然有足够的精度。至于滩槽间的强动量交换及二次流等的影响,将是后续研究的主要方向。

### 1 理论分析

对于横断面如图 1 所示的河道内的恒定均匀流,控制微元体主流方向所受的表面合力应该和它受到的体积力相平衡,如图 2 所示,既有

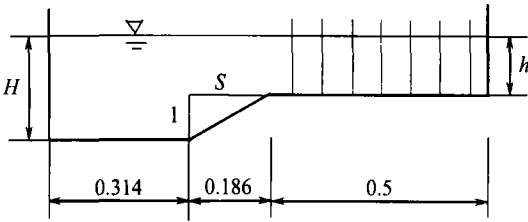


图 1 有植被复式断面形状示意图  
(长度单位 m)

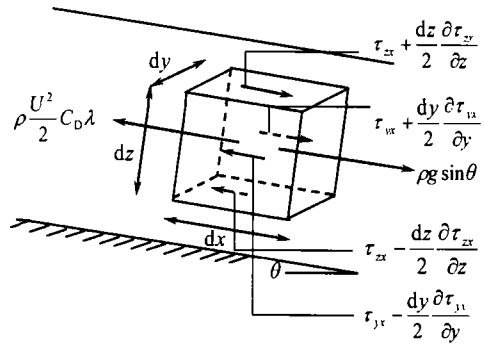


图 2 纵向受力分析

$$\rho g \sin \theta dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda dx dy dz = 0, \quad (1)$$

这里,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别为主流方向、横向、以及垂向,  $\rho$  为水的密度,  $\theta$  为河床倾斜角 ( $S_0 = \sin \theta$ ),  $\tau_{ij}$  为垂直于  $i$  方向的平面上的切应力, 方向与  $j$  方向相同。  $C_D$  为拖曳力系数,  $\lambda$  为植被系数:  $\lambda = D/(sl)$ ,  $D$  为单颗植株的直径,  $l$ 、 $s$  是控制微元体的纵横宽度。

式(1)中:  $\rho(U^2/2)C_D\lambda dx dy dz$  为植株对水流的阻力, 为获得解析解, 本文将该项归结为拖曳力。

对式(1)沿水深  $H$  积分, 得到水深平均方程。 因此, 对  $S_0 = \sin \theta$ , 有

$$\rho g S_0 H dx dy - \tau_{zb} dx dy + \left( \int_{z_0(y)}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz \right) dy dx - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H dx dy = 0$$

即

$$\rho g S_0 H - \tau_{zb} + \int_{z_0(y)}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0. \quad (2)$$

对式(2)第 3 项用莱布尼兹(Liebnitz)公式

$$\int_{z_0(y)}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz = \frac{d}{dy} \int_{z_0}^{z_s} \tau_{yx} dz + \tau_{yx}(z_0) \frac{\partial z_0}{\partial y} - \tau_{yx}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3)$$

同时引入水深平均横向切应力

$$\overline{\tau_{yx}} = \frac{1}{H} \int_{z_0}^{z_s} \tau_{yx} dz,$$

这里,  $z_s = \text{const}$  和  $z_0 = -y/s$ . 在边坡上, 式(2)可化为

$$\rho g S_0 H - \tau_{zb} - \frac{\tau_{yb}}{s} + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0, \tag{4}$$

其中:  $\tau_{zb}$  和  $\tau_{yb}$  为河床处的切应力, 通过对图 3 中所示的切应力平衡进行分析, 它们与河床切应力  $\tau_b$  的关系可表示为

$$\tau_{yb} dz dx + \tau_{zb} dy dx = \tau_b (dz^2 + dy^2)^{1/2} dx$$

且  $dz/dy = 1/s$ , 则有

$$\frac{\tau_{yb}}{s} + \tau_{zb} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} \tau_b, \tag{5}$$

所以在河床上应用边界切应力  $\tau_b$ , 方程(4)可化为

$$\rho g S_0 H - \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} \tau_b + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0. \tag{6}$$

对于水深  $H$  恒定区域 ( $s \rightarrow \infty$ ), 在图 1 中即为复式断面的主河道及河漫滩部分, 式(6)变成了 ( $\tau_{zb} \rightarrow \tau_b$  当  $s \rightarrow \infty$ )

$$\rho g S_0 H - \tau_b + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0, \tag{7}$$

注意到  $\tau_{yb} + s\tau_{zb} = \sqrt{1+s^2} \tau_b$ , 则有  $\tau_{yb} \rightarrow \tau_b$  当  $s \rightarrow 0$ .

在阻力平方律的假设下, 基于 Darcy-Weisbach 阻力系数  $f$ , Boussinesq 涡粘系数  $\xi_{xy}$  和无量纲涡粘模型, 即

$$f = \frac{8\tau_b}{\rho U^2}, \quad \overline{\tau_{yx}} = \rho \xi_{yx} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \xi_{yx} = \zeta H U_* = \zeta H \left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} U,$$

则适用于线性斜坡区域的式(6)及适用于水深相同的区域的式(7)可获得解析解. 从而, 应用边界切应力  $\tau_b$ , 式(6)可表示为

$$\rho g S_0 H - \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} \tau_b + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \zeta H^2 \left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} U \frac{\partial U}{\partial y} \right\} - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0. \tag{8}$$

因为  $f = 8\tau_b/(\rho U^2)$ , 所以  $\tau_b = \rho f U^2/8$ , 代入式(8), 可得水深平均流速方程, 或者利用水深平均流速, 可表示为

$$\rho g S_0 H - \rho \frac{f}{8} U^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \zeta H^2 \left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} U \frac{\partial U}{\partial y} \right\} - \rho \frac{U^2}{2} C_D \lambda H = 0. \tag{9}$$

方程(8)、(9)在给定合适的边界条件下, 都有解析解. 但对于梯形复式断面河道, 相比边界切应力, 速度的边界条件更容易给定. 所以解方程(9)更为简单, 在这种情况下, 对水深恒定区域, 方程(9)的解析解形式为

$$U = \left[ C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y} + \frac{g S_0 H}{f/8 + C_D \lambda H/2} \right]^{1/2}. \tag{10}$$

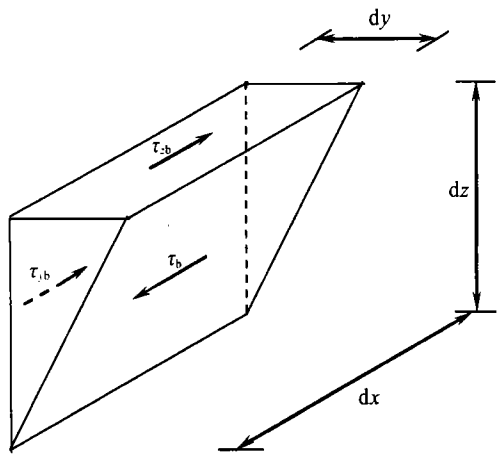


图 3 边坡区切应力

对线性边坡区域,  $0 < s < \infty$ , 有

$$U = [C_3 Y^{\alpha_1} + C_4 Y^{-\alpha_1-1} + \omega Y]^{1/2}, \tag{11}$$

式中

$$r = \sqrt{\frac{f/8 + C_D \lambda H/2}{(1/2) \zeta H^2 (f/8)^{1/2}}}, \alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s \sqrt{1+s^2}}{\zeta} \sqrt{8f} \right),$$

$$\omega = \frac{g S_0}{(\sqrt{1+s^2/s})(f/8) - (\zeta/s^2)(\sqrt{f/8})},$$

同时,  $Y$  为边坡区域的水深函数。

## 2 边界条件

为了和已有的试验数据进行比较, 本文仅对如图 1 所示的特殊的梯形复式河道进行研究。整个复式河道分作 3 个子区域, 即: 主河槽区域、主槽边斜坡区域、河漫滩区域(相应地称为: 1、2、3 区)。由于式(10)、(11)中均有 2 个未知常数, 所以为了获得解析解, 就需要 6 个边界条件。这 6 个边界条件为

- 1) 在主槽垂直壁附近采用壁函数律, 给出近壁处的速度, 可得到 1 个边界条件;
- 2) 所有区域间的连接处必须满足速度连续性, 于是可得到 4 个边界条件(例:  $U_i = U_{i+1}$ ,  $\partial U_i / \partial y = \partial U_{i+1} / \partial y$ );
- 3) 河漫滩边缘的流速为 0 ( $U = 0$ )。

所以通过求解 6 个线性方程就可以得到解析解中所需的未知常数。

## 3 试验数据

Pasche 和 Rouve<sup>[7]</sup>通过试验对河漫滩上非淹没植株对水深平均流速横向分布的影响进行了研究。试验是在长 25.50 m, 宽 1.00 m 的复式渠道中进行的, 采用激光多普勒测速仪获得流速值, 试验工况分为 3 组, 具体工况见表 1。

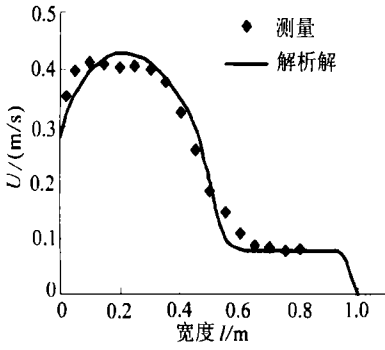
表 1 Pasche 和 Rouve 的试验工况

组号	主槽水深 $H/m$	边滩水深 $h/m$	边坡坡度 $S/(‰)$	植株直径 $D/m$	植被密度 $\lambda/m^{-1}$
a	0.20	0.076	0.5	0.012	1.34
b	0.20	0.076	0.5	0.012	2.69
c	0.20	0.076	1.0	0.012	10.76

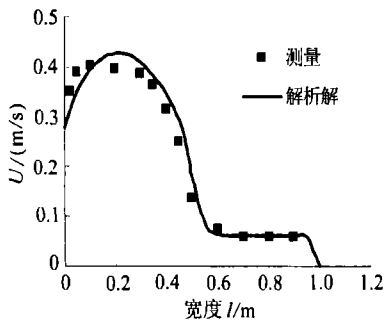
Pasche 和 Rouve 试验给出的 3 种工况下断面平均流速及其切应力分布的结果绘于图 4 和图 5 中。

## 4 参数的确定及模型的应用

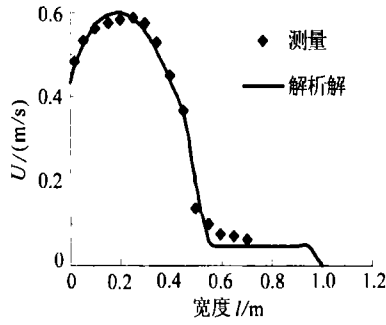
对于上文提及的无量纲涡粘模型  $\xi_{yx} = \zeta H U_* = \zeta H (f/8)^{1/2} U$ , 其中的常数  $\zeta$ , 许多研究人员通过研究认为, 其值不变。Pasche 等人<sup>[7]</sup>在主槽及河漫滩处取不同的  $\zeta$  值, 以使他们的  $k-\epsilon$  模型和试验数据符合的更好。鉴于主槽区为无植被水流, 可取为明渠流标准的二维水深平均值(0.067), 有植被的河漫滩区域  $\zeta$  值的选定, 可参考无植被水流, 主槽与边滩区域  $\zeta$  值之间具有的经验关系( $\zeta_3/\zeta_1 = (2Dr)^{-4}$ ,  $Dr = (H-h)/H$ ), 同时考虑到许多数值模型给定的区域  $[0.15, 0.50]$ , 进行取值, 以取得较为满意的结果。边坡区的  $\zeta$  值取主槽区的 2 倍左右(0.14



(a) 植被密度  $\lambda = 1.34$

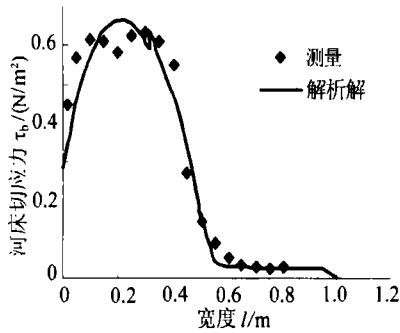


(b) 植被密度  $\lambda = 2.69$

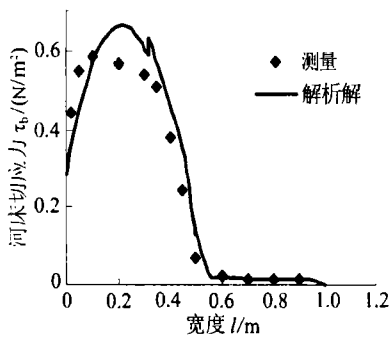


(c) 植被密度  $\lambda = 10.76$

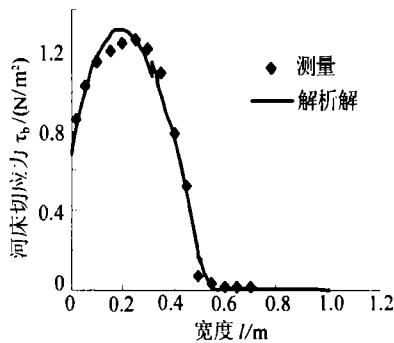
图4 计算与测量水深平均流速横向分布图



(a) 植被密度  $\lambda = 1.34$



(b) 植被密度  $\lambda = 2.69$



(c) 植被密度  $\lambda = 10.76$

图5 计算与测量河床切应力横向分布图

或者 0.15)。

为了有效地应用(10)、(11)两式,各区的阻力系数  $f$  必须给定。在无植被的情况下,Shiono 根据实验数据,给出了相应工况下各区  $f$  值的横向分布图。从图中可选得较为合理的  $f$  值。对于河漫滩上有植被的情况,却没有给出。本文根据基本的水力学公式,推导出一个更为简便的关于  $f$  的公式:

因为  $J = f U^2 g R / 8$  (水力学中的水力坡度经验公式),

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \text{ (谢才,曼宁公式综合结果)}$$

所以

$$f = 8 g n^2 / R^{1/3}, \tag{12}$$

其中,  $n$  为糙率,  $R$  为水力半径,  $g$  为重力加速度,这个公式只是一个近似公式,根据解析解给出的结果(见图4、图5),表明该公式可以应用。

根据式(12)得到 1、3 两区  $f$  值分别为 0.029, 0.033, 2 区  $f$  值取 1、3 两区的均值为 0.031。

利用前面给出的参数,最终可得到关于水深平均流速的横向解析解,结果如图4所示,表明解析解模型能够预报

$U$  的横向分布。由于没有考虑二次流影响,使得计算得到的 3 区流速略小于试验给出的速度,但解析解给出的值和试验值大部分符合得较好,可以应用于实际工程。得到水深平均流速以后,河床切应力也就可以确定下来,结果绘于图 5 中,可见实测值与解析解吻合较好。

## 5 讨 论

本文给出的河漫滩上有植被的复式断面水深平均流速横向分布的解析解模型,对于从事洪水减灾项目的工程人员来说,是一个十分有效的应用方法。对于一个给定的水位,横向方面的求和不仅可以得到总流量,相应于多层次河道,每个分区的流量百分比,也能十分方便的求得。为了求得河道过水流量,必须给定河道水位,横断面形状以及糙率等条件。此外,利用当地摩阻流速,可以求得明渠流中河床切应力的横向分布,这对于泥沙输移理论也是十分重要的。

本文所得结果为解析解模型,是建立在一些合理假定的基础上得到的,本文研究的对象为恒定均匀水流,是对应于梯形复式断面河漫滩有非淹没植被的情形,所以适用范围也就限于这种情况。同时,涡粘模型的引入参考了前人的研究工作,阻力系数  $f$  的确定,也借鉴了传统水力学中的经验公式,解析解模型给出的结果表明,这些假定都是较为合理的,有其实用价值。

## 6 结 论

1) 对于复式断面河漫滩上非淹没植被恒定均匀流,本文给出了解析解模型,并计算了水深平均流速,得到了它的横向分布;

2) 选用水深平均参数,使得三维问题得以简化为二维问题,给出的结果还是较为理想的。将复式河道划分为多个子区域,有利于分析局部区域的水流特性(比如有无植被),通过计算表明,获得的结果非常合理,可见该方法的选取比较合适。当然考虑到子区域间的对流交换现象,还需要做进一步的分析;

3) 子区域阻力系数  $f(f = 8gn^2/R^{1/3})$  的选定只是一个近似的估算,对于试验研究来说,糙率容易给定,得到的阻力系数  $f$  还是比较准确的,该方法简便易行。但对于天然河道,糙率的给定需要进行实地测量。更为精确的确定方法,有待进一步研究;

4) 无量纲涡粘系数  $\zeta$  的确定,参考了无植被水流给出的经验公式,对于主槽区(无植被)还是可以接受的,而在有植被的河漫滩区,通过计算发现,取值范围较大,植被密度对  $\zeta$  的影响十分明显。植被密度较小时(本文中  $\lambda = 1.34, 2.69$ ),  $\zeta$  值的选定可以参考无植被水流的取值,植被密度较大时(本文中  $\lambda = 10.76$ )  $\zeta(0.50)$  比无植被水流经验公式给出的 0.21 大得多。

### [参 考 文 献]

- [1] Wilson C A, Stoesser M E, Bates T, et al. Open channel flow through different forms of submerged flexible vegetation[J]. *J Hydraulic Engineering, ASCE*, 2003, 129(11): 847-853.
- [2] Jarvela J. Effect of submerged flexible vegetation on flow structure and resistance[J]. *Journal of Hydrology*, 2005, 307(1/4): 233-241.
- [3] Carollo F G, Ferro V, Termini D. Flow velocity measurements in vegetated channels[J]. *J Hydraulic Engineering ASCE*, 2002, 128(7): 664-673.
- [4] Kouwen N. Fathi-Moghadam M. Friction factors for coniferous trees along rivers[J]. *J Hydraulic Engineering*, 2000, 126(10): 732-740.

- [5] Hsieh T. Resistance of cylinder piers in open-channel flow[J]. *J of Hydraulic Div, ASCE*, 1964, **90** (HY1): 161-173.
- [6] Li R M, Shen H W. Effect of tall vegetation on flow and sediment[J]. *J of Hydraulic Div, ASCE*, 1973, **99**(5): 793-813.
- [7] Pasche E, Rouve G. Overbank Flow with vegetatively Roughened flood plains [J]. *J of Hydraulic Div, ASCE*, 1985, **119**(9): 1262-1278.
- [8] Shiono K, Knight D W. Two dimensional analytical solutions for a compound channel[A]. In: Iwasa Y, Tamai N, Wada A, Eds. *Proceedings of the third International Symposium on Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements*[C]. Tokyo, Japan: University Academy Press, 1988, 503-510.
- [9] Shiono K, Knight D W. Turbulent open channel flows with variable depth across the channel[J]. *J Fluid Mech*, 1991, **222**(1): 617-646.
- [10] Fischer-Antze T, Stoesser T, Bates P, et al. 3D numerical modelling of open-channel flow with submerged vegetation[J]. *J Hydraulic Research*, 2001, **39**(3): 303-310.

## Two Dimensional Analytical Solution for a Partially Vegetated Compound Channel Flow

HUAN Wen-xin, XU Zhi-gang, YANG Zhong-hua, ZENG Yu-hong  
(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science,  
Wuhan University, Wuhan 430072, P. R. China)

**Abstract:** The theory of eddy viscosity model is applied to the study of the flow in compound channel which was partially vegetated. The governing equation was constituted by analyzing the longitudinal forces acted on the unit volume where the effect of the vegetation to the flow is considered as the drag force item. The compound channel was divided into 3 sub-regions in transverse direction, and the coefficients in every region's differential equations were solved simultaneously. Thus the analytical solution of the transverse distribution of the depth-averaged velocity for uniform flow in partially vegetated compound channel is got. The results can also be used to predict the transverse distribution of the bed shear stress which has an important effect on the transportation of sediment. By comparing the analytical results with the measured data, the analytical solution was proved to be sufficiently accurate to predict most hydraulic features for engineering design purpose.

**Key words:** compound channel; depth-averaged velocity; drag force; eddy viscosity model; analytical solution; vegetation