

磁场和 Hall 电流对狭窄动脉中 血液流动的影响*

Kh·S·梅克赫默¹, M·A·El·科特²

(1.阿扎大学 理学院 数学系,纳什城 11884,开罗,埃及;

2.苏伊士运河大学 教育学院 数学系,苏伊士,埃及)

(周哲玮推荐)

摘要: 对一个水平向不对称、竖直向对称,带有轻微狭窄的动脉,提出了血液磁流体动力学流动的微极模型。为了估计狭窄形状的影响,几何上加以适当地考虑,通过选取不同的参数(称为形状参数),很方便地改变水平向的狭窄情况。在不同形状参数、Hartmann 数和 Hall 参数下,计算了流动参数,例如流速、流动阻力(阻力阻抗)、狭窄区域血管壁面剪应力分布以及狭窄最大凸起高度位置处(狭窄喉部)的壁面剪应力大小。结果表明,流动阻力随着确定狭窄情况参数值和 Hall 参数值的增大而减小,并随着 Hartmann 数的增大而增大。对任意给定的 Hartmann 数和 Hall 参数,血管壁面剪应力和血管狭窄部位凸起最大高度处的管壁剪应力,具有与流动阻力相反的特征。最后,给出了 Hartmann 数和 Hall 参数对水平速度的影响。

关键词: 血液磁流体动力学; 微极模型; 狭窄动脉; Hall 电流; Hartmann 数

中图分类号: O361.3;O361.4;Q66 **文献标识码:** A

引言

动脉硬化是严重影响人类健康的常见病,早期动脉硬化的损伤,并不是沿整个动脉系统随机分布的,而是在某些特定的位置产生和发展的,例如腹主动脉末端、冠状动脉和颈动脉的分叉处。我们发现,动脉硬化的起因和位置与局部血液动力因素(例如血管壁剪应力,等)密切相关。哺乳动物的动脉常常发生变窄,多年以来,研究者都致力于从实验和理论方面研究狭窄动脉中的血液流动模型。这是一个非常重要的研究领域,动脉疾病是西方世界导致死亡的首要原因。尽管动脉疾病的起因仍未知晓,但我们坚信,在动脉疾病的形成和发展过程中,流体动力学因素起着非常重要的作用。众所周知,75%的死亡原因是循环混乱引起的。胆固醇的沉积和结缔组织的激增,在动脉管壁上形成斑点,斑点向血管内生长并阻碍了血液的流动。动脉狭窄或硬化,意味着通道(管道和管口)变窄,动脉壁出现异常和不正常增厚,在一些特定位置出现,这时心血管系统患病了。

* 收稿日期: 2007-03-22; 修订日期: 2008-06-06

作者简介: Kh. S. Mekheimer(联系人, E-mail: kh_mekheimer@yahoo.com);

M. A. El Kot (E-mail: mahmoud_elkot77@hotmail.com).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校。

如果磁场作用于运动的导电液体,将感生出电场和磁场。电场和磁场的相互作用将产生体力,称为 Lorentz 力, Lorentz 力有阻碍液体运动的作用^[1]。Stud 等人^[2]研究了运动磁场对血液流动的作用,并指出适当的运动磁场可以加速血液的流动。Agrawal 和 Anwaruddin^[3]利用简单的数学模型,研究了血液通过具有柔性壁的等分叉通道时,磁场对血液流动的影响。他们利用长波长近似法生成蠕动波。他们发现,对于像动脉狭窄或动脉硬化等患病动脉中的血液流动,磁场的作用正像是心脏跳动输出血液的泵。当导电流体为电离气体或者作用的磁场强度很大时,由于在发生碰撞前电子和离子在磁力线周围作自由螺旋运动,从而磁场法线方向的导电性能减弱,并且电场和磁场法线方向的电流减弱。这一现象称为 Hall 效应。

Bharali 和 Borkakati^[4]研究了两个不导电多孔板间,在均匀强磁场作用下, Hall 电流对不可压缩粘性导电流体的磁流体动力学(MHD)流动的影响。Asghar 等人^[5]讨论了 Hall 电流对 Oldroyd-B 流体不稳定磁流体动力学流动的影响。Megahed 等人^[6]研究了在强非均匀磁场和 Hall 电流作用下,热浮力和多种对流的组合时对沿半无限竖直平板传热和传质的影响。Mohyuddin 和 Ashraf^[7]得到了 Hall 电流作用下,多孔介质通道中,不可压缩粘弹性流体流函数逆解的确定形式。Hayat 等人^[8]研究了 Hall 电流对多孔介质非 Newton 流体不稳定管道流动的影响。Hayat 等人^[9]讨论了 Hall 电流对二阶流体(非 Newton 流体)不稳定磁流体振荡流的影响。

按照 Eringen^[10]的分类,微极流体理论是微流体学的一个分支,在微极理论中,引入经典速度场、微转动矢量和旋转参数来研究微转动运动学。微极流体,例如液晶、悬浮液和动物的血液等,由不规则取向的杆-单元或哑铃状分子组成,每一体积单元围绕其质心微转动,同时在平均意义上作平动。微极流体理论与粘性流体的经典 Navier-Stokes 理论不同,使流体中次生出耦合应力,并造成应力张量的不对称性。Agarwal 和 Dhanapal^[11]研究微极模型时注意到如下事实:包含在小体积单元中的流体颗粒,除了伴随体积单元作刚体旋转外,还要围绕体积单元的质心旋转。血液是电的良好导体,已有众多的研究者^[12-23]研究了磁场作用下狭窄动脉中的血液流动。

本文研究轻微狭窄动脉中,磁场和 Hall 电流作用对微极流体(作为血液模型)流动的影响。本文的分析对粥样硬化的放射性(磁响应血管照相术)研究是有益的。

1 分 析

不计体力和体耦合时,在磁场作用下,不可压缩微极导电流体定常流的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \kappa \nabla \times \mathbf{w} + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\rho j(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{w}) = -2\kappa \mathbf{w} + \kappa \nabla \times \mathbf{V} - \gamma(\nabla \times \nabla \times \mathbf{w}) + (\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}), \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4)$$

其中, μ 为粘度常数, ρ 为密度。

考虑 Hall 效应时的广义 Ohm 定律为

$$\mathbf{J} = \sigma[\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \frac{\sigma}{en_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

这里,忽略了离子滑动和热-电效应,其中 \mathbf{B} 为总磁感应矢量, \mathbf{V} 为速度矢量, \mathbf{w} 为微转动矢量,

E 为电场矢量, J 为电流密度矢量, σ 为流体的导电率, e 为电荷, n_e 为电子数密度, μ_e 为磁导率, j 为微旋转参数. 此外, 材料常数(微极流体新粘度) μ 、 κ 、 α 、 β 和 γ 还需满足下列不等式^[10]:

$$2\mu + \kappa \geq 0, \kappa \geq 0, 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0, \gamma \geq |\beta|. \tag{6}$$

2 问题的数学描述

假设血液为不可压缩微极流体, 粘度常数为 μ , 密度为 ρ . 假设在两壁间宽度为 $2d_0$ 的通道内, 研究不可压缩微极流体的二维稳定磁流体动力学流动. 设 x 轴沿壁面方向, y 轴垂直于壁面. 沿 z 轴作用一均匀磁场 B_0 (即 B_0 作用方向垂直于流体流动方向). 设 u 和 v 分别为纵向和横向速度. 假设血液在轻微狭窄的通道内流动, 并设狭窄是对称的^[12], 即

$$\begin{cases} h(x) = d_0[1 - \eta(b^{n-1}(x-a) - (x-a)^n)], & a \leq x \leq a+b, \\ h(x) = d_0, & \text{其它,} \end{cases} \tag{7}$$

其中 $2h(x)$ 和 $2d_0$ 分别为变窄时和没有变窄时的通道宽. b 为狭窄部分的长度, $n(n \geq 2)$ 是一个表示狭窄剖面形状的参数, 称为形状参数($n=2$ 时, 为对称狭窄), L 为通道长度, a 表示起始变窄的位置(见图 1).

参数 η 为

$$\eta = \frac{\delta}{d_0 b^n} \frac{n^{n/(n-1)}}{(n-1)}, \tag{8}$$

其中 δ 表示狭窄处 $x = a + b/n^{1/(n-1)}$ 凸起的最大高度.

问题的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \kappa \frac{\partial v}{\partial y} - \sigma B_0^2 \alpha (u - sv), \tag{10}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \kappa \frac{\partial v}{\partial x} - \sigma B_0^2 \alpha (u - su), \tag{11}$$

$$\rho j \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -2\kappa v - \kappa \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \tag{12}$$

其中 p 为流体压力, 速度矢量 $V = (u, v, 0)$, 微转动矢量 $w = (0, 0, v)$. 边界条件为

$$u = 0, v = 0, \quad \text{在 } y = \pm h(x). \tag{13}$$

将无量纲变量(加撇号表示)

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{b}, r' = \frac{r}{d_0}, u' = \frac{u}{u_0}, v' = \frac{bv}{u_0 \delta}, \\ h' = \frac{h}{d_0}, p' = \frac{d_0^2 p}{u_0 b \mu}, j' = \frac{j}{d_0^2}, v' = \frac{d_0 v}{u_0}, \end{cases} \tag{14}$$

代入方程(9)~(13). 假设沿轴向的所有流动特征变量可以忽略^[17]. 在下列附加条件^[16,24]下:

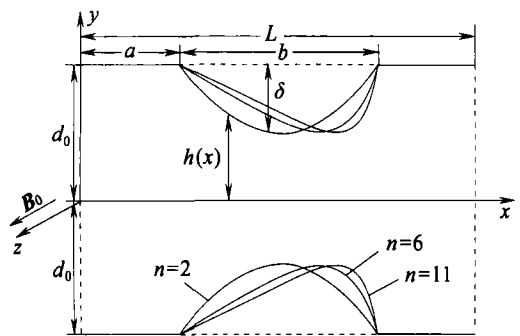


图 1 狭窄通道示意图

$$(i) \operatorname{Re} \frac{\delta n^{1/(n-1)}}{b} \ll 1, \quad (15)$$

$$(ii) \frac{d_0 n^{1/(n-1)}}{b} \sim O(1), \quad (16)$$

描述轻微狭窄情况 ($\delta/d_0 \ll 1$) 下, 微极流体稳定流动的恰当方程可以写为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{1-N} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + N \frac{\partial v}{\partial y} \right\} - (Ha)^2 \alpha u, \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

$$2v = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2-N}{m^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (19)$$

其中 u_0 为宽度为 $2d_0$ 的整个截面的平均速度, Re 为通道 Reynolds 数, $N = \kappa/(\mu + \kappa)$ 为耦合数 ($0 \leq N < 1$) (颗粒尺度效应参数), $m^2 = d_0^2 \kappa (2\mu + \kappa) / (\gamma(\mu + \kappa))$ 为微极参数 (微极自旋参数), $Ha = \sqrt{\sigma/\mu} B_0 d_0$ 为 Hartmann 数 (宜大于 $\sqrt{2}$), $\alpha = 1/(1+s^2)$, $s = \sigma B_0 / (en_e)$ 为 Hall 参数. 相应的边界条件为

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \text{在 } y = \pm h(x),$$

其中

$$h(x) = 1 - \eta_1((x - \phi) - (x - \phi)^n), \quad \phi \leq x \leq \phi + 1 \quad (20)$$

和

$$\eta_1 = \frac{\delta^* n^{n/(n-1)}}{(n-1)}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{d_0}, \quad \phi = \frac{a}{b}. \quad (21)$$

将方程(19)对 y 微分, 再加上方程(17), 有

$$u = \frac{1}{(1-N)(Ha)^2 \alpha} \left\{ \frac{(2-N)}{m^2} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - (2-N) \frac{\partial v}{\partial y} - (1-N) \frac{\partial p}{\partial x} \right\}. \quad (22)$$

将方程(22)代入方程(19), 有

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \{(1-N)(Ha)^2 \alpha + m^2\} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2m^2(1-N)(Ha)^2 \alpha}{2-N}, \quad v = 0. \quad (23)$$

方程(23)的一般解为

$$v(x, y) = A \cosh(\theta_1 y) + B \sinh(\theta_1 y) + C \cosh(\theta_2 y) + D \sinh(\theta_2 y), \quad (24)$$

其中 $A(x)$ 、 $B(x)$ 、 $C(x)$ 、 $D(x)$ 为积分常数, θ_1 和 θ_2 定义为

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{((1-N)(Ha)^2 \alpha + m^2) + \sqrt{((1-N)(Ha)^2 \alpha + m^2)^2 - 4 \left(\frac{2m^2(1-N)(Ha)^2 \alpha}{2-N} \right)}}, \quad (25)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{((1-N)(Ha)^2 \alpha + m^2) - \sqrt{((1-N)(Ha)^2 \alpha + m^2)^2 - 4 \left(\frac{2m^2(1-N)(Ha)^2 \alpha}{2-N} \right)}}. \quad (26)$$

将方程(24)代入方程(22), 得

$$u = [\xi (A \sinh(\theta_1 y) + B \cosh(\theta_1 y)) + \Omega (C \sinh(\theta_2 y) + D \cosh(\theta_2 y)) - (1-N)(\partial p / \partial x)] / [(1-N)(Ha)^2 \alpha], \quad (27)$$

其中 ξ 和 Ω 为

$$\xi = (2-N) \theta_1 \left(\frac{\theta_1^2}{m^2} - 1 \right), \quad (28)$$

$$\Omega = (2-N) \theta_2 \left(\frac{\theta_2^2}{m^2} - 1 \right). \quad (29)$$

利用边界条件后得到

$$u = \frac{-(\partial p/\partial x)}{(Ha)^2} \left\{ \left[(\theta_2^2 - m^2)\theta_2 \tanh(\theta_1 h) \left(\frac{\cosh(\theta_2 y)}{\cosh(\theta_2 h)} \right) + (m^2 - \theta_1^2)\theta_1 \tanh(\theta_2 h) \left(\frac{\cosh(\theta_1 y)}{\cosh(\theta_1 h)} \right) \right] / [(m^2 - \theta_2^2)\theta_2 \tanh(\theta_1 h) + (\theta_1^2 - m^2)\theta_1 \tanh(\theta_2 h)] - 1 \right\}, \tag{30}$$

$$\nu = \left[(1 - N)m^2 \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \tanh(\theta_2 h) \left(\frac{\sinh(\theta_1 y)}{\cosh(\theta_1 h)} \right) - \tanh(\theta_1 h) \left(\frac{\sinh(\theta_2 y)}{\cosh(\theta_2 h)} \right) \right\} \right] / [(2 - N)\{ (m^2 - \theta_2^2)\theta_2 \tanh(\theta_1 h) + (\theta_1^2 - m^2)\theta_1 \tanh(\theta_2 h) \}], \tag{31}$$

利用 $u = \partial\psi/\partial y$ 和 $\psi = 0$ (在 $y = 0$ 处), 可求得对应的流函数

$$\psi = \frac{-(\partial p/\partial x)}{(Ha)^2} \left\{ \left[(\theta_1^2 - m^2)\tanh(\theta_2 h) \left(\frac{\sinh(\theta_1 y)}{\cosh(\theta_1 h)} \right) + (m^2 - \theta_2^2)\tanh(\theta_1 h) \left(\frac{\sinh(\theta_2 y)}{\cosh(\theta_2 h)} \right) \right] / [(\theta_2^2 - m^2)\theta_2 \tanh(\theta_1 h) + (m^2 - \theta_1^2)\theta_1 \tanh(\theta_2 h)] - y \right\}. \tag{32}$$

取极限 $N \rightarrow 0, m \rightarrow 0$, 则方程(30) ~ (32)退化为经典 Poussile MHD 流动:

$$\begin{cases} u = \frac{-(\partial p/\partial x)}{(Ha)^2 \alpha} \left\{ \frac{\cosh((Ha)\alpha y)}{\cosh((Ha)\alpha h)} - 1 \right\}, \nu = 0, \\ \psi = \frac{-(\partial p/\partial x)}{(Ha)^3 \alpha} \left\{ \frac{\sinh((Ha)\alpha y)}{\cosh((Ha)\alpha h)} - (Ha)\alpha y \right\}. \end{cases} \tag{33}$$

可求得容积率 $Q(x)$ 为

$$Q(x) = \int_0^h u(x, y) dy, \tag{34}$$

$$Q = \left[\frac{\partial p}{\partial x} \{ (m^2 - \theta_2^2)\sinh(\theta_1 h)(h\theta_2 \cosh(\theta_2 h) - \sinh(\theta_2 h)) + (\theta_1^2 - m^2)\sinh(\theta_2 h)(h\theta_1 \cosh(\theta_1 h) - \sinh(\theta_1 h)) \} \right] / [(Ha)^2 \{ (\theta_2^2 - m^2)\theta_2 \cosh(\theta_2 h)\sinh(\theta_1 h) + (m^2 - \theta_1^2)\theta_1 \cosh(\theta_1 h)\sinh(\theta_2 h) \}], \tag{35}$$

并将式(35)写为如下形式:

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{F(x)}, \tag{36}$$

其中

$$F(x) = [(Ha)^2 \{ (m^2 - \theta_2^2)\theta_2 \cosh(\theta_2 h)\sinh(\theta_1 h) + (\theta_1^2 - m^2)\theta_1 \cosh(\theta_1 h)\sinh(\theta_2 h) \}] / [(m^2 - \theta_2^2)\sinh(\theta_1 h)(h\theta_2 \cosh(\theta_2 h) - \sinh(\theta_2 h)) + (\theta_1^2 - m^2)\sinh(\theta_2 h)(h\theta_1 \cosh(\theta_1 h) - \sinh(\theta_1 h))]. \tag{37}$$

由式(36), 得到跨越狭窄截面 $x = 0$ 和 $x = L$ 之间的压力降 Δp (p , 在 $x = 0$ 处; $-p$, 在 $x = L$ 处)为

$$\Delta p = \int_0^L \left(-\frac{dp}{dx} \right) dx = Q \int_0^L F(x) dx. \quad (38)$$

3 阻力和壁面剪应力表达式

3.1 阻力

由式(38)得到流动阻力(阻力阻抗)为

$$\lambda = \frac{\Delta p}{Q} = \left\{ \int_0^a F(x) |_{h=1} dx + \int_a^{a+b} F(x) dx + \int_{a+b}^L F(x) |_{h=1} dx \right\}, \quad (39)$$

所以

$$\lambda = \left\{ (L-b)I + \int_a^{a+b} F(x) dx \right\}, \quad (40)$$

其中

$$I = \left[(Ha)^2 \{ (m^2 - \theta_2^2) \theta_2 \cosh(\theta_2) \sinh(\theta_1) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) \} \right] / \left[(m^2 - \theta_2^2) \sinh(\theta_1) (\theta_2 \cosh(\theta_2) - \sinh(\theta_2)) + (\theta_1^2 - m^2) \sinh(\theta_2) (\theta_1 \cosh(\theta_1) - \sinh(\theta_1)) \right]. \quad (41)$$

3.2 壁面剪应力

本问题中, 非零剪应力为

$$\tau_{xy} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \kappa\nu, \quad \tau_{yx} = (2\mu + \kappa) \frac{\partial u}{\partial y} + \kappa\nu. \quad (42)$$

利用式(14)并设 $\tau' = d_0\tau/(2\mu u_0)$, 可以求得无量纲非零剪应力为

$$\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{N}{2(1-N)}\nu, \quad \tau_{yx} = \frac{1}{(1-N)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{N}{2}\nu \right). \quad (43)$$

由式(43)的第2式, 可以得到壁面剪应力的表达式

$$\tau_{yx} = \frac{1}{(1-N)} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r=h}, \quad (44)$$

其中 $y = h$ 时, $\nu = 0$, 利用式(30), 可得

$$\tau_{yx} = \frac{-(\partial p/\partial x) \{ (\theta_1^2 - \theta_2^2) (\theta_1^2 + \theta_2^2 - m^2) \}}{(1-N)(Ha)^2 \alpha \{ (m^2 - \theta_2^2) \theta_2 \coth(\theta_2 h) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \coth(\theta_1 h) \}}, \quad (45)$$

并且由式(36), 有

$$\tau_{yx} = \frac{Q \{ (\theta_1^2 - \theta_2^2) (\theta_1^2 + \theta_2^2 - m^2) \}}{(1-N)h \{ (m^2 - \theta_2^2) \theta_2 \coth(\theta_2 h) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \coth(\theta_1 h) + (\theta_2^2 - \theta_1^2) \}}. \quad (46)$$

可以看出, 狭窄喉部的剪应力(即位于 $x = a/b + 1/n^{1/(n-1)}$ 狭窄部位凸起最大高度处的壁面剪应力) $\tau_s = \tau_{yx} |_{h=1-\delta^*}$, 即

$$\tau_s = Q \{ (\theta_1^2 - \theta_2^2) (\theta_1^2 + \theta_2^2 - m^2) \} / \{ (1-N)(1-\delta^*) \{ (m^2 - \theta_2^2) \theta_2 \coth(\theta_2(1-\delta^*)) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \coth(\theta_1(1-\delta^*)) + (\theta_2^2 - \theta_1^2) \} \}, \quad (47)$$

可以求得无量纲阻力 $\bar{\lambda}$ 、壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 和喉部剪应力 $\bar{\tau}_s$ 的最终表达式

$$\bar{\lambda} = \left(1 - \frac{b}{L} \right) I + \frac{1}{L} \int_a^{a+b} F(x) dx, \quad (48)$$

$$\bar{\tau}_{yx} = \frac{(\theta_1^2 - \theta_2^2) (\theta_1^2 + \theta_2^2 - m^2)}{(1-N)h \{ (m^2 - \theta_2^2) \theta_2 \coth(\theta_2 h) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \coth(\theta_1 h) + (\theta_2^2 - \theta_1^2) \}}, \quad (49)$$

$$\bar{\tau}_s = \{ (\theta_1^2 - \theta_2^2) (\theta_1^2 + \theta_2^2 - m^2) \} / \{ (1-N)(1-\delta^*) \{ (m^2 -$$

$$\theta_2^2) \theta_2 \coth(\theta_2(1 - \delta^*)) + (\theta_1^2 - m^2) \theta_1 \coth(\theta_1(1 - \delta^*)) + (\theta_2^2 - \theta_1^2)\}, \quad (50)$$

其中

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{\tau_0}, \quad \bar{\tau}_s = \frac{\tau_s}{\tau_0}, \quad \lambda_0 = L, \quad \tau_0 = Q,$$

且 λ_0, τ_0 为正常动脉(无狭窄)流动时的流动阻力和壁面剪应力。

取极限 $B_0 \rightarrow 0, N \rightarrow 0$ 和 $m \rightarrow 0$, 方程(48) ~ (50)退化为 Srivastava 和 Saxena^[16]导出的结果,即没有外加磁场 ($\alpha = 1$) 且中心区 ($C = 0$) 无颗粒相时的 Newton 流体模型的结果,进一步还可以简化为 $n = 2$ 对称狭窄时情况,即 Young^[24]分析中的相应结果:

$$\bar{\lambda} = \left(1 - \frac{b}{L}\right)l + \frac{1}{L} \int_a^{a+b} \frac{dx}{h(x)^4}, \quad \bar{\tau}_{yx} = -\frac{1}{h(x)^3}, \quad \bar{\tau}_s = -\frac{1}{(1 - \delta^*)^3}. \quad (51)$$

4 结果及讨论

为定量地分析 Hartmann 数 Ha 、Hall 参数 s 、通道长度 L 和形状参数 n 的作用,开发了计算机程序,对参数值 $\phi = 0; b = 1; L = 1, 2, 10; Ha = 1.5, 2, 2.1, 2.2, 2.5, 3, 4, 5; s = 0.5, 1, 1.5, 2; n = 2, 6, 11$, 得到了 $\bar{\lambda}, \bar{\tau}_{yx}, \bar{\tau}_s$ (方程(48) ~ (50))的数值分析结果. 对不同的 Hartmann 数 Ha 、Hall 参数 s 、通道长度 L 和形状参数 n ,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随 δ^* 的变化情况示于图 2 至图 5. 对不同 Ha, s 和 n ,狭窄区域中壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布示于图 6、7. 而图 8、9 则显示了在不同 Ha, s 时,狭窄喉部剪应力 $\bar{\tau}_s$ 随 δ^* 的变化. 不同 Ha, s 时,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随耦合参数 N 和微极参数 m 的变化示于图 10、11. 不同 m 和 N 时,狭窄区域的壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布,则示于图 12、13. 最后,图 14、15 示出了 Hartmann 数 Ha 和 Hall 参数 s 对流体水平速度 u 的影响.

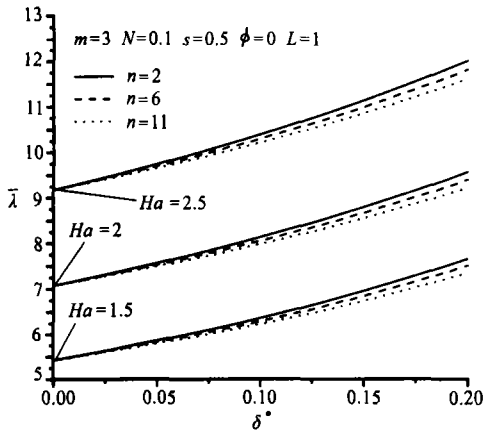


图 2 不同 Hartmann 数 Ha 和形状参数 n 时,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随狭窄处凸起的高度与通道宽之比 δ^* 的变化

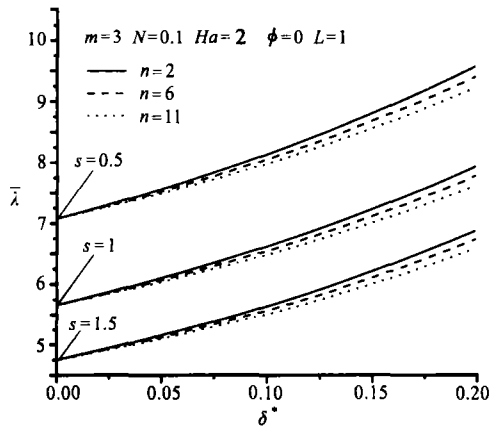


图 3 不同 Hall 参数 s 和形状参数 n 时,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随狭窄处凸起的高度与通道宽之比 δ^* 的变化

在图 2 ~ 5 中,我们看到,流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随 Hartmann 数 Ha 和狭窄尺度 δ^* 的增大而增大,而随 Hall 参数 s 、狭窄长度 L 和形状参数 n 的增大而减小,并且在对称狭窄 ($n = 2$) 时,出现极大值.

在图 6、7 中,可以看到,在收缩段,壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 随形状参数 n 的增大而增大;相应地,在扩散段,壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 又随 n 的增大而减小. 对任意狭窄形状,壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 在喉部上游,

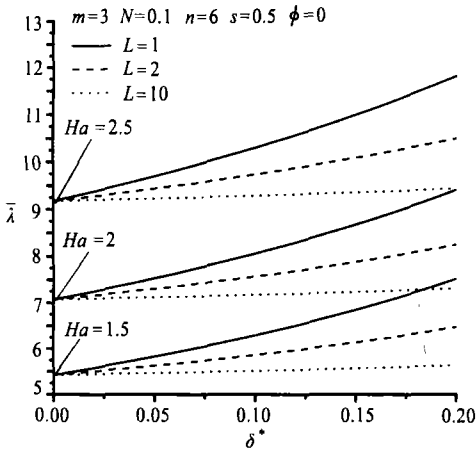


图4 不同 Hartmann 数 Ha 和通道长度 L 时, 无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随狭窄处凸起的最大高度与通道宽之比 δ^* 的变化

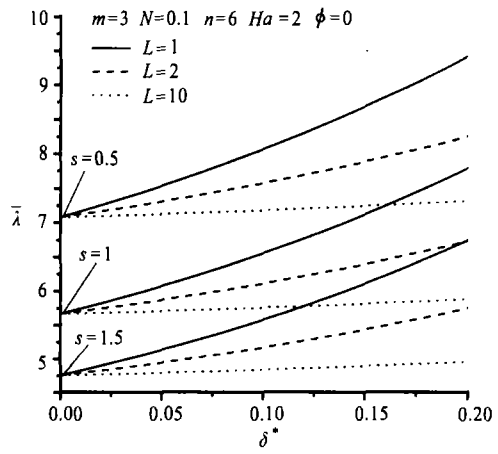


图5 不同 Hall 参数 s 和通道长度 L 时, 无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随狭窄处凸起的最大高度与通道宽之比 δ^* 的变化

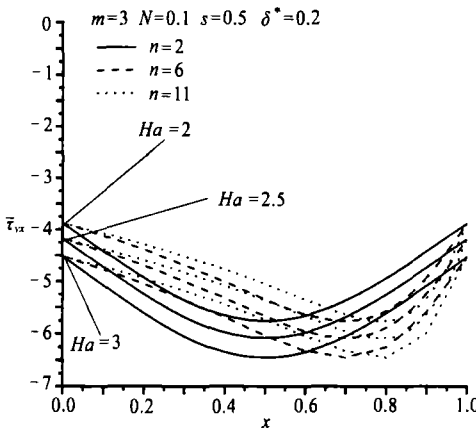


图6 不同 Hartmann 数 Ha 和形状参数 n 时, 狭窄区域无量纲壁面剪切力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布

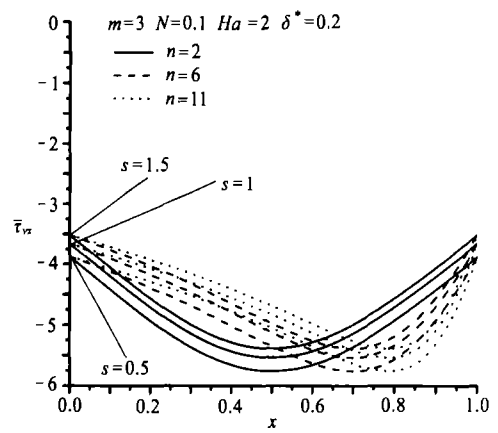


图7 不同 Hall 参数 s 和形状参数 n 时, 狭窄区域无量纲壁面剪切力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布

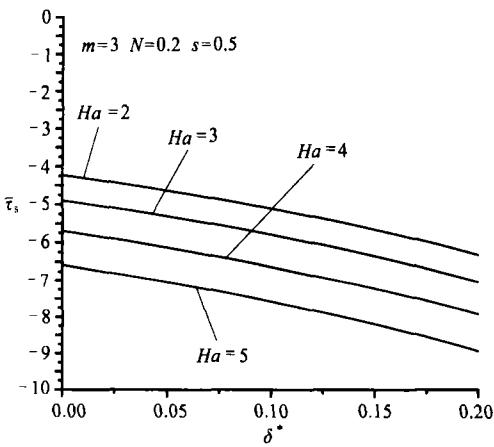


图8 不同 Hartmann 数 Ha 时, 狭窄喉部无量纲剪应力 $\bar{\tau}_s$ 随狭窄处凸起的最大高度与通道宽之比 δ^* 的变化

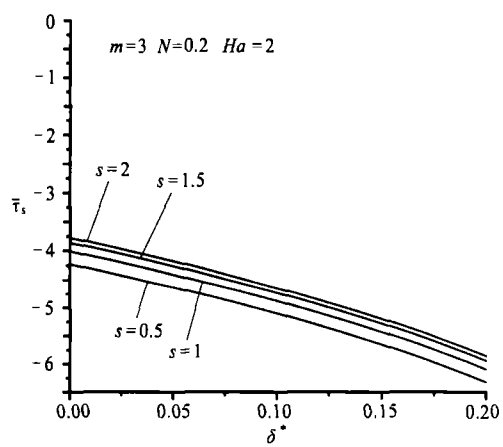


图9 不同 Hall 参数 s 时, 狭窄喉部无量纲剪应力 $\bar{\tau}_s$ 随狭窄处凸起的最大高度与通道宽之比 δ^* 的变化

从其逼近值(即 $x = 0$ 处)急剧减小到喉部的峰值($\bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_s$),而在喉部下游,则变为增大,并假

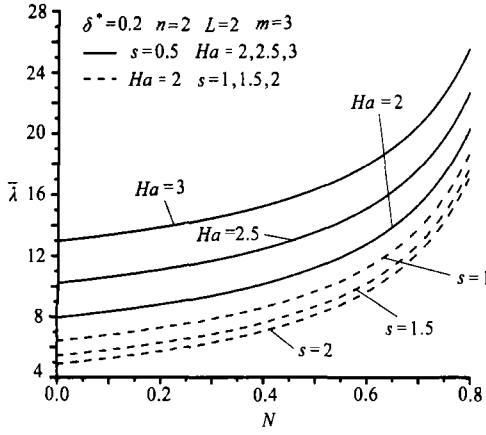


图 10 不同 Hartmann 数 Ha 和 Hall 参数 s 时,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随耦合参数 N 的变化

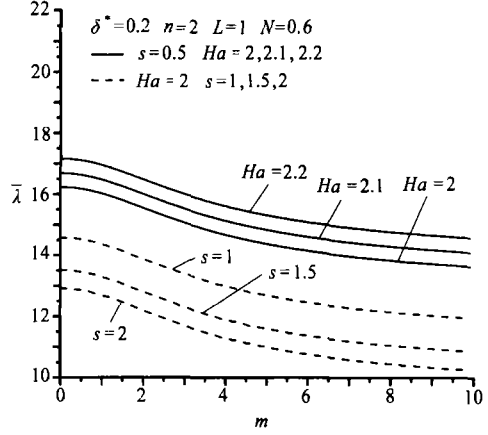


图 11 不同 Hartmann 数 Ha 和 Hall 参数 s 时,无量纲流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随微极参数 m 的变化

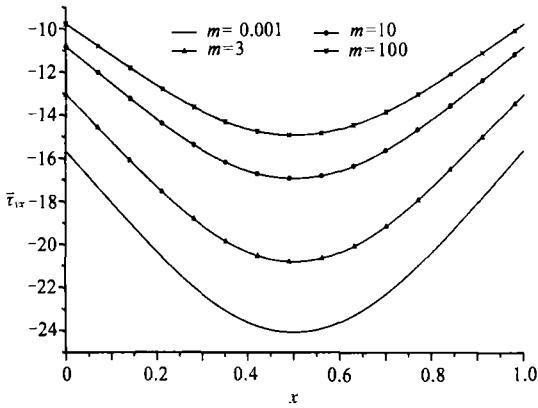


图 12 对不同微极参数 m , $N = 0.8, n = 2, \delta^* = 0.2, Ha = 2, s = 0.5$ 时,狭窄区域无量纲壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布

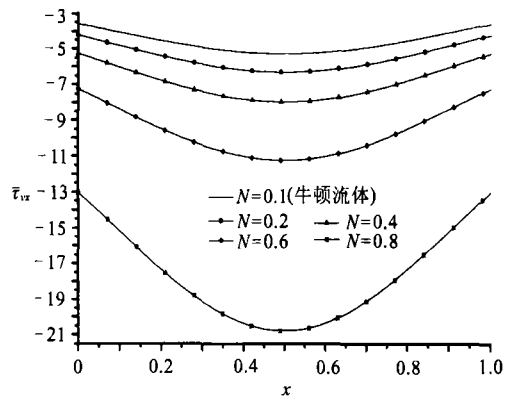


图 13 对不同耦合数 $N, m = 3, n = 2, \delta^* = 0.2, Ha = 2, s = 0.5$ 时,狭窄区域无量纲壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 的分布

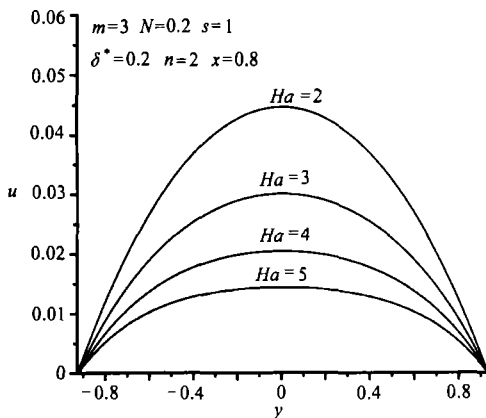


图 14 不同 Hartmann 数 Ha 时,速度 u 随 y 的变化

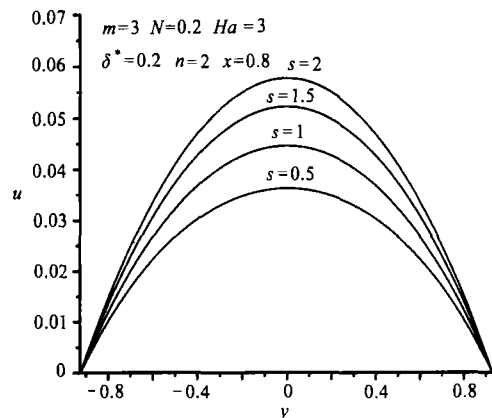


图 15 不同 Hall 参数 s 时,速度 u 随 y 的变化

设其逼近值为收缩图形末端(即 $x = 1$)的值。喉部上游 $\bar{\tau}_{yx}$ 的减小率(随水平距离),随 n 值的

增大而减小,而在喉部下游, $\bar{\tau}_{yx}$ 的增大率,又随 n 值的增大而增大。

壁面剪应力 $\bar{\tau}_{yx}$ 及其喉部值 $\bar{\tau}_s$ 关于 Hartmann 数 Ha 和 Hall 参数 s 的分布,与流动阻力 $\bar{\lambda}$ 的变化正相反。由于 $\bar{\tau}_s$ 与形状无关,因此假设对任意 n 值, $\bar{\tau}_s$ 有相同的数值,见图 6~9。

在图 10、11 中,我们研究不同 Ha 和 s 值时,流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随耦合参数 N 和微极参数 m 的变化。可以看出,流动阻力 $\bar{\lambda}$ 随耦合参数 N (颗粒尺度增大) 和 Hartmann 数 Ha 的增大而增大,而随微极参数 m (微极自旋参数增大) 和 Hall 参数 s 的增大而减小。同时,由图 12、13 可以看出,壁面剪应力随微极参数 m 增大而增大,而随耦合数 N 增大而减小。

最后, Ha 和 s 对流体速度 u 的影响示于图 14 和图 15。当 Ha 增大时,速度 u 减小;当 s 增大时,速度 u 亦增大。

5 结论和说明

本文研究水平向不对称而竖直向对称时轻微狭窄动脉中,血液磁流体动力学流动的微极模型。构造了轴向速度、轴向压力梯度和流函数封闭形式的解析解。给出了阻力、狭窄区域壁面剪应力的表达式,以及狭窄处凸起的最大高度处(狭窄喉部)的壁面剪应力值。借助图形说明了各种参数对阻力、壁面剪应力分布、喉部剪切应力和轴向速度的影响。由本文分析可以得出如下结论:

- 1) 流动阻力随着确定的狭窄形状参数 n 和狭窄长度 L 的增大而减小,而随狭窄尺度 δ^* 的增大而增大;
- 2) 微极流体的流动阻力随着耦合参数 N (颗粒尺度影响) 的增大而增大,而随着微极参数 m (微极自旋参数影响) 的增大而减小;
- 3) 微极流体模型中的流动阻力在数值上大于 Newton 流体模型;
- 4) 磁-微极流体的流动阻力 $\bar{\lambda}$ 在数值上大于微极流体情况;
- 5) 对任意给定的 Hartmann 数 Ha 和 Hall 参数 s , 壁面剪应力和狭窄部位最大凸起高度处的壁面剪应力,具有与流动阻力变化相反的特征;
- 6) 当 Hall 参数 s 增大时,轴向速度 u 也增大;当 Hartmann 数 Ha 增大时, u 却减小;
- 7) Srivastava 和 Saxena 的结果^[16] ($\alpha = 1, C = 0$), 可以通过取 $N \rightarrow 0, m \rightarrow 0$ 和 $B_0 \rightarrow 0$ 重新得出;而 Young 的结果^[24], 可以通过取 $N \rightarrow 0, m \rightarrow 0$ 和 $B_0 \rightarrow 0$ ($n = 2$ 时) 重新得出。

[参 考 文 献]

- [1] Craig I J D, Watson P G. Magnetic reconnection solutions based on a generalized Ohm's law[J]. *Solar Phys*, 2003, 214(1): 131-150.
- [2] Stud V K, Sophon G S, Mishra R K. Pumping action on blood flow by a magnetic field[J]. *Bull Math Biol*, 1997, 39(3): 385-390.
- [3] Agrawal H L, Anwaruddin B. Peristaltic flow of blood in a branch[J]. *Ranchi Univ Math J*, 1984, 15: 111-121.
- [4] Bharali A, Borkakati A K. The effect of Hall currents on MHD flow and heat transfer between two parallel porous plates[J]. *Appl Sci Res*, 1982, 39(2): 155-165.
- [5] Asghar S, Parveen S, Hanif S, et al. Hall effects on the unsteady hydromagnetic flows of an Oldroyd-B fluid[J]. *Internat J Engng Sci*, 2003, 41(6): 609-619.

- [6] Megahed A A, Komy S R, Afify A A. Similarity analysis in magnetohydrodynamics: Hall effects on free convection flow and mass transfer past a semi-infinite vertical flat plate[J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 2003, **38**(4): 513-520.
- [7] Mohyuddin M R, Ashraf E E. Inverse solutions for a second-grade fluid for porous medium channel and Hall current effects[J]. *Proc Indian Acad Sci, Math Sci*, 2004, **114**(1): 79-96.
- [8] Hayat T, Naz R, Asghar S. Hall effects on unsteady duct flow of a non-Newtonian fluid in a porous medium[J]. *Appl Math Comp*, 2004, **157**(1): 103-114.
- [9] Hayat T, Wang Y, Hutter K. Hall effects on the unsteady hydromagnetic oscillatory flow of a second-grade fluid[J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 2004, **39**(6): 1027-1037.
- [10] Eringen A C. Theory of micropolar fluid[J]. *J Math Mech*, 1966, **16**(1): 11-18.
- [11] Agarwal R S, Dhanapal C. Numerical solution to the flow of micropolar fluid between porous walls of different permeability[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1987, **25**(33): 325-336.
- [12] Haldar K. Effects of the shape of stenosis on the resistance to blood flow through an artery[J]. *Bull Math Biol*, 1985, **47**(4): 545-550.
- [13] Srivastava L M. Flow of couple stress fluid through stenotic blood vessels[J]. *J Biomech*, 1985, **18**(7): 479-485.
- [14] Srivastava V P. Arterial blood flow through a nonsymmetrical stenosis with applications[J]. *Jpn J Appl Phys*, 1995, **34**(12): 6539-6545.
- [15] Ang K C, Mazumdar J N. Mathematical modeling of three dimensional flow through an asymmetric arterial stenosis[J]. *Math Comput Modelling*, 1997, **25**(1): 19-29.
- [16] Srivastava V P, Saxena M. Suspension model for blood flow through stenotic arteries with a cell-free plasma layer[J]. *Math Biosci*, 1997, **139**(2): 79-102.
- [17] Chakravarty S, Mandal P K. Two-dimensional blood flow through tapered arteries under stenotic conditions[J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 2000, **35**(5): 779-793.
- [18] Liu B, Tang D. A numerical simulation of viscous flows in collapsible tubes with stenosis[J]. *Appl Numer Math*, 2000, **32**(1): 87-101.
- [19] El-Shahed M. Pulsatile flow of blood through a stenosed porous medium under periodic body acceleration[J]. *Appl Math Comput*, 2003, **138**(2/3): 479-488.
- [20] Jung H, Choi J W, Park C G. Asymmetric flows of non-Newtonian fluids in symmetric stenosed artery[J]. *K-A Rheol J*, 2004, **16**(6): 101-108.
- [21] Liu G T, Wang X J, Ai B Q, et al. Numerical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis[J]. *Chinese J Phys*, 2004, **42**(4): 401-409.
- [22] Mandal P K. An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis[J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 2005, **40**(1): 151-164.
- [23] Pralhad R N, Schulz D H. Modeling of arterial stenosis and its applications to blood diseases[J]. *Math Biosci*, 2004, **190**(2): 203-220.
- [24] Young D F. Effect of a time dependent stenosis of flow through a tube[J]. *J Engrg Ind, Trans ASME*, 1968, **90**: 248-254.

Magnetic Field and Hall Currents Influences on Blood Flow Through a Stenotic Artery

Kh. S. Mekheimer¹, M. A. El Kot²

(1. *Department of Mathematics, Faculty of Science, Al-Azhar University,
Nasr City 11884, Cairo, Egypt;*

2. *Department of Mathematics, Faculty of Education, Suez Canal University, Suez, Egypt*)

Abstract: A micropolar model for blood of magnetohydrodynamic flow through a horizontally non-symmetric arterial but vertically symmetric artery with a mild stenosis is presented. To estimate the effect of the stenosis shape, a suitable geometry was considered such that the horizontal shape of the stenosis can be changed easily just by varying a parameter (referred to as the shape parameter). Flow parameters such as velocity, the resistance to flow (the resistance impedance), the wall shear stress distribution in the stenotic region and its magnitude at the maximum height of the stenosis (stenosis throat) were computed for different shape parameter, the Hartmann number and Hall parameter. It is shown that the resistance to flow decreases with increasing values of the parameter determining the stenosis shape and Hall parameter, while the resistance to flow increase with increasing the Hartmann number. The wall shear stress and the shearing stress on the wall at the maximum height of the stenosis possess an inverse character to the resistance to flow with respect to any given values of Hartmann number and Hall parameter. Finally, the effect of the Hartmann number and the Hall parameter on the horizontal velocity was examined.

Key words: blood of magnetohydrodynamic flow; micropolar model; stenotic artery; Hall currents; Hartmann number