

跳扩散对偶模型在带壁分红策略下的分红函数*

李波, 吴荣

(南开大学 数学科学学院, 天津 300071)

(郭兴明推荐)

摘要: 考虑了带干扰的古典风险模型的对偶模型, 讨论了模型在带壁分红策略下的一些结论. 通过研究过程的局部时, 证明了所讨论函数的边界条件. 用在没有分红策略下模型的函数, 给出了期望折现分红函数的显示表达. 在最后一节, 对于跳服从相位分布的情形, 给出了数值例子, 并讨论了最优分红边界的存在性.

关键词: 复合 Poisson 过程; 扩散过程; Gerber-Shiu 函数; 微分积分方程; 破产时; 破产前余额; 赤字

中图分类号: O211.6 文献标识码: A

引言

当不考虑分红时, 跳扩散风险模型的盈余过程是

$$U(t) = u + ct + \mathcal{O}B(t) - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中, $u \geq 0$ 表示初始金额, 扩散项 $\{ct + \mathcal{O}B(t)\}$ 表示到 t 时刻的累计保费, $c > 0, \sigma > 0$, $\{S(t)\}$ 是复合 Poisson 过程, 表示到 t 时刻的累计索赔量.

本文考虑了 $U(t)$ 的对偶过程, 资产净值(不考虑分红时)在时刻 t 表达为

$$U(t) = u - ct + \mathcal{O}B(t) + S(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

其中, $u \geq 0$ 表示初始金额, $\{-ct + \mathcal{O}B(t)\}$ 是到时刻 t 为止的累计消费, $\{S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\}$ 表示正的收入, 且有 Poisson 参数 λ 和跳的概率密度函数 $p(y), y > 0$. 我们假设跳的期望是有限的,

$$\mu = \int_0^{\infty} yp(y)dy < \infty. \quad (3)$$

形如式(1)的模型在 Gerber^[1]中首次被引进, 近年来被很多作者讨论, 具体可参考文献[2-5].

De Finetti^[6]首次提出在风险模型中考虑分红策略, 认为这样的过程更符合实际情形. 其中, 有两种分红策略得到了特别的关注. 一种是带壁的分红策略, 在这种策略下, 当且仅当过

* 收稿日期: 2007-10-27; 修订日期: 2008-08-01

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2007CB814905); 国家自然科学基金资助项目(10571092); 高等教育博士学科点科研基金资助项目

作者简介: 李波(1981-), 男, 湖南人, 博士生(联系人. Tel: +86-22-23494573; E-mail: sday-occe@yahoo.com.cn).

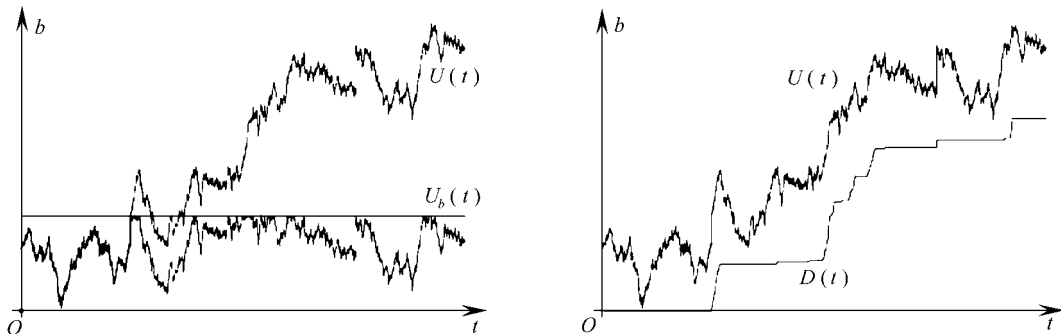
程超过事先给定的边界时, 分红才发生, 并且超过边界的所有部分全部作为分红被分掉. 另外一种 是门槛分红策略, 在这种策略下, 同样当且仅当过程超过事先给定的边界时, 分红才发生, 不过当过程超过边界时, 分红率是固定的常数. 关于带壁分红策略下的风险模型可参考文献 [7- 11] 等.

本文扩展了 Avanzi 等人^[12] 讨论的模型, 研究了模型(2) 在带壁分红策略下的期望折现分红函数, 分红边界是 $b > 0$.

记 $D(t)$ 是到 t 时刻为止的累计分红, $U_b(t)$ 是在分红策略下的修正过程, 于是我们有下列等式成立:

$$D(t) = \sup_{s \in [0, t]} \{U(s) - b\}_+, \quad U_b(t) = U(t) - D(t).$$

图 1 给出了他们的样本轨道.



(a) $U_b(t)$ 和 $U(t)$ 的样本轨道

(b) $U(t)$ 和 $D(t)$ 的样本轨道

图 1 $U_b(t)$, $U(t)$ 和 $D(t)$ 的样本轨道比较

定义破产时 $\tau_0 = \inf\{t, U_b(t) \leq 0\}$, 则

$$V(u, b) = E\left[\int_0^{\tau_0} e^{-\delta s} dD(s) \mid U_b(0) = u\right], \quad \text{对于 } \delta > 0, u \in [0, b], \quad (4)$$

称为期望折现分红函数, 且对于 $u > b$,

$$V(u, b) = u - b + V(b, b).$$

本文结构如下. 第 1 节讨论了模型相关的过程的一些结论. 在第 2 节, 我们推导了 $V(u, b)$ 满足的边界条件, 给出了 $h_1(u)$ 和 $h_2(u)$ 满足的积分微分方程, 并用与模型(1) 相关的函数给出了 $V(u, b)$ 的显示表达. 在第 3 节, 我们应用了结论, 给出了跳服从相位分布时的数值例子, 并且证明了此时最优分红边界的存在性.

1 预备结论

本节, 首先考虑了一个与模型相关的过程, 也被称为反射扩散过程.

设 B_t 是标准布朗运动, c 和 σ 是给定的常数, $W_t = \sigma B_t - ct$, 定义 $R_t = W_t - A_t$, 其中 $A_t = \sup_{s \in [0, t]} \{W_s \vee 0\}$ 是一个从 0 出发的增过程.

对于函数 $f(x, t) \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$, 由 Ito 公式有

$$f(R_t, t) = f(R_0, 0) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] f(R_r, r) dr + \sigma \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(R_r, r) dB_r - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(R_r, r) dA_r.$$

由 Skorohod 方程(参考 Karatzas 等人^{[13]210}和 Revuz 等人^{[14]222}), A_t 和 $\{t \geq 0; R_t = 0\}$ 满足关系式 $\int_0^\infty I(R_t < 0) dA_t = 0$, 于是有

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(R_r, r) dA_r = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(0, r) dA_r.$$

我们取特殊的 $f(x, t) = g(x) e^{-\delta t}$, 其中 $g(x) \in C^2(\mathbf{R})$ 满足条件

$$\frac{1}{2} \sigma^2 g''(x) - c g'(x) - \delta g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

也即存在 C_1 和 C_2 使得

$$g(x) = C_1 e^{\rho_1 x} + C_2 e^{\rho_2 x},$$

其中, $\rho_1 > 0 > \rho_2$ 是方程 $\sigma^2 \rho^2 / 2 - c\rho - \delta = 0$ 的根. 则

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] f(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}; t \in \mathbf{R}^+.$$

对于 $x < 0$, 定义首中时 $T_x = \inf\{t, R_t \leq x\}$ 如果集合非空, 不然记 $T_x = \infty$. 并定义 $M(t) = g(R_t) e^{-\delta t} + g'(0) \int_0^t e^{-\delta r} dA_r$, 我们有

$$M(t) = M(0) + \sigma \int_0^t g'(R_r) e^{-\delta r} dB_r,$$

由于当 $r \in (0, T_x)$ 时 $R_r \in [x, 0]$, $g'(R_r)$ 是一致有界的, 于是有下列命题.

命题 1.1 对于 $x < 0$, 如上定义的 $M(t \wedge T_x)$ 是一个一致可积鞅.

由命题 1.1 我们有

$$E[M(t \wedge T_x)] = E[g(R(t \wedge T_x)) e^{-\delta(t \wedge T_x)}] + g'(0) E\left[\int_0^{t \wedge T_x} e^{-\delta r} dA_r\right] = M(0).$$

当 t 趋于 ∞ 时, 有结论

$$g(x) E[e^{-\delta T_x}; T_x < \infty] + g'(0) E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta r} dA_r; T_x < \infty\right] = g(0),$$

于是

$$e^{\rho_1 x} E[e^{-\delta T_x}; T_x < \infty] + \rho_1 E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta r} dA_r; T_x < \infty\right] = 1,$$

$$e^{\rho_2 x} E[e^{-\delta T_x}; T_x < \infty] + \rho_2 E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta r} dA_r; T_x < \infty\right] = 1.$$

于是, 我们有 $P[T_x < \infty] = 1$,

推论 1.1 对于任给的 $x < 0$, 有

$$E[e^{-\delta T_x}] = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 e^{\rho_1 x} - \rho_1 e^{\rho_2 x}}, \quad E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta r} dA_r\right] = \frac{e^{\rho_1 x} - e^{\rho_2 x}}{\rho_2 e^{\rho_1 x} - \rho_1 e^{\rho_2 x}}, \quad (5)$$

$$E[e^{-\delta T_x}] = 1 + o(x), \quad E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta r} dA_r\right] = -x + o(x). \quad (6)$$

取 $\delta = 0$, $g(x) = e^{2cx/\sigma^2}$, 则 $g'(0)A(t) = M(t) - g(R(t))$. 于是

$$(g'(0)A(T_x))^2 = M^2(T_x) + g^2(-x) - 2g(-x)M(T_x),$$

$$(g'(0))^2 E[A(T_x)^2] = E[M(T_x)^2] + g(-x)^2 - 2g(-x)g(0) =$$

$$E\left[\sigma^2 \int_0^{T_x} (g'(R_r))^2 dr\right] + g(-x)^2 - 2g(-x)g(0) + g^2(0).$$

$r \geq 0$ 时, $g'(R_r) = (2c/\sigma^2)e^{2cR_r/\sigma^2} \leq 2c/\sigma^2$. 于是由式(6)我们有下列推论.

推论 1.2 对于任给 $x < 0$, 存在常数 M 使得

$$E[A(T_x)^2] \leqslant ME[T_x] + o(x) = o(x). \quad (7)$$

2 积分微分方程及其解

结合上述讨论, 我们现在给出本文主要结论的证明. 受 Wang 等人^[15-16] 的启发, 我们证明的思路如下. 为简单起见, 我们认为 $V(u, b)$ 是 u 的函数, 除非特殊提出.

定理 2.1 式(4)定义的 $V(u, b)$ 关于 u 在 b 点可微.

证明 对于任意 $\varepsilon \in (0, b)$, 定义

$$T_{-\varepsilon} = \inf\{t > 0, R_t = -\varepsilon\}, \quad \tau = T_{-\varepsilon} \wedge W_1,$$

其中, W_1 是第一次跳的发生时. 由 $U_b(t)$ 的强马氏性, 我们有

$$\begin{aligned} V(b, b) &= E\left[\int_0^\tau e^{-\delta s} dD(s) \mid U_b(0) = b\right] + E[e^{-\delta \tau} V(U_b(\tau), b) \mid U_b(0) = b] = \\ &E\left[\int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dD(s); T_{-\varepsilon} < W_1 \mid U_b(0) = b\right] + \\ &E\left[\int_0^{W_1} e^{-\delta s} dD(s); W_1 < T_{-\varepsilon} \mid U_b(0) = b\right] + \\ &E[e^{-\delta W_1} V(U_b(W_1), b); W_1 < T_{-\varepsilon} \mid U_b(0) = b] + \\ &E[e^{-\delta T_{-\varepsilon}} V(U_b(T_{-\varepsilon}), b); T_{-\varepsilon} < W_1 \mid U_b(0) = b] = \\ &I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

对于 $t \in [0, W_1)$, $U_b(t)$, 从边界 b 出发, 运动形式和第 1 节中的 $R(t)$ 一样, 沿用第 1 节的记号并结合 $U_b(t)$ 向下移动时是连续变化的性质, 有

$$\begin{aligned} I_1 &= E\left[e^{-\delta T_{-\varepsilon}} \int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dA(s)\right] = \\ &E\left[\int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dA(s)\right] - E\left[(1 - e^{-\delta T_{-\varepsilon}}) \int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dA(s)\right], \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和式(6)、(7),

$$E\left[(1 - e^{-\delta T_{-\varepsilon}}) \int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dA(s)\right] = o(\varepsilon),$$

于是

$$I_1 = \varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$I_4 = E[e^{-(\delta + \lambda)T_{-\varepsilon}}] V(b - \varepsilon, b) = V(b - \varepsilon, b) + o(\varepsilon).$$

同时在集合 $\{W_1 < T_{-\varepsilon}\}$ 上, $\int_0^{W_1} e^{-\delta s} dD(s) < \int_0^{T_{-\varepsilon}} e^{-\delta s} dA(s) + X_1$ 有有限期望, 同时

$$P[W_1 < T_{-\varepsilon}] = 1 - P[W_1 > T_{-\varepsilon}] = 1 - E[e^{-\delta T_{-\varepsilon}}] = o(\varepsilon),$$

故 $I_2 = o(\varepsilon)$, $I_3 = o(\varepsilon)$. 于是

$$V(b, b) = V(b - \varepsilon, b) + \varepsilon + o(\varepsilon),$$

也即左导数 $D_- V(b, b) = 1$. 再根据定义有右导数 $D_+ V(b, b) = 1$, 所以 $V'(b, b) = 1$. 证毕. \square

对于 $0 < u < b$, 定义 $\tau_b = \inf\{t, U_b(t) \geqslant b\}$, 则 $\tau_b = \inf\{t, U(t) \geqslant b\}$, 由 $U(t)$ 的强马氏性, 有

$$V(u, b) = E[e^{-\delta \tau_b}; \tau_b < \tau_0 \mid U(0) = u] V(b, b) +$$

$$E[e^{-\delta\tau_b}(U(\tau_b) - b); \tau_b < \tau_0 | U(0) = u].$$

于是找到 $V(u, b)$ 显示解, 等价于计算

$$\begin{cases} h_1(u) = E[e^{-\delta\tau_b}; \tau_b < \tau_0 | U(0) = u], \\ h_2(u) = E[e^{-\delta\tau_b}(U(\tau_b) - b); \tau_b < \tau_0 | U(0) = u]. \end{cases} \quad (8)$$

定理 2.2 对于 $u \in (0, b)$, 式(8)中定义的 $h_1(u)$ 和 $h_2(u)$ 满足方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 h_1''(u) - ch_1'(u) - (\lambda + \delta)h_1(u) + \\ & \lambda \int_0^{b-u} h_1(u+x)p(x)dx + \lambda \int_{b-u}^{\infty} p(x)dx = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 h_2''(u) - ch_2'(u) - (\lambda + \delta)h_2(u) + \\ & \lambda \int_0^{b-u} h_2(u+x)p(x)dx + \lambda \int_{b-u}^{\infty} (x-b+u)p(x)dx = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

且有边界条件

$$h_1(0) = h_2(0) = 0 = h_2(b) \text{ 和 } h_1(b) = 1.$$

证明 运用 Ito 公式, 对 $[0, dt]$ 内的可能的变化取条件进行分析, 我们可以得到式(9)和(10). 由 Brownian 运动的性质知, 当初始余额为 0 时, 破产立即发生, 而当初始余额为 b 时, 过程将立即超过 b , 于是边界条件显然. \square

用 $h(u)$ 代替 $h_i(b-u)$ 并带入式(9)和(10), 于是上述方程能转化为更熟悉的方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 h''(u) + ch'(u) - (\lambda + \delta)h(u) + \lambda h^* p(u) + \omega(u) = 0, \quad u \geq 0, \quad (11)$$

而该方程的解族又依赖于齐次积分微分方程:

$$\frac{\sigma^2}{2} \mathcal{V}''(u) + c\mathcal{V}'(u) = (\lambda + \delta)\mathcal{V}(u) - \lambda \int_0^u \mathcal{V}(u-x)p(x)dx, \quad u \geq 0. \quad (12)$$

事实上, Tsai 等人^[17] 讨论的 Gerber-Shiu 函数 ($\phi_w(u)$) 也满足方程(11), 定义为

$$\phi_w(u) = E[e^{-\delta T} \omega(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u], \quad (13)$$

而 Gerber 等人^[2] 所讨论的 ($\phi_d(u)$) 是式(12)的一个特解, 定义为

$$\phi_d(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T) = 0, T < \infty) | U(0) = u], \quad (14)$$

其中, T 是模型(1)的破产时, $\omega(x, y)$ 是罚金函数.

对等式(11)和(12)的两边分别取 Laplace 变换, 得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{p}(s) \right] \hat{h}(s) = \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 h'(0) + \frac{1}{2}\sigma^2 sh(0) + ch(0) - \hat{\omega}(s), \\ & \left[\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{p}(s) \right] \hat{\mathcal{V}}(s) = \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 \mathcal{V}'(0) + \frac{1}{2}\sigma^2 s\mathcal{V}(0) + c\mathcal{V}(0). \end{aligned}$$

由 Gerber 等人^[2] 的讨论, 方程(12)的解可以表示为

$$\mathcal{V}(u) = \eta_1 \mathcal{V}_1(u) + \eta_2 \mathcal{V}_2(u),$$

其中, $\mathcal{V}_1(u)$ 和 $\mathcal{V}_2(u)$ 是方程(12)的两个线性独立的解, η_1, η_2 是待定的常数, 而且我们可以取

$$\mathcal{V}_1(u) = \phi_d(u), \quad \mathcal{V}_2(u) = \int_0^u e^{\beta x} \phi_d(u-x)dx,$$

其中, ρ 是 Lundberg 方程

$$\lambda \hat{p}(s) = \lambda + \delta - cs - \frac{\sigma^2 s^2}{2} \quad (15)$$

的唯一正根.

由此, 方程(11)的通解可以表示为

$$h(u) = \phi_w(u) + \theta_1 \mathcal{V}_1(u) + \theta_2 \mathcal{V}_2(u).$$

为了计算方便, 我们取

$$\phi_w(u) = E[e^{-\alpha T} \omega(U(T-), |U(T)|) I(U(T) < 0, T < \infty) | U(0) = u],$$

于是有结论如下:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{V}}_1(s) = \frac{(s - \rho)/(2\sigma^2)}{\sigma^2 s^2/2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{p}(s)}, & \mathcal{V}_1(0) = 1, \quad \hat{\mathcal{V}}_1(0) = -(\rho + 2c/\sigma^2), \\ \hat{\mathcal{V}}_2(s) = \frac{1/(2\sigma^2)}{\sigma^2 s^2/2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{p}(s)}, & \mathcal{V}_2(0) = 0, \quad \hat{\mathcal{V}}_2(0) = 1, \\ \hat{\phi}_w(s) = \frac{\hat{\omega}(\rho) - \hat{\omega}(s)}{\sigma^2 s^2/2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{p}(s)}, & \phi_w(0) = 0, \quad \phi'_w(0) = \frac{2}{\sigma^2} \hat{\omega}(\rho). \end{cases} \quad (16)$$

由定理 2.2 以及上述讨论, 有

定理 2.3 对于 $u \in (0, b)$,

$$h_1(b-u) = \phi_{w1}(u) + \mathcal{V}_1(u) - \frac{\phi_{w1}(b) + \mathcal{V}_1(b)}{\mathcal{V}_2(b)} \mathcal{V}_2(u), \quad (17)$$

$$h_2(b-u) = \phi_{w2}(u) - \frac{\phi_{w2}(b)}{\mathcal{V}_2(b)} \mathcal{V}_2(u), \quad (18)$$

其中

$$\phi_{w1}(u) = E[e^{-\alpha T} I(U(T) < 0, T < \infty) | U(0) = u],$$

$$\phi'_{w1}(0) = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\rho t} \int_u^\infty p(s) ds du,$$

$$\phi_{w2}(u) = E[e^{-\alpha T} | U(T) | I(T < \infty) | U(0) = u],$$

$$\phi'_{w2}(0) = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\rho t} \int_u^\infty (s-u)p(s) ds du.$$

回到 $V(u, b)$ 的求解,

$$V(u, b) = h_1(u) V(b, b) + h_2(u) \text{ 和 } V'(b, b) = 1.$$

定理 2.4 对于 $u \in (0, b)$,

$$V(u, b) = h_2(u) + h_1(u) \frac{1 - h_2'(b)}{h_1(b)}, \quad (19)$$

其中, $h_1(u)$ 、 $h_2(u)$ 是定理 2.3 中的函数.

3 举 例

由上述定理可知, 为了计算期望折现分红函数, 关键是得到模型(1)相关的一些函数表达. 本节考虑一个较为简单的模型, 假设跳的大小服从相位分布, 参数是 $\text{PH}(\alpha, A)$. 相位分布是一个带吸收态的马氏跳过程的生存时的分布, 它形成了正的随机变量分布族的一个稠子集. 相位分布的讨论和分析以及结论, 具体可以参考 Asmussen^[18-19].

而对于模型(1), 有结论

$$E[e^{-\varrho T} I(U(T) = 0, T < \infty) | U(0) = u] = \nu_1(u) = (1, \mathbf{0}) e^{\varrho u} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$E[e^{-\varrho T} I(U(T) < 0, T < \infty) | U(0) = u] = \phi_{w1}(u) = (1, \mathbf{0}) e^{\varrho u} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$E[e^{-\varrho T} | U(T) | I(T < \infty) | U(0) = u] = \phi_{w2}(u) = (1, \mathbf{0}) e^{\varrho u} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\nu_2(u) = \int_0^u \nu_1(x) e^{\varrho(u-x)} dx = (1, \mathbf{0}) e^{\varrho u} (\varrho - \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{I} - e^{(\varrho - \mathbf{Q})u}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\rho - 2c/\sigma^2 & (2\lambda\sigma^2)\alpha(\mathbf{Q} - \mathbf{A})^{-1} \\ -\mathbf{A}\mathbf{e} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

ρ 是 Lundberg 方程 (15) 唯一的正根, $\mathbf{0}$ 在 $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 中是元素为 0 的列向量, 在 $(1, \mathbf{0})$ 中是元素为 0 的行向量, \mathbf{e} 是所有元素为 1 的列向量, \mathbf{I} 是单位矩阵.

于是 $V(u, b)$ 可以说有清晰的显示解, 而且式 (8) 中的双边时函数 $h_1(u)$ 也有显示表达. 接下来, 我们给出一个数值例子.

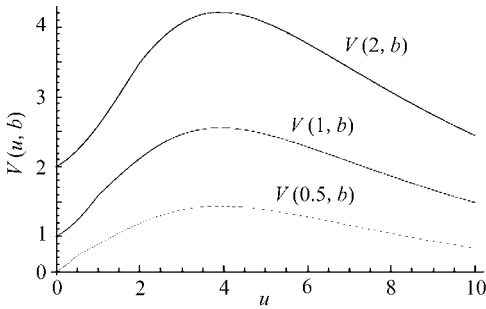
例 1 设 $\sigma = 0.03, c = 1, \lambda = 2, \delta = 0.05$, 并假设收入大小服从相位分布 $\text{PH}(\alpha, \mathbf{A})$, 其中

$$\alpha = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$$

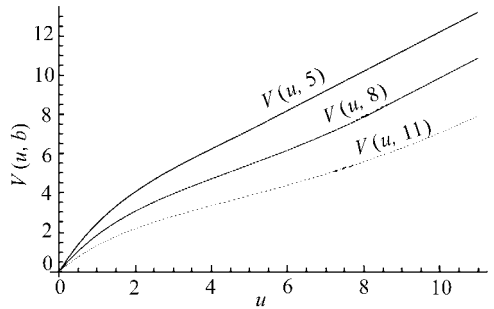
以及

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

于是有下面的 $V(u, b)$ 的图像 (图 2).



(a) $V(u, b)$ 作为 u 的函数



(b) $V(u, b)$ 作为 b 的函数

图 2 $V(u, b)$ 的图像

观察图 2(a) 我们发现最优分红边界 b^* 似乎独立于初值 u 而存在. 当跳服从相位分布时, 我们证明了这个命题的正确性, 受 Asmussen^[20] 的启发, 我们采用所谓的流的方法, 即构造二维马程 $(Y(t), L(t))$ 去模拟 $U(t)$ 的样本轨道.

假设相位分布随机变量, 即收入的分布, 是一个维数是 m 的状态集合 $E = \{1, 2, \dots, m\}$, 和吸收状态 Δ 的马氏过程的吸收时间.

于是有二维马程 $(Y(t), L(t))$ 定义如下. 其中 $Y(t)$ 是具有状态空间 $\{0\} \cup E$ 的马氏过

程, 初始分布是 $(1, \mathbf{0})$, 无穷小矩阵是 $\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda\alpha \\ -\mathbf{A}e & \mathbf{A} \end{pmatrix}$. $L(t)$ 、 $Y(t)$ 驱动的过程, 满足

$$dL(t) = \begin{cases} -c dt + \sigma dB(t), & \text{若 } Y(t) = 0, \\ dt, & \text{若 } Y(t) \in E. \end{cases} \quad (25)$$

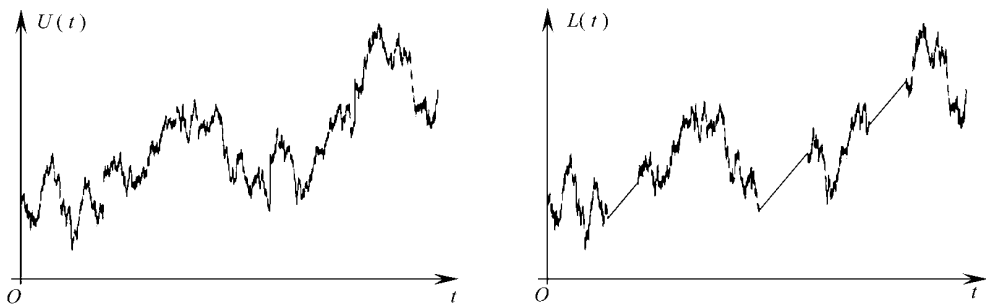


图3 $U(t)$ 和 $L(t)$ 的样本轨道比较

由下列 $U(t)$ 和 $L(t)$ 的轨道的对比, 可以发现 $U(t)$ 、 $L(t)$ 的轨道有很大的相似处, 比如

$$P(\max_{s \in [0, \infty)} L(s) > b \mid L(0) = u) =$$

$$P(\max_{s \in [0, \infty)} U(s) > b \mid U(0) = u), \quad \text{对于 } 0 < u < b,$$

此外, 如果我们定义首中时 $\zeta_x = \inf\{t \geq 0, L(t) = x\}$, 则

$$P(\zeta_b < \zeta_0 \mid L(0) = u, Y(0) = 0) =$$

$$P(\tau_b < \tau_0 \mid U(0) = u), \quad \text{对于 } 0 < u < b.$$

接下来, 我们引入 1 个 $(m+1)$ 维的矩阵 $M(u, b)$, 它的第 (i, j) 个位置的元素定义为 $M_{i,j}(u, b)$, 有表达如下, 对于 $i, j \in E \cup \{0\}$, $0 < u < b$,

$$M_{i,j}(u, b) =$$

$$E[\exp(-\delta \int_0^{\zeta_b} I(Y(s) = 0) ds), \zeta_b < \zeta_0, Y(\zeta_b) = j \mid L(0) = u, Y(0) = i],$$

其中, $I(\cdot)$ 是示性函数, $\int_0^{\zeta_b} I(Y(s) = 0) ds$ 表示 L 到达 b 前, Y 在状态 0 所花的时间, 和 τ_b 取同样的值.

容易得到

$$h_1(u) = (1, \mathbf{0}) M(u, b) e \quad \text{且} \quad h_2(u) = (1, \mathbf{0}) M(u, b) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{A}^{-1} e \end{pmatrix}. \quad (26)$$

为简单起见, 在下面的矩阵计算中采用下述符号, 用 $E^u[\cdot]$ 代替 $E[\cdot \mid L(0) = u]$, 用 τ_b 暂时性代替 $\int_0^{\zeta_b} I(Y(s) = 0) ds$. 由 $(Y(t), L(t))$ 的强马氏性,

$$M(u, b) = E^u[e^{-\delta \tau_b}, \zeta_b < \zeta_0] = E^u[e^{-\delta \tau_b}] - E^u[e^{-\delta \tau_b}, \zeta_b > \zeta_0] =$$

$$E^u[e^{-\delta \tau_b}] - E^u[e^{-\delta \tau_0}, \zeta_b > \zeta_0] E^0[e^{-\delta \tau_b}],$$

$$E^u[e^{-\delta \tau_0}, \zeta_0 < \zeta_b] = E^u[e^{-\delta \tau_0}] - E^u[e^{-\delta \tau_b}, \zeta_0 > \zeta_b] =$$

$$E^u[e^{-\delta \tau_0}] - E^u[e^{-\delta \tau_b}, \zeta_b > \zeta_0] E^b[e^{-\delta \tau_0}],$$

于是有

$$E^u[e^{-\delta \tau_b}, \zeta_b < \zeta_0] =$$

$$(E^u[e^{-\delta \tau_b}] - E^u[e^{-\delta \tau_0}] E^0[e^{-\delta \tau_b}]) (I - E^b[e^{-\delta \tau_0}] E^0[e^{-\delta \tau_b}])^{-1}.$$

借由 Asmussen^[20] 的讨论, 存在 1 个 $(m+1)$ 维的矩阵 Q_1 以及 1 个 $(m+1)$ 维的矩阵函数 $K(x)$ 使得

$$E^u[e^{-\delta\tau_b}] = e^{Q_1(b-u)} \text{ 以及 } E^u[e^{-\delta\tau_0}] = K(u), \quad \forall 0 < u < b,$$

事实上, Q_1 和式(24) 中的 Q 取值一样, 于是

$$M(u, b) = E^u[e^{-\delta\tau_b}, \zeta_b < \zeta_0] = \text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1}, \quad (27)$$

其中, $\text{mat}(u) = e^{-Qu} - K(u)$.

另一方面, 我们扩展 $V(u, b)$ 的定义, 构造一系列更广的函数,

$$V_j(u, b) = E\left[\int_0^{\tau_0} e^{-\delta s} dD(s) \mid U_b(0) = u, Y(0) = j\right], \quad \text{对 } \delta > 0. \quad (28)$$

首先, 对于 $j \neq 0$

$$V_0(u, b) = V(u, b), \quad V_j(b, b) = V(b, b) - e_j A^{-1}e,$$

其中, e_j 是 m 维单位矩阵的第 j 行. 经过计算,

$$-\frac{\partial^-}{\partial u} V_j(b, b) = \text{row}_j(-Ae, A) \begin{bmatrix} V_0(b, b) \\ \vdots \\ V_m(b, b) \end{bmatrix} = \text{row}_j(-Ae, A) \begin{bmatrix} 0 \\ -A^{-1}e \end{bmatrix} + V(b, b) \text{row}_j(-Ae, A)e = -1,$$

此处 $-(\partial^- / \partial u) V_j(b, b)$ 是 $V_j(u, b)$ 关于 u 的在 b 点的左导数, 结合定理 2.1, 记

$$V(u, b) = \begin{bmatrix} V_0(b, b) \\ \vdots \\ V_m(b, b) \end{bmatrix},$$

则

$$V(u, b) = \text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1} \begin{bmatrix} V(b, b) \\ V(b, b)e - A^{-1}e \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} V(b, b) = e = \text{mat}'(b)\text{mat}(b)^{-1} \begin{bmatrix} V(b, b) \\ V(b, b)e - A^{-1}e \end{bmatrix},$$

其中, $\text{mat}'(b)$ 表示矩阵函数 $\text{mat}(b)$ 关于 b 的导数, $(\text{mat}'(b))_j = (\text{mat}(b)_{ij})'$.

由 $\text{mat}(b)\text{mat}(b)^{-1} = I$, $(\text{mat}(b)^{-1})' = -\text{mat}(b)^{-1}\text{mat}'(b)\text{mat}(b)^{-1}$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} V(u, b) &= \text{mat}(u)(\text{mat}(b)^{-1})' \begin{bmatrix} V(b, b) \\ V(b, b)e - A^{-1}e \end{bmatrix} + \\ &\text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1} \begin{bmatrix} V(b, b) \\ V(b, b)e - A^{-1}e \end{bmatrix}' = \\ &-\text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1}e + \text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1}e \left[\frac{\partial}{\partial u} V(b, b) + \frac{\partial}{\partial b} V(b, b) \right] = \\ &(\text{mat}(u)\text{mat}(b)^{-1}e) \frac{\partial}{\partial b} V(b, b). \end{aligned} \quad (29)$$

定理 3.1 如果收入大小服从相位分布, 那么最优分红边界 b^* 是独立于初值存在的.

就带壁的分红策略而言, 最优分红边界 b^* 关于初值的独立性在风险理论和应用中都是有意义的. 当盈余过程服从谱负 Levy 过程时, 命题是正确的. 但是对于谱正的过程, 由于过程向上的不连续性, 命题有待检验, Avarzi 等人^[12] 给出了不带干扰的对偶模型的结论, 我们将

命题推广到了具有相位收入的模型.

致谢 作者感谢那些匿名的审稿人,在他们的帮助下,文章得到了更好的表达.

[参 考 文 献]

- [1] Gerber H U. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk [J]. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1970, (3): 205– 210.
- [2] Gerber H U, Landry B. On the discounted penalty at ruin in a jump– diffusion and the perpetual put option[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998, **22**(3): 263– 276.
- [3] Chiu S N, Yin C C. The time of ruin, the surplus prior to ruin and the deficit at ruin for the classical risk process perturbed by diffusion[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, **33**(1): 59– 66.
- [4] Tsai C C L. On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, **28**(3): 401– 419.
- [5] Zhang C, Wang G. The joint density function of three characteristics on jump– diffusion risk process [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, **32**(3): 445– 455.
- [6] De Finetti B. Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio[A]. In: *Proceedings of the Transactions of the XV International Congress of Actuaries* [C]. Vol 2. 1957, 433– 443.
- [7] Dickson D C M, Waters H. Some optimal dividends problems[J]. *ASTIN Bulletin*, 2004, **34**(1): 49– 74.
- [8] Gerber H U. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1981, (2): 105– 115.
- [9] Gerber H U, Shiu E S W. Optimal dividends analysis with Brownian motion[J]. *North American Actuarial Journal*, 2004, **8**(1): 1– 20.
- [10] Li S, Garrido J. On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, **35**(3): 691– 701.
- [11] Lin X S, Willmot G E, Drekić S. The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber– Shiu discounted penalty function[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, **33**(3): 551– 566.
- [12] Avanzi B, Gerber H U, Shiu E S W. Optimal dividend in the dual model[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, **41**(1): 111– 123.
- [13] Karatzas Ioannis, Steven E Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus* [M]. New York: Springer– Verlag, 1988.
- [14] Revuz Daniel, Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion* [M]. Berlin: Springer– Verlag, 1991.
- [15] Wang G, Wu R. Some distributions for the classical risk processes that is perturbed by diffusion[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2000, **26**(1): 15– 24.
- [16] Wang G. A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, **28**(1): 49– 59.
- [17] Tsai C C L, Willmot G E. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2002, **30**(1): 51– 66.
- [18] Asmussen S. *Ruin Probabilities* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Inc, 2000.
- [19] Asmussen S. *Applied Probability and Queues* [M]. New York: Springer– Verlag, 2003.
- [20] Asmussen S. Stationary distributions for fluid flow models with or without Brownian noise [J].

Stochastic Models, 1995, **11**(1): 21– 49.

Dividend Function in the Jump– Diffusion Dual Model With Barrier Dividend Strategy

LI Bo, WU Rong

(School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P. R. China)

Abstract: A dual model of the perturbed classical compound Poisson risk model under a constant dividend barrier was considered. A new method is used in deriving the boundary condition of the equation satisfied by that expectation function, by using the local time of a related process. The expression for the expected discounted dividend function was obtained in terms of those in the corresponding perturbed compound Poisson risk model without barrier. The special cases where the gain size is phase-type distributed is illustrated in the last section. Also the existence of the optimal dividend level was considered.

Key words: compound Poisson process; diffusion process; Gerber– Shiu function; integro– differential equation; time of ruin; surplus before ruin; deficit at ruin