文章编号: 1000-0887(2008) 10-1254-07

(2+1) 维非线性 Schrödinger 型方程的同宿轨道*

沈守枫, 张 隽

(浙江工业大学 应用数学系, 杭州 310023)

(郭柏灵推荐)

摘要: 研究了几类(2+1) 维非线性 Schrödinger 型方程同宿轨道的问题. 利用 Hirota 双线性算子方法, 通过给出的相关变换, 得到了包括(2+1) 维的长短波相互作用方程, 广义 Zakharov 方程, Mel'nikov 方程和 g-Schrödinger 方程的同宿轨道解的显式解析表达式, 从而讨论了这些方程的同宿轨道.

关 键 词: 非线性 Schrödinger 型方程; 同宿轨道; Hirota 双线性方法
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

非线性 Schrödinger 方程一直以来都是孤子理论及其应用研究的重点, 因为它可以描述许多物理现象. 在一般的初始条件下, 非线性 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0$ 不会产生混沌, 这个结果的证明是用反散射方法. 后来, Herbst 和 Ablowitz[1-2] 发现, 把非线性 Schrödinger 方程离散后, 用数值模拟的方法, 当离散化的步长足够小的时候, 该方程产生了混沌现象. 这引起了很大的反响. 随后, 他们又用 Hirota 双线性算子方法[3], 构造出非线性 Schrödinger 方程的一类新的孤子解. 这类解有一个特殊的性质, 当对时间 t 取极限时, 解的极限值仍是方程的一个解, 类似于动力系统中的同宿轨道, 故而取名为同宿轨道解 . 除了 Schrödinger 方程, 他们还对复 mKdV 方程, sine-Gordon 方程[4-5] 进行了研究, 找到了类似的同宿轨道解. 从而, 对于可积的孤子方程来说, 能否产生混沌现象与是否存在同宿轨道解是密切相关的. 所以研究可积系统的同宿轨道解的存在性就尤为重要.

另一方面, Li[6] 等学者研究了加小扰动项的非线性 Schrödinger 方程与 Davey-Stewartson 方程的同宿轨道的不变性, 他们成功地把对常微分方程的同宿轨道及混沌的讨论方法延拓到了偏微分方程中来. 值得注意的是, 在这些文章里, 用来求同宿轨道解的方法是孤立子理论中求精确解的另一种方法: Bäcklund-Darboux 变换方法. 最近, Hu 等学者[7-9] 又陆续发现了其它一些方程如(1+1) 维 Schrödinger-Boussinesq 方程, 耦合 Higgs 方程等的同宿轨道解. 但是, 除了以上方程以外, 很少能找到具有同宿轨道解的可

* 收稿日期: 2008-05-07; 修订日期: 2008-09-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10501040)
作者简介: 沈守枫(1977—) , 男, 浙江天台人, 副教授, 博士(联系人. E-mail: mathssf@yahoo.com.cn).

积方程成为孤子理论研究中的一个很有意义的工作.

本文利用 Hirota 双线性算子方法, 得到了包括(2+ 1) 维的长短波相互作用方程, 广义 Zakharov 方程, Mel' nikov 方程和 g-Schrödinger 方程的同宿轨道解及其所表示的同宿轨道.

1　长短波相互作用方程的同宿轨道

对于(2+ 1) 维的长短波相互作用方程[10], 我们先叙述得到的如下定理.

定理 1　(2+ 1) 维长短波相互作用方程

$$\mathrm{i}(u_t+u_y)-u_{xx}+uv=0, \tag{1}$$

$$v_t-2(|u|^2)_x=0, \tag{2}$$

有同宿轨道解

$$u=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\,\frac{1+(b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_3\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}{1+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}, \tag{3}$$

$$v=-a+\frac{8p^2b_4^2+2p^2b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})(\mathrm{e}^{-\Omega t-\gamma}+b_5\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma})}{[\mathrm{e}^{-\Omega t-\gamma}+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})+b_5\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}]^2}. \tag{4}$$

这里的系数分别是

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{\mathrm{i}\Omega-q-p^2}{\mathrm{i}\Omega-q+p^2}b_4,\quad b_2=\dfrac{\mathrm{i}\Omega+q-p^2}{\mathrm{i}\Omega+q+p^2}b_4,\\[2ex] b_3=\dfrac{(\mathrm{i}\Omega-p^2)^2-q^2}{(\mathrm{i}\Omega+p^2)^2-q^2}\left(\dfrac{\Omega^2+p^4}{\Omega^2}\right)b_4^2,\quad b_5=\dfrac{\Omega^2+p^4}{\Omega^2}b_4^2. \end{cases} \tag{5}$$

另外还需满足约束条件

$$-\Omega^2+q^2=p^4,\ 2q^2-2\Omega^2+pq\Omega^2=0. \tag{6}$$

该解析解(3) ~ (4) 式表示了一个同宿轨道(不失一般性, 取 $\Omega>0$),

$$u\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\ v\to-a\qquad(t\to-\infty), \tag{7}$$

$$u\to\frac{(\mathrm{i}\Omega-p^2)^2-q^2}{(\mathrm{i}\Omega+p^2)^2-q^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\ v\to-a\qquad(t\to+\infty). \tag{8}$$

定理 1 的证明

由 Painlevé 分析可取相关变量变换

$$u=G/F,\ v=-2(\ln F)_{xx}+A, \tag{9}$$

这里的 A、F、G 分别为待定的常数、实值函数和复值函数. 则可以把方程(1) ~ (2) 变换为如下 Hirota 双线性形式的方程

$$(\mathrm{i}D_t+\mathrm{i}D_y-D_x^2+A)G\cdot F=0, \tag{10}$$

$$(D_xD_t-B)F\cdot F+2G\cdot G^*=0, \tag{11}$$

其中, B 是积分常数. 这里 Hirota 双线性算子 $D_x^mD_y^nD_t^k$ 定义为[3]

$$D_x^mD_y^nD_t^ka\cdot b\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y'}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^k\times$$
$$a(x,y,t)b(x',y',t')\,|_{x'=x,\,y'=y,\,t'=t}. \tag{12}$$

类似于(1+ 1) 维非线性 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}u_t+u_{xx}+2|u|^2u=0$ 同宿轨道解的取法[1-2], 我们设

$$G=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}[1+(b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_3\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}], \tag{13}$$

$$F=1+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}, \tag{14}$$

其中 a、p、q、Ω、γ、b_4、b_5 是实的待定常数, 而 b_1、b_2、b_3 是复的待定常数. 把式(13)~(14)代入双线性方程(10), 并且利用 Hirota 双线性形算子的各种恒等式, 令 $e^{-2\Omega t-2\gamma}$ 的系数为 0, 可以得到 $A = a$. 由 $e^{-\Omega t-\gamma}$ 的系数可以得到

$$-i\Omega b_4(e^+ + e^-) + i\Omega(b_1e^+ + b_2e^-) - q(b_1e^+ - b_2e^-) + b_4q(e^+ - e^-) + p^2(b_1e^+ + b_2e^-) + b_4p^2(e^+ + e^-) = 0. \tag{15}$$

这里为简化起见, 记 $e^+ = e^{ipx+iqy}$, $e^- = e^{-ipx-iqy}$, $e^{2+} = e^{2ipx+2iqy}$ 等. 从而, 由上式有

$$e^+: -i\Omega b_4 + i\Omega b_1 - b_1q + b_4q + b_1p^2 + b_4p^2 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{i\Omega - q - p^2}{i\Omega - q + p^2}b_4, \tag{16}$$

$$e^-: -i\Omega b_4 + i\Omega b_2 + b_2q - b_4q + b_2p^2 + b_4p^2 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{i\Omega + q - p^2}{i\Omega + q + p^2}b_4. \tag{17}$$

从 e^0 的系数可以得到

$$\begin{aligned}&i\Omega b_3 - i\Omega b_5 - ib_5\Omega + ib_3\Omega - qb_4(b_1e^+ - b_2e^-)(e^+ + e^-) + \\&\quad b_4q(e^+ - e^-)(b_1e^+ + b_2e^-) + p^2b_4(b_1e^+ + b_2e^-)(e^+ + e^-) - \\&\quad 2b_4p^2(b_1e^+ - b_2e^-)(e^+ - e^-) + b_4p^2(e^+ + e^-)(b_1e^+ + b_2e^-) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

也就是

$$-i\Omega b_5 + i\Omega b_3 + (2p^2 - q)b_1b_4 + (2p^2 + q)b_2b_4 = 0. \tag{19}$$

再从 $e^{\Omega t+\gamma}$ 的系数, 可以得到

$$\begin{aligned}&ib_3\Omega b_4(e^+ + e^-) - ib_5\Omega(b_1e^+ + b_2e^-) - b_5q(b_1e^+ - b_2e^-) + \\&\quad b_4q(e^+ - e^-)b_3 + b_5p^2(b_1e^+ + b_2e^-) + b_4p^2(e^+ + e^-)b_3 = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

则有

$$e^+: (i\Omega + q - p^2)b_1b_5 = (i\Omega + q + p^2)b_3b_4, \tag{21}$$

$$e^-: (i\Omega - q - p^2)b_2b_5 = (i\Omega - q + p^2)b_3b_4. \tag{22}$$

从而利用式(16)~(17), 式(19)和(21)~(22)可以得到 b_3、b_5 为

$$b_3 = \frac{(i\Omega - p^2)^2 - q^2}{(i\Omega + p^2)^2 - q^2}b_5, \tag{23}$$

$$b_5 = \frac{\Omega^2 + p^4}{\Omega^2}b_4^2. \tag{24}$$

接下来, 从 Hirota 双线性型方程(11)将可以导出约束条件(6). 首先, 我们能够从 $e^{-2\Omega t-2\gamma}$ 的系数得到 $B = 2$. 而令 $e^{-\Omega t-\gamma}$ 的系数为 0 可得到

$$2ipb_4\Omega(e^+ - e^-) - 2b_4B(e^+ + e^-) + 2(b_1^*e^- + b_2^*e^+) + 2(b_1e^+ + b_2e^-) = 0, \tag{25}$$

也就是

$$e^+: i\Omega pb_4 - 2b_4 + (b_2^* + b_1) = 0, \tag{26}$$

$$e^+: -i\Omega pb_4 - 2b_4 + (b_1^* + b_2) = 0. \tag{27}$$

再从 e^0 的系数, 有

$$-Bb_4^2(e^+ + e^-)^2 - 2Bb_5 + 2(b_3^* + b_3) + 2(b_1e^+ + b_2e^-)(b_1^*e^- + b_2^*e^+) = 0. \tag{28}$$

分离上式为

$$e^{2+}: -b_4^2 + b_1b_2^* = 0, \tag{29}$$

$$e^{2-}: -b_4^2 + b_2b_1^* = 0, \tag{30}$$

$$e^0: -2b_4^2 - 2b_5 + b_3^* + b_3 + b_1b_1^* + b_2b_2^* = 0. \tag{31}$$

由 $e^{\Omega t+\gamma}$ 的系数, 可以得到方程,

$$-\mathrm{i}\Omega p(e^{+}-e^{-})b_4b_5-2(e^{+}+e^{-})b_4b_5+ \\ b_3(b_1^*e^{-}+b_2^*e^{+})+b_3^*(b_1e^{+}+b_2e^{-})=0. \tag{32}$$

分离式(32)为

$$e^{+}:\ -\mathrm{i}\Omega pb_4b_5-2b_4b_5+b_3b_2^*+b_3^*b_1=0, \tag{33}$$

$$e^{-}:\ \mathrm{i}\Omega pb_4b_5-2b_4b_5+b_3b_1^*+b_3^*b_2=0. \tag{34}$$

最后, 等式 $b_5^2=|b_3|^2$ 可由 $e^{2\Omega t+2\gamma}$ 的系数为 0 导出. 把得到的 b_1、b_2、b_3、b_5 代入上面各式并验证其相容性, 即可以导出约束条件

$$-\Omega^2+q^2=p^4,\ 2q^2-2\Omega^2+pq\Omega^2=0. \tag{35}$$

证毕.

2 广义 Zakharov 方程的同宿轨道

在文献[11]中, Fokas 得到了如下可积的广义 Zakharov 方程

$$\mathrm{i}u_t+\alpha u_{xx}+\beta u_{yy}-2(\alpha v+\beta w)u=0, \tag{36}$$

$$v_y=\lambda(|u|^2)_x, \tag{37}$$

$$w_x=\lambda(|u|^2)_y. \tag{38}$$

Radha 和 Lakshmanan[12] 对其进行了奇性流形分析, 指出了该方程具有 Painlev 性质并且得到了多-dromions 解和呼吸子解. 这里取相关变量变换

$$u=G/F,\ v=-(\ln F)_{xx}+A,\ w=-(\ln F)_{yy}+B \tag{39}$$

和式(13)~(14), 再利用 Hirota 双线性方法得到如下定理.

定理 2 广义 Zakharov 方程(36)~(38)的同宿轨道解为

$$u=e^{-\mathrm{i}at}\frac{1+(b_1e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+b_2e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})e^{\Omega t+\gamma}+b_3e^{2\Omega t+2\gamma}}{1+b_4(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})e^{\Omega t+\gamma}+b_5e^{2\Omega t+2\gamma}}, \tag{40}$$

$$v=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{2}-B\beta\right)-\frac{4p^2b_4^2+p^2b_4(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})(e^{-\Omega t-\gamma}+b_5e^{\Omega t+\gamma})}{[e^{-\Omega t-\gamma}+b_4(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})+b_5e^{\Omega t+\gamma}]^2}, \tag{41}$$

$$w=B-\frac{4q^2b_4^2+q^2b_4(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})(e^{-\Omega t-\gamma}+b_5e^{\Omega t+\gamma})}{[e^{-\Omega t-\gamma}+b_4(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})+b_5e^{\Omega t+\gamma}]^2}, \tag{42}$$

其中的系数和约束条件分别为

$$\begin{cases} b_1=b_2=\dfrac{\mathrm{i}\Omega+\alpha p^2+\beta q^2}{\mathrm{i}\Omega-\alpha p^2-\beta q^2}b_4, \\ b_3=\left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega+\alpha p^2+\beta q^2}{\mathrm{i}\Omega-\alpha p^2-\beta q^2}\right)^2\dfrac{\Omega^2+(\alpha p^2+\beta q^2)^2}{\Omega^2}b_4^2, \\ b_5=\dfrac{\Omega^2+(\alpha p^2+\beta q^2)^2}{\Omega^2}b_4^2, \end{cases} \tag{43}$$

$$p^5q\alpha^2+2p^3q^3\alpha\beta+4p^4\alpha^2\lambda+8p^2q^2\alpha\beta\lambda+4q^4\beta^2\lambda+pq(q^4\beta^2+\Omega^2)=0. \tag{44}$$

该解表示一个同宿轨道(取 $\Omega>0$)

$$u\to e^{-\mathrm{i}at},\ v\to\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{2}-B\beta\right),\ w\to B \qquad (t\to-\infty), \tag{45}$$

$$u\to\left(\frac{\mathrm{i}\Omega+\alpha p^2+\beta q^2}{\mathrm{i}\Omega-\alpha p^2-\beta q^2}\right)^2e^{-\mathrm{i}at},\ v\to\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{2}-B\beta\right),\ w\to B \qquad (t\to+\infty). \tag{46}$$

因为证明方法和过程类似,这里和下述定理的证明均略去.

3　Mel'nikov 方程的同宿轨道

Mel'nikov 在文献[13]中得到了如下的非线性方程:

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} - uv = 0, \tag{47}$$

$$(v_y + 6vv_x + v_{xxx})_x - 3v_{tt} + k(|u|^2)_{xx} = 0. \tag{48}$$

文献[7]中的(1+1)维 Schrödinger-Boussinesq 方程是上述方程的一个群约化子方程. 为了得到同宿轨道解,我们先取相关变量变换为

$$u = G/F,\quad v = 2(\ln F)_{xx} + A \tag{49}$$

和式(13)~(14). 再利用 Hirota 方法,可以得到如下定理.

定理 3　(2+1)维 Mel'nikov 方程有同宿轨道解

$$u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\frac{1+(b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_3\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}{1+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}+b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}, \tag{50}$$

$$v = a - \frac{8p^2b_4^2 + 2p^2b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})(\mathrm{e}^{-\Omega t-\gamma}+b_5\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma})}{[\mathrm{e}^{-\Omega t-\gamma}+b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})+b_5\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}]^2}, \tag{51}$$

其中系数和约束条件为

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \dfrac{\mathrm{i}\Omega - p^2}{\mathrm{i}\Omega + p^2}b_4, \\ b_3 = \left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega - p^2}{\mathrm{i}\Omega + p^2}\right)^2\dfrac{\Omega^2+p^4}{\Omega^2}b_4^2, \\ b_5 = \dfrac{\Omega^2+p^4}{\Omega^2}b_4^2, \end{cases} \tag{52}$$

$$(p^4 - 6ap^2 - pq - 3\Omega^2)(p^4 + \Omega^2) = 2kp^4. \tag{53}$$

该解表示一个同宿轨道(取 $\Omega > 0$)

$$u \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\quad v \to a \qquad (t \to -\infty), \tag{54}$$

$$u \to \left(\frac{\mathrm{i}\Omega - p^2}{\mathrm{i}\Omega + p^2}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\quad v \to a \qquad (t \to +\infty). \tag{55}$$

4　g-Schrödinger 方程的同宿轨道

在文献[14]中, Strachan 研究了如下的 g-Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - u_{xy} - uv = 0, \tag{56}$$

$$v_x - 2(|u|^2)_y = 0, \tag{57}$$

得到了单孤子解. 这里,我们给出该方程的同宿轨道解和其所表示的同宿轨道.

定理 4　(2+1)维 g-Schrödinger 方程的同宿轨道解为

$$u = G/F,\quad v = a + 2(\ln F)_{xy} \tag{58}$$

和式(13)~(14),其中系数和约束条件分别为

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \dfrac{\mathrm{i}\Omega - pq}{\mathrm{i}\Omega + pq}b_4, \\ b_3 = \left(\dfrac{\mathrm{i}\Omega - pq}{\mathrm{i}\Omega + pq}\right)^2\dfrac{\Omega^2+p^2q^2}{\Omega^2}b_4^2, \\ b_5 = \dfrac{\Omega^2+p^2q^2}{\Omega^2}b_4^2, \end{cases} \tag{59}$$

$$\Omega^2 + (p^2 - 4)q^2 = 0. \tag{60}$$

该解表示一个同宿轨道(取 $\Omega > 0$)

$$u \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\ v \to a \qquad (t \to -\infty), \tag{61}$$

$$u \to \left(\frac{\mathrm{i}\Omega - pq}{\mathrm{i}\Omega + pq}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at},\ v \to a \qquad (t \to +\infty). \tag{62}$$

5 总结与讨论

同宿轨道(异宿轨道)之所以重要,一方面,它与湍流相干结构的一种——孤立波相联系,又和非孤立波相干结构——涡旋有关,另一方面,轨道横截相交是出现混沌的必要条件. 因此,对其研究有助于分析动力系统解的结构性质[15]. 本文中,利用 Hirota 双线性算子方法构造了几类(2+1)维非线性 Schrödinger 型方程的同宿轨道解(即定理 1~定理 4). 进一步可以考虑同宿轨道解的结构,即与时空混沌的关系. 文献[15]详细讨论了 Davey-Stewartson 方程的同宿轨道解的结构和产生混沌的关系,当中的方法可以类推到本文中的方程. 限于篇幅,这里略去.

最后,关于这方面的后继研究包括:构造其它(2+1)维非线性方程的同宿轨道解. 利用变换群约化方法研究将方程约化为低维偏微分方程,甚至是常微分方程后,同宿轨道解是否能够保持?

致谢 作者感谢审稿人的意见和帮助!

[参 考 文 献]

[1] Herbst B M, Ablowitz M J. Numerically induced chaos in the nonlinear Schrödinger equation[J]. Physical Review Letters, 1989, **62**(18): 2065-2068.

[2] Ablowitz M J, Herbst B M. On homoclinic structure and numerically induced chaos for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990, **50**(2): 339-351.

[3] Hirota R. Direct methods in soliton theory[A]. In: Bullough R K, Caudey E J, Eds. Solitons[C]. Berlin: Springer, 1980, 157-176.

[4] Ablowitz M J, Herbst B M. On the numerical solution of the Sine-Gordon equation—Ⅰ integrable discretizations and homoclinic manifolds[J]. Journal of Computational Physics, 1996, **126**(2): 299-314.

[5] Herbst B M, Ablowitz M J, Ryan E. Numerical homoclinic instabilities and the complex modified Korteweg-de Vries Equation[J]. Computer Physics Communications, 1991, **65**(1): 137-142.

[6] Li Y G. Backlund transformations and homoclinic structures for the integrable discretization of the NLS equation[J]. Physics Letters A, 1992, **163**(3): 181-187.

[7] HU Xin-biao, GUO Bo-lin, Tam H W. Homoclinic orbits for the coupled Schrödinger-Boussinesq equation and coupled Higgs equation[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2003, **72**(1): 189-190.

[8] 张隽, 郭柏灵, 沈守枫. Davey-Stewartson 方程的同宿轨道[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(2): 127-129.

[9] ZHANG Jun, GUO Bo-ling, SHEN Shou-feng. Homoclinic orbits of the doubly periodic Davey-Stewartson equation[J]. Progress in Natural Science, 2004, **14**(11): 1031-1032.

[10] Derek W C Lai, Kwok W Chow. 'Positon' and 'Dromion' solutions of the (2+1) dimensional long wave-short wave resonance interaction equations[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1999, **68**(6): 1847-1853.

[11] Fokas A S. On the simplest integrable equation in 2+1[J]. Inverse Problems, 1994, **10**(2): L19-L22.

[12] Radha R, Lakshmanan M. Localized coherent structures and integrability in a generalized (2+ 1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1997, **8**(1): 17-25.
[13] Mel' nikov V K. Reflection of waves in nonlinear integrable systems[J]. Journal of Mathematical Physics, 1987, **28**(2): 2603-2609.
[14] Strachan I A B. Wave solutions of a (2+ 1)-dimensional generalization of the nonlinear Schrödinger equation[J]. Inverse Problems, 1992, **8**(5): L21-L28.
[15] 戴正德, 蒋慕容, 李栋龙. 戴维-斯特瓦尔松方程[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

Homoclinic Orbits for Some (2+ 1)-Dimensional Nonlinear Schrödinger-Like Equations

SHEN Shou-feng, ZHANG Jun
(Department of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, P. R. China)

Abstract: Chaos is closely associated with homoclinic orbits in deterministic nonlinear dynamics. Analytic expressions of homoclinic orbits for some (2+ 1)-dimensional nonlinear Schrödinger-like equations, which include the long wave-short wave resonance interaction equation, generalization of the Zakharov equation, Mel' nikov equation and g-Schrödinger equation, are constructed based on Hirota's bilinear method.

Key words: Schrödinger-like equation; homoclinic orbit; bilinear method