文章编号: 1000-0887(2008) 11-1293-10

有噪及无噪的时滞细胞神经网络稳定性分析*

张雪娟[1], 王冠香[2], 刘 华[3]

(1. 浙江绍兴文理学院 数学系, 浙江 绍兴 312000;
2. 北京大学 数学科学学院, 北京 100871;
3. 北京大学 光华管理学院, 北京 100871)

(刘曾荣推荐)

摘要: 分析了一类时滞细胞神经网络(DCNN)系统在无噪声和有噪声干扰情况下的稳定性. 首先针对确定性系统给出了一种简单且容易验证的全局指数稳定性条件, 然后讨论了噪声干扰下系统的稳定性. 当 DCNN 被外部噪声扰动时, 系统是全局稳定的. 重要的是, 当系统被内在噪声扰动时, 只要噪声总强度控制在一定范围内, 系统是全局指数稳定的. 鉴于随机共振现象在越来越多的非线性生物系统中被发现, 这种稳定性具有重要意义.

关 键 词: 时滞细胞神经网络; 全局指数稳定性; 外部\内部噪声
中图分类号: O175; O221 文献标识码: A

引 言

自从 1988 年 Chua 和 Yang[1-2] 提出著名的细胞神经网络(CNNs)模型以来, 已经发现它在信号处理、模式识别和联想记忆等领域具有广泛的应用. 由于信号沿神经细胞传输时常有时间延迟, 所以, 时滞型细胞神经网络(DCNNs)模型最近被提出[3-4]. 该模型还在运动图像处理及分类、运动物体速度探测等方面具有特殊的应用. 时滞细胞神经网络模型可写成如下方程:

$$\dot{x}_i(t) = I_i - d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)), \tag{1}$$

$$x_i(t) = \phi_i(t), \qquad -\tau_i \leqslant t \leqslant 0; \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

其中 $x_i(t)$ 是第 i 个单元于时刻 t 的状态函数, $I_i \geqslant 0$ 是第 i 个单元所受的常数驱动力, $f_j(x_j(t))$ 是第 j 个单元于时刻 t 的输出, $\tau_j \geqslant 0$ 是第 j 个单元的传输时间延迟, $\phi_i(t) \in C_{[-\tau_i, 0]}$ 是初始条件, $d_i > 0$, n 是网络的规模.

在应用中, CNNs 和 DCNNs 的全局收敛性具有重要意义. 比如在图像处理中, 要求网络收敛到整体浸润区. 在文献中, 确定性的细胞神经网络系统和时滞细胞神经网络系统的全局稳定性已有分析[4-12]. 但很多情况下, 一个生物系统很难避免噪声的影响. 因此, 一个自然的问题便是, 网络系统在噪声的干扰下, 其全局收敛性(即稳定性)如何.

通常, 在一个热环境中, 一个细胞神经网络系统或子系统与另一个系统或子系统或神经器

* 收稿日期: 2008-04-08; 修订日期: 2008-08-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771155); 全国优秀博士学位论文作者专项基金资助项目
作者简介: 张雪娟(1972—), 女, 浙江绍兴人, 教授, 博士;
王冠香(1964—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: gxwang@math.pku.edu.cn).

官相联的模型可以用(1)式来描述. 众所周知,在一定情况下,环境温度对电子或电信号传输的影响是不能被忽略的. 所以,热环境及邻近器官对所考察的网络系统有噪声干扰,谓之外部噪声. 现假设外部噪声主要以热噪声的形式出现,则噪声扰动后的时滞细胞神经网络(DCNNs)(1)应写成

$$\dot{x}_i(t) = I_i - d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + D_i \xi_i(t), \tag{3}$$

其中, $\xi_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是作用在第 i 个单元上的Gauss 白噪声, $\xi_i(t)$ 满足

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta(t - t'),$$

且 D_i 为噪声强度.

另一方面, 在同一网络中,并不是所有单元都同时达到平衡态,从而不同单元间具有温度差. 因此在单元之间,除了诸如 $a_{ij} f_j$ 和 $b_{ij} f_j$ 这样的直接的和时滞的作用之外,还有噪声型的相互作用,谓之内在噪声. 此种情况下,噪声干扰下的细胞神经网络系统可写成

$$\dot{x}_i(t) = I_i - d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, g_j(x_j(t))\, \xi_j(t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

其中, $c_{ij} > 0$ 表示从第 j 个单元向第 i 个单元发出的噪声的强度, $|g_i(x)| < 1$ 满足

$$g_i(x_i^*) = 0, \tag{5}$$

$$\exists\, \mu_i > 0, \quad \text{s.t.}\ |g_i(u) - g_i(v)| < \mu_i |u - v|, \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

其中, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 是(1)式的平衡点. 条件(5)表示,如果第 i 个单元已经到达平衡态,则它不再向其他单元发送噪声干扰.

本文证明了确定性系统 DCNNs(1)和内在噪声干扰下的 DCNNs(4)的全局指数稳定性,还证明了外部噪声扰动下的 DCNNs(3)的全局稳定性. 关于这些稳定性,定义如下.

定义 1 确定性 DCNNs(1)称作是全局指数稳定的,如果(1)式具有唯一的指数稳定的平衡点 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$. 确切地说,存在常数 $M_i > 0$, $\beta_i \in (0, 1)$, $h_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 DCNNs(1)的任何解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 满足

$$|x_i(t) - x_i^*| \leqslant M_i \beta_i^{[t/h_i]}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;\ t > 0, \tag{7}$$

其中, $[t]$ 表示 t 的整数部分.

定义 2 外部噪声扰动下的 DCNNs(3)称作是全局稳定的,如果存在常数 $M_i > 0$, $s_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使得,对(3)式的任何解 $x(t)$ 有

$$E[(x_i(t) - x_i^*)^2] \leqslant M_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;\ t \geqslant s_i, \tag{8}$$

其中, $M_i > 0$ 依赖于 D_i, 当 $D_i \to 0$ 时 $M_i \to 0$, $E[\cdot]$ 表示数学期望.

定义 3 内在噪声扰动下的 DCNNs(4)称作是全局指数稳定的,如果存在常数 $M_i^* > 0$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $h_i^* > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使得,对 DCNNs(4)的任何解 $x(t)$ 有

$$E[(x_i(t) - x_i^*)^2] \leqslant M_i^* \gamma_i^{[t/h_i^*]}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;\ t > 0. \tag{9}$$

为方便,本文采用下列符号:

$$d = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{d_i\}, \quad \tau = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\tau_i\}, \quad I = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{I_i\},$$

$$\|\phi_i\| = \max_{-\tau_i \leqslant t \leqslant 0} |\phi_i(t)|, \qquad \phi_i(t) \in C_{[-\tau_i, 0]};\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

在下述分析中,将使用下列假设:

假设 1 所有 $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是定义在$(-\infty, \infty)$上的有界 Lipschitz 连续函数,即

$$\|f_i\| \equiv \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_i(x)| < +\infty, \tag{10}$$

$$\exists\, l_i > 0, \quad \text{s.t.}\ |f_i(u) - f_i(v)| \leqslant l_i |u - v|, \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}. \tag{11}$$

应当指出,Zhang 等人[12]分析过类似的确定性 DCNN 系统的全局指数稳定性,Zhang 等人的稳定性条件不包括f_i的有界性,但却需要矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的一些条件. 并且,Zhang 等人的假设

$$0 \leqslant (u_i - v_i)[f_i(u_i) - f_i(v_i)] \leqslant L_i(u_i - v_i)^2, \qquad \forall u_i, v_i \in \mathbf{R}$$

限制$f_i(x)$于单调函数类中,而这在生物系统中不具有一般性.

1 确定性 DCNNs 系统的全局稳定性

本节讨论 DCNNs(1). 首先有(1)式、(2)式的解的有界性结果.

引理 1.1 在假设 1 下,对任意初值$\left\{\phi_i(t), i = 1, 2, \cdots, n, t \in [-\tau_i, 0]\right\}$,存在常数 $R_i > 0$ 和时刻 $T_i \geqslant 0$ 使得

$$|x_i(t)| \leqslant R_i, \qquad t \geqslant T_i;\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{12}$$

证明 从(1)式可得

$$2x_i\dot{x}_i(t) = 2I_i x_i(t) - 2d_i x_i^2(t) + 2\Big[\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j))\Big] x_i(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i^2 + 2d_i x_i^2 \leqslant 2I_i |x_i| + 2|x_i| \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)\|f_j\|,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i^2 + d_i x_i^2 \leqslant \frac{1}{d_i}\Big[I_i + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)\|f_j\|\Big]^2,$$

$$x_i^2(t) \leqslant x_i^2(0)\mathrm{e}^{-d_i t} + \frac{1}{d_i^2}\Big[I_i + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)\|f_j\|\Big]^2 (1 - \mathrm{e}^{-d_i t}).$$

所以,对 $t > 0$,

$$x_i^2(t) \leqslant \|\phi_i\|^2 \mathrm{e}^{-d_i t} + \frac{1}{d_i^2}\Big[I_i + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)\|f_j\|\Big]^2$$

即,对 $t > T_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$|x_i(t)| \leqslant R_i \equiv \frac{\sqrt{2}}{d_i}\Big[I_i + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)\|f_j\|\Big], \tag{13}$$

其中 $$T_i = \max\left\{0, \frac{1}{d_i}\ln\frac{2\|\phi_i\|^2}{R_i^2}\right\}.$$ □

引理 1.1 说明,平行多面体

$$\mathscr{B} \equiv \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \,\middle|\, |x_i| \leqslant R_i, i = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

是系统(1)的吸收集. 关于(1)式的平衡点,有下述结论.

引理 1.2 在假设 1 下,DCNNs(1)有平衡点 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in \mathscr{B}$.

证明 定义映射 $\Psi: R^n \to R^n$,

$$\psi_i(x) = \frac{1}{d_i}\Big[\sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j) + I_i\Big], \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\Psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x))$. 由于$f_i(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有界,所以 Ψ 把R^n映射为R^n中的有界闭集. 事实上, Ψ 为 $\mathscr{B}$到自身的映射. 根据Brower不动点定理,

存在不动点 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ 使得 $\Psi(x^*) = x^*$. 从而

$$-d_i x_i^* + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})f_j(x_j^*) + I_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

即 x^* 是 DCNNs(1) 的常数不动点. □

关于系统(1)的稳定性, 有如下结论.

定理 1.1 如果在假设 1 下还有

$$\alpha_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} l_j(|a_{ij}| + |b_{ij}|) < 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{14}$$

则(1)式的平衡点 x^* 是唯一的和全局指数吸引的.

证明 只须证明(1)式的平衡点 x^* 的全局指数吸引性. 由引理 1.1, 只须对自 $\mathscr{B}$ 出发的解加以证明即可. 把 $x_i(t) - x_i^*$ 记为 $\Delta_i(t)$, 对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 从(1)式有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta_i(t) + d_i\Delta_i(t) = \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)] + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}[f_j(x_j(t-\tau_j)) - f_j(x_j^*)], \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta_i(t) + d_i\Delta_i(t) \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\, l_j\, |\Delta x_j(t)| + \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\, l_j\, |\Delta x_j(t-\tau_j)|. \end{cases} \tag{15}$$

注意到引理 1.1, 说明 $|\Delta_i(t)| \leqslant 2R_i$, $t > 0$, 积分后, (15) 式导致, 对 $t > 0$,

$$|\Delta_i(t)| \leqslant |\Delta_i(0)|\,\mathrm{e}^{-d_i t} + \frac{2}{d_i}\sum_{j=1}^{n} l_j R_j(|a_{ij}| + |b_{ij}|)(1 - \mathrm{e}^{-d_i t}) \leqslant$$
$$2R[\mathrm{e}^{-d_i t} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i t})], \tag{16}$$

其中, $R = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{R_i\}$. 由于 $\alpha_i < 1$ 且 $w(t) = \mathrm{e}^{-d_i t} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i t})$ 是单调的, 所以存在正数 h_i' 使得 $\mathrm{e}^{-d_i t} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i t}) < 1$, $t \geqslant h_i'$.

记 $\beta_i = \mathrm{e}^{-d_i h_i'} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i h_i'})$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 得

$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R\beta_i, \qquad t \geqslant h_i'.$$

对(15)式在 $[h_i' + \tau, t]$, $(t > h_i' + \tau)$ 上积分得

$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R\beta_i[\mathrm{e}^{-d_i(t-h_i'-\tau)} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i(t-h_i'-\tau)})], \qquad t \geqslant h_i' + \tau,$$

所以

$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R\beta_i^2, \qquad t \geqslant 2h_i' + \tau.$$

重复以上过程, 得

$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R\beta_i^k[\mathrm{e}^{-d_i[t-(k-1)h_i'-(k-1)\tau]} + \alpha_i(1 - \mathrm{e}^{-d_i[t-(k-1)h_i'-(k-1)\tau]})],$$
$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R(1 + \alpha_i)\beta_i^k, \qquad t \geqslant kh_i' + (k-1)\tau, \quad k \in \mathbf{N}$$

即

$$|\Delta_i(t)| \leqslant 2R(1 + \alpha_i)\beta_i^{[(t+\tau)/(h_i'+\tau)]} \leqslant 2R(1 + \alpha_i)\beta_i^{[t/(h_i'+\tau)]}, \qquad t > 0.$$

令 $M_i = 2R(1 + \alpha_i)$, $h_i = h_i' + \tau$, 则定理得证. □

2 外部噪声扰动的 DCNNs 的稳定性

本节讨论外部噪声扰动得 DCNNs(3) 的稳定性. 这种情况下, (3) 式的解形成一个连续随

机过程,可以获得解的 L^2 意义下的有界性.

引理 2.1 在假设 1 下,对任何连续初值 $\{\phi_i(t), i = 1, 2, \cdots, n, t \in [-\tau_i, 0]\}$,存在常数 $\rho > 0$ 和时刻 $T_i^* \geqslant 0$ 使得(3)式、(2)式的相应解 $x(t)$ 满足

$$E(x_i^2(t)) \leqslant \rho_i, \qquad t \geqslant T_i^*;\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{17}$$

证明 (3)式可以等价地表示为

$$\mathrm{d}x_i(t) = (I_i - d_i x_i(t))\mathrm{d}t + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j))\right]\mathrm{d}t + D_i \mathrm{d}B_i(t), \tag{18}$$

其中,$\boldsymbol{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \cdots, B_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是 R^n 上地 Brown 运动. Itô积分后,对 $i = 1, 2, \cdots, n$,有

$$x_i(t) = x_i(0)\mathrm{e}^{-d_i t} + \mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(s)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(s-\tau_j))\right]\mathrm{d}s + \frac{I_i}{d_i}(1 - \mathrm{e}^{-d_i t}) + D_i U_i(t),$$

其中,$U_i(t) = \mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\mathrm{d}B_i(s)$ 是 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 通过基本的计算,可以得到

$$x_i^2(t) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2d_i t}\left\{x_i^2(0) + \left[\int_0^t m_i \mathrm{e}^{d_i s}\mathrm{d}s\right]^2\right\} + \frac{4I_i^2}{d_i^2} + 4D_i^2 U_i^2(t) \leqslant 4\left\{x_i^2(0)\mathrm{e}^{-2d_i t} + \frac{m_i^2 + I_i^2}{d_i^2} + D_i^2 U_i^2(t)\right\},$$

其中,$m_i = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|(|a_{ij}| + |b_{ij}|)$. 又由于

$$E(U_i(t))^2 = \mathrm{e}^{-2d_i t}\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{2d_i s}\mathrm{d}s = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2d_i t}}{2d_i}, \tag{19}$$

所以

$$E(x_i^2(t)) \leqslant 4\left\{E(x_i^2(0))\mathrm{e}^{-2d_i t} + \frac{m_i^2}{d_i^2} + \frac{I_i^2}{d_i^2} + \frac{D_i^2}{2d_i}\right\}.$$

令

$$\rho_i \equiv \frac{8}{d^2}\left\{m_i^2 + I^2 + \frac{dD^2}{2}\right\}, \tag{20}$$

其中,$D = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{D_i\}$,得到

$$E(x_i^2(t)) \leqslant \rho_i, \qquad t > T_i^*,$$

其中

$$T_i^* = \max\left\{0, \frac{1}{2d_i}\ln\frac{8E(x_i^2(0))}{\rho_i}\right\}. \qquad \square$$

引理 2.1 说明,平行多面体

$$\mathscr{B}^* \equiv \left\{x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \in R^n \,|\, E(x_i^2) \leqslant \rho_i, i = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

是系统(3)在 L^2 意义下的吸收集. 在一定意义上说,$x(t)$((17)式)的 L^2 界就说明了系统(3)的稳定性,但估计式(17)显然是太粗糙了. 况且,在 $D_i \to 0$ 时,ρ_i 并不趋向于0,这与解 $x(t)$ 对 D_i 的连续依赖性不符. 所以下面给出一个更严格的估计,亦即外部噪声干扰下的 DCNNs 系统(3)的全局稳定性. 该定理的证明需要如下微积分基本引理.

引理 2.2 函数 $\xi(t)=e^{-2\lambda t}+\theta(1-e^{-\lambda t}),\ t\geqslant 0,\ \lambda>0,\ 0<\theta<1$, 满足

$$\theta<\xi(t)\leqslant 1,\ 0\leqslant t<t^*=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\theta},\qquad \xi(t)\leqslant\theta,\ t^*\leqslant t.$$

定理 2.1 如果在假设 1 外, 还有

$$\alpha_i^*\equiv\frac{n}{d_i^2}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2+b_{ij}^2)l_j^2<\frac{1}{4},\tag{21}$$

则噪声扰动的 DCNNs(3) 是全局稳定的.

证明 令 $\rho=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\rho_i\}$, 则(13)式与(20)式显示 $R^2<\rho$. 所以只须对满足 $E(\|\phi_i^2(t)\|)\leqslant\rho$ 的(3)式的解加以考察. 记 $x_i(t)-x_i^*$ 为 $\delta_i(t)$, (3)式减去 x^* 导致

$$\begin{aligned}d\delta_i(t)=&-d_i\delta_i(t)dt+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*)]dt+\\&\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[f_j(x_j(t-\tau_j))-f_j(x_j^*)]dt+D_i dB_i(t).\end{aligned}\tag{22}$$

对(22)式做 Itô 积分, 对 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}\delta_i(t)=&\ \delta_i(0)e^{-d_it}+D_iU_i(t)+e^{-d_it}\int_0^t e^{d_is}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(x_j(s))-f_j(x_j^*)]ds+\\&e^{-d_it}\int_0^t e^{d_is}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[f_j(x_j(s-\tau_j))-f_j(x_j^*)]ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i(t)\leqslant&\ \delta_i(0)e^{-d_it}+D_iU_i(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|l_j\int_0^t e^{-d_i(t-s)}|\delta_j(s)|ds+\\&\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|l_j\int_0^t e^{-d_i(t-s)}|\delta_j(s-\tau_j)|ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|l_j\int_0^t e^{-d_i(t-s)}|\delta_j(s)|ds\Big]^2\leqslant&\ n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2l_j^2\Big[\int_0^t e^{-d_i(t-s)}|\delta_j(s)|ds\Big]^2\leqslant\\&n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2l_j^2\int_0^t e^{-d_i(t-s)}ds\int_0^t e^{-d_i(t-s)}\delta_j^2(s)ds\leqslant\\&n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2l_j^2\,\frac{1-e^{-d_it}}{d_i}\int_0^t e^{-d_i(t-s)}\delta_j^2(s)ds.\end{aligned}\tag{23}$$

类似地

$$\begin{aligned}\Big[\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|l_j\int_0^t e^{-d_i(t-s)}|\delta_j(s-\tau_j)|ds\Big]^2\leqslant&\\ n\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2l_j^2\,\frac{1-e^{-d_it}}{d_i}\int_0^t e^{-d_i(t-s)}\delta_j^2(s-\tau_j)ds.&\end{aligned}\tag{24}$$

所以

$$\begin{aligned}E[\delta_i^2(t)]\leqslant&\ 4\Big\{E[\delta_i^2(0)]e^{-2d_it}+\frac{D_i^2}{d_i^2}(1-e^{-2d_it})+\\&n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2l_j^2\,\frac{1-e^{-d_it}}{d_i}\int_0^t e^{-d_i(t-s)}E[\delta_j^2(s)]ds+\\&n\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2l_j^2\,\frac{1-e^{-d_it}}{d_i}\int_0^t e^{-d_i(t-s)}E[\delta_j^2(s-\tau_j)]ds\Big\}\leqslant\\&4\Big\{2\rho e^{-2d_it}+\frac{D_i^2}{d_i^2}(1-e^{-2d_it})+2\rho\frac{n}{d_i^2}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2+b_{ij}^2)l_j^2(1-e^{-d_it})^2\Big\}\leqslant\end{aligned}$$

$$2\rho\times 4[e^{-2d_it}+\alpha_i^*(1-e^{-d_it})]+\frac{4D_i^2}{d_i^2}(1-e^{-2d_it}),$$

上式最后是因为 $E(\delta_j^2(t))\leqslant 2\rho$. 对 $w(t)=e^{-2d_it}+\alpha_i^*(1-e^{-d_it})$, 在 $\lambda=d_i,\theta=\alpha_i^*$ 情况下使用引理2.2得

$$e^{-2d_it}+\alpha_i^*(1-e^{-d_it})\leqslant\alpha_i^*,\quad t\geqslant h_i^*\equiv\frac{1}{d_i}\ln\frac{1}{\alpha_i^*}. \tag{25}$$

故, 令 $\beta_i^*=4\alpha_i^*<1$, $\eta_i=(4/d_i^2)(1-e^{-2d_ih_i^*})$ 后有

$$E[\delta_i^2(t)]\leqslant 2\rho\beta_i^*+D_i^2\eta_i,\qquad t\geqslant h_i^*.$$

现在 $[h_i^*,t]$ 上重复上述过程, 可得

$$E[\delta_i^2(t)]\leqslant(2\rho\beta_i^*+D_i^2\eta_i)\times 4[e^{-2d_i(t-h_i^*-\tau)}+\alpha_i^*(1-e^{-d_i(t-h_i^*-\tau)})]+\frac{4D_i^2}{d_i^2}(1-e^{-2d_i(t-h_i^*-\tau)}),\qquad t\geqslant h_i^*+\tau.$$

所以

$$E[\delta_i^2(t)]\leqslant 2\rho(\beta_i^*)^2+D_i^2\eta_i(1+\beta_i^*),\qquad t\geqslant 2h_i^*+\tau.$$

据归纳法

$$E[\delta_i^2(t)]\leqslant 2\rho(\beta_i^*)^k+D_i^2\eta_i\sum_{j=1}^{k-1}(\beta_i^*)^j\leqslant 2\rho(\beta_i^*)^k+\frac{2D_i^2\eta_i}{1-\beta_i^*},$$
$$t\geqslant kh_i^*+(k-1)\tau,\quad k\in\mathbf{N}.$$

从而

$$E[\delta_i^2(t)]\leqslant M_i,\qquad t\geqslant s_i, \tag{26}$$

其中

$$M_i=\frac{4D_i^2\eta_i}{1-\beta_i^*},\quad s_i=(h_i^*+\tau)\ln\frac{M_i}{4\rho}/(\ln\beta_i^*).$$

这样, 经与定义2比较, (26)式证明了定理. □

3 内在噪声扰动得DCNNs的稳定性

本节考察内在噪声扰动下的DCNNs(4). (4)式的解的数学期望的有界性结论如下:

引理3.1 在假设1下, 对任意初值 $\{\phi_i(t),i=1,2,\cdots,n,t\in[-\tau_i,0]\}$, 存在常数 $\sigma_i>0$ 和时刻 $S_i^*\geqslant 0$ 使得, 对(4)式和(2)式的任何解 $x(t)$ 有

$$E(x_i^2(t))\leqslant\sigma_i,\qquad t\geqslant S_i^*;\ i=1,2,\cdots,n, \tag{27}$$

其中, $E(\cdot)$ 表示数学期望.

证明 除了

$$\sigma_i\equiv\frac{8}{d^2}\left\{m_i^2+I^2+\frac{d}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right]^2\right\} \tag{28}$$

和

$$S_i^*=\max\left\{0,\frac{1}{2d_i}\ln\frac{8E(x_i^2(0))}{\sigma_i}\right\}$$

之外, 本引理的证明与引理2.1的证明完全一样, 在此不赘述. □

引理3.1显示, 平行多面体

$$\mathscr{B}_3^*\equiv\left\{x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\in R^n\mid E[x_i^2]\leqslant\sigma_i,\ i=1,2,\cdots,n\right\}$$

是系统(4)在 L^2 意义下的吸收集．关于(4)式的稳定性，有如下结论．

定理 3.1 若在假设 1 外，还有

$$\alpha_i^* \equiv \frac{n}{d_i^2}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2 + b_{ij}^2) l_j^2 < \frac{1}{4},$$

则只要 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \mu_j^2 < D_0,\ i = 1, 2, \ldots, n$，就存在 $D_0 > 0$，使得噪声扰动下的 DCNNs(4)是全局指数稳定的．

证明 令 $\sigma = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sigma_i\right\}$．(13)式和(28)式表明 $R^2 < \sigma$，所以只考虑(4)式的满足 $E(\|\phi_i^2\|) \leqslant \sigma$ 的解．记 $x_i(t) - x_i^*$ 为 $\varepsilon_i(t)$，(4)式中减去 x^* 导致

$$\mathrm{d}\varepsilon_i(t) = -d_i\varepsilon_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)]\mathrm{d}t +$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}[f_j(x_j(t-\tau_j)) - f_j(x_j^*)]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}[g_j(x_j(t)) - g_j(x_j^*)]\mathrm{d}B_i(t). \quad (29)$$

对(29)式做 Itô 积分，则对 $t > 0$ 有

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i(0)\mathrm{e}^{-d_i t} + \mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[f_j(x_j(s)) - f_j(x_j^*)]\mathrm{d}s +$$

$$\mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}[f_j(x_j(s-\tau_j)) - f_j(x_j^*)]\mathrm{d}s +$$

$$\mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}[g_j(x_j(s)) - g_j(x_j^*)]\mathrm{d}B_i(s).$$

由于

$$E\left[\mathrm{e}^{-d_i t}\int_0^t \mathrm{e}^{d_i s}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}[g_j(x_j(s)) - g_j(x_j^*)]\mathrm{d}B_i(s)\right]^2 \leqslant$$

$$n\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 E\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-d_i(t-s)}[g_j(x_j(s)) - g_j(x_j^*)]\mathrm{d}B_i(s)\right]^2 =$$

$$n\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \int_0^t \mathrm{e}^{-2d_i(t-s)} E[g_j(x_j(s)) - g_j(x_j^*)]^2\mathrm{d}s \leqslant$$

$$n\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \mu_j^2 \int_0^t \mathrm{e}^{-2d_i(t-s)} E[\varepsilon_j^2(s)]\mathrm{d}s,$$

(23)式与(24)式相加，对 $t > 0$ 有

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 4\left\{2\sigma\mathrm{e}^{-2d_i t} + 2\sigma\frac{n}{d_i}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\mu_j^2(1 - \mathrm{e}^{-2d_i t}) +\right.$$

$$\left.2\sigma\frac{n}{d_i^2}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2 + b_{ij}^2) l_j^2 (1 - \mathrm{e}^{-d_i t})^2\right\} \leqslant$$

$$2\sigma\times 4\left[\mathrm{e}^{-2d_i t} + \alpha_i^*(1 - \mathrm{e}^{-d_i t}) + \frac{n}{d_i}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\mu_j^2(1 - \mathrm{e}^{-2d_i t})\right],$$

其中，最后一式用到了 $E[\varepsilon_j^2(t)] \leqslant 2\sigma$．如果

$$\frac{n}{d_i}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\mu_j^2 < \alpha_i^*$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\mu_j^2 < D_0 \equiv \frac{d_i\alpha_i^*}{n}, \quad (30)$$

则

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 2\sigma \times 4[e^{-2d_i t} + 2\alpha_i^* (1 - e^{-d_i t})],$$

$$E[\varepsilon^2(t)] \leqslant 2\sigma\gamma_i, \quad t \geqslant h_i' \equiv \frac{1}{d_i}\ln\frac{1}{2\alpha_i^*},$$

其中 $\gamma_i = 8\alpha_i^* < 1$.

现在 $[h_i' + \tau, t]$ 上对(29)式积分并重复以上过程, 得

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 2\sigma\gamma_i \times 4\Bigg[e^{-2d_i(t-h_i'-\tau)} + \alpha_i^* (1 - e^{-d_i(t-h_i'-\tau)}) + \frac{n}{d_i}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \mu_j^2 (1 - e^{-2d_i(t-h_i'-\tau)})\Bigg], \quad t \geqslant h_i'.$$

所以

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 2\sigma\gamma_i^2, \quad t \geqslant 2h_i' + \tau.$$

据归纳法

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 2\sigma\gamma_i^k, \quad t \geqslant kh_i' + (k-1)\tau, \quad k \in \mathbf{N}.$$

所以

$$E[\varepsilon_i^2(t)] \leqslant 2\sigma\gamma_i^{[(t+\tau)/(h_i'+\tau)]} \leqslant 2\sigma\gamma_i^{[t/(h_i'+\tau)]}, \quad t > 0,$$

根据定义 3, 这在 $M_i^* = 2\sigma$, $h_i^* = h_i' + \tau$ 情况下证明了定理. □

4 结 论

对一类时滞细胞神经网络(DCNNs), 本文给出了一些很易验证的全局收敛的条件. 文中重点考察了噪声的影响, 证明了当噪声强度趋于 0 时, $(x_i(t) - x_i^*)^2$ 的数学期望趋于 0. 特别是, 对于内在噪声扰动情况, 只要噪声强度控制在一定程度 D_0 之下, 任何噪声下都有 $(x_i(t) - x_i^*)^2$ 的数学期望趋于 0. 注意到 D_0 是完全由非线性 DCNN 系统本身决定的, 这在随机共振现象被发现在很多系统中存在(见文献[13-15]及其引文)的目前, 具有重要意义.

本文的结果在生物学意义上也是合理的. 在许多生物系统中, 细胞神经网络具有自调节(自适应)能力, 所以它能消化内在噪声以保持输出的稳定性. 另一方面, 外部噪声则引起输出在平稳态附近振动. 这样的结论对更好地设计噪声环境中的全局稳定的神经网络具有指导意义.

[参 考 文 献]

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1988, **35**(10): 1257-1272.

[2] Chua L O, Yang Y. Cellular neural networks: applications[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1988, **35**(10): 1273-1290.

[3] Roska T, Chua L O. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements and nonuniform grids[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1992, **20**(5): 469-481.

[4] Roska T, Wu C W, Balsi M, et al. Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems—Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 1992, **39**(6): 487-490.

[5] Cilli P P, Gilli M. On stability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems—Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 1993, **40**(3): 157-165.

[6] Gilli M. Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems —Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 1994, **41**(8): 518-528.

[7] Lu H, He Y, He Z. A chaos-generator: analyses of complex dynamics of a cell equation in delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems —Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 1998, **45**(2): 178-181.

[8] Zhou D, Cao J. Globally exponential stability conditions for cellular neural networks with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, **131**(2/3): 487-496.

[9] Cao J. Global stability analysis in delayed cellular neural networks[J]. Phys Rev E, 1999, **59**(5): 5940-5944.

[10] Cao J. A set of stability criteria for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems —Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 2001, **48**(4): 494-498.

[11] Zhang Y, Pheng A H, Kwong S L. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems —Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 2001, **48**(6): 680-687.

[12] Zhang Y, Heng P A, Vadakkepat P. Absolute periodicity and absolute stability of neural networks with delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems —Ⅰ: Fundamental Theory and Applications, 2002, **49**(2): 256-261.

[13] Dunkel J, Hilbert S, Schimansky-Geier L, et al. Stochastic resonance in biological nonlinear evolution models[J]. Phys Rev E, 2004, **69**(5): 056118, 13.

[14] Machura L, Kostur M, Talkner P, et al. Brownian motors: current fluctuations and rectification efficiency[J]. Phys Rev E, 2004, **70**(6): 061105, 8.

[15] Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrum[J]. Physics Reports, 2002, **361**(2/4): 257-265.

Stability Analysis of Delayed Cellular Neural Networks With and Without Noise Perturbation

ZHANG Xue-juan[1], WANG Guan-xiang[2], LIU Hua[3]

(1. Department of Mathematics, Shaoxing University,
Shaoxing, Zhejiang 312000, P. R. China;
2. LMAM, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P. R. China;
3. Guanghua School of Management, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: The stability of a class of delayed cellular neural networks (DCNN) either without or with noise perturbation are studied. After presenting a simple and easily checkable condition for global exponential stability of the deterministic system, the situations with noise perturbation were further investigated. When the DCNN is perturbed with an external noise, the system is globally stable. The important fact is that, when the system is perturbed with an internal noise, it's globally exponentially stable if only the total strength of the noise is within a certain bound. This fact is significant as stochastic resonance phenomena have been found exist in many nonlinear systems.

Key words: delayed cellular neural network; global exponent stability; external/internal noise