

对流-扩散问题的 6 节点三角形单元流线 迎风有限元法和自适应网格重分技术*

N·瓦逊哈克, P·德乔姆凡

(朱拉隆功大学 机械工程系, 帕色哇 10330, 曼谷, 泰国)

(周哲玮推荐)

摘要: 提出了使用 6 节点三角形单元的流线迎风有限元法. 该方法沿局部流线, 直接用于输运控制方程的对流项. 采用多个对流-扩散实例来评价该方法的有效性, 结果显示该方法是单调的, 并且不产生任何振荡. 另外, 自适应网格技术和该方法相结合后, 进一步提高了解的精度, 又减少了计算时间和对计算机内存的需求.

关键词: 流线迎风(算法); 有限元法; 对流-扩散问题

中图分类号: O241.82; O35 文献标识码: A

引 言

对流占优问题的精确数值求解是计算流体动力学的一个难点. 中心差分法和传统的 Galerkin 法解, 常常产生非物理振荡. 解决这一问题的一个成功技术就是大家知道的迎风算法, 最初它是为有限差分法而提出的算法^[1]. 在有限元法中, 流线迎风 Petrov-Galerkin 法 (SUPG) 是一种大家知道的通行技术^[2]. 该方法修改权函数, 利用局部速度, 规定一个这些权函数的上游方向. 这样的一些修正措施, 消除了某些对流问题的振荡现象. 另一个成功方法就是流线迎风有限元法, 该方法最先是由 Rice 和 Schnipke^[3] 提出. 该方法不修正权函数, 而是沿局部流线直接利用 4 节点的双线性单元计算对流项. Hill 和 Baskharone^[4] 将该方法进一步发展成 8 节点的二次单元. Wansophark 和 Dechaumphai^[5] 在对热粘滞不可压缩流动分析中, 使用了 3 节点的三角形单元, 发展了流线迎风有限元法. 文献[3-5] 中的计算表明, 流线迎风有限元法是单调的, 并引入了人工数值耗散. 在流场的大梯度区域中, 数值耗散起到磨光数值解的作用, 因此会降低解的精度.

精度是数值求解必须考虑的一个重要因素, 特别是在大尺度问题中. 在计算域中使用小单元可以提高解的精度, 但其代价是增加了计算时间及数据储存量^[6]. 为了缓解这个矛盾, 算法中的自适应网格技术^[7] 应运而生. 在解梯度变化大的区域, 该技术将生成小单元, 而在其他区域生成大单元.

* 收稿日期: 2008-05-14; 修订日期: 2008-07-15

基金项目: 泰国研究基金(TRF)资助项目

作者简介: Pranote Dechaumphai, 泰国人, 教授, 博士(联系人, E-mail: fmepd@eng.chula.ac.th).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

本文选择 6 节点三角形单元以得到算法的高精度解, 给出了沿局部流线采用 6 节点三角形单元计算对流项的方法. 这里采用三角形单元是为了有效地与自适应网分技术相结合. 最后给出几个已有精确解和数值解的实例, 来检验有限元公式, 并给出有效性的评价.

1 理论公式及求解过程

本节中, 选择传输方程作为对流-扩散问题的典型方程. 在直角坐标系中, 典型的二维传输方程为

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \quad (1)$$

其中, ρ 为密度, u 和 v 分别是 x 方向和 y 方向的速度分量, Γ_{ϕ} 是扩散率系数, ϕ 是流场中的传输量.

1.1 有限元算法

为了得到有限元方程, 本文使用 6 节点三角形单元如图 1 所示. 用标准权函数 N , 对控制方程 (1) 应用加权剩余 Galerkin 法, 对扩散项应用 Green 定理^[8]后, 得到单元方程

$$\int_{\Omega} N \left(\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega = - \Gamma_{\phi} \int_{\Omega} \left[\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \phi + \Gamma_{\phi} \int_{\Gamma} N \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma, \quad (2)$$

其中, Ω 是单元区域, Γ 是单元边界. 方程 (2) 左边的对流项需采用 1.2 小节中给出的方法做特殊处理.

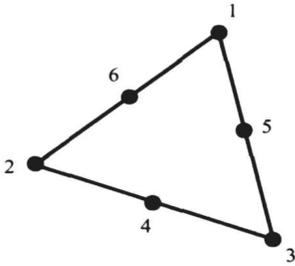


图 1 典型的 6 节点三角形单元

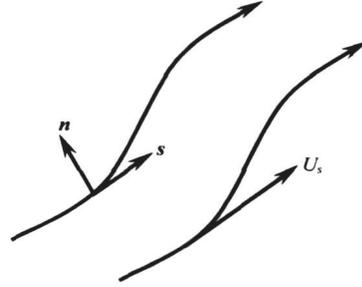


图 2 流线坐标

1.2 流线迎风公式

对流项的流线迎风公式可看作是没有物理扩散的纯对流问题, 这时的加权剩余 Galerkin 法为

$$\int_{\Omega} N \left(\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega = 0. \quad (3)$$

流线坐标如图 2 所示, 方程 (3) 可以改写为

$$\int_{\Omega} N \left(\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) d\Omega = 0, \quad (4)$$

其中, U_s 为沿着流线方向的速度, 在一个单元上可假定为^[3]

$$\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{const}, \quad (5)$$

则单元对流项可以近似为

$$\left(\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \int_{\Omega} N d\Omega = 0. \tag{6}$$

在给定的顺风点处, 方程(6)的计算需要先确定迎风点的位置. 在图3中, 该单元节点1被称为“顺风节点”是因为, 该节点处速度矢量的反方向指向该单元的内部. 确定单元节点为顺风节点的方法, 可以简单地用如下数学表达:

$$\tan \alpha \leq \tan \theta \leq \tan \beta. \tag{7}$$

必须注意到, 方程(7)的条件在每个顺风节点上都必须能够满足.

图4显示了中间节点为顺风节点必须满足的条件, 该条件为

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0, \tag{8}$$

其中, \mathbf{V} 是中间节点上的速度矢量, $\hat{\mathbf{n}}$ 为该单元所在边的法向矢量.

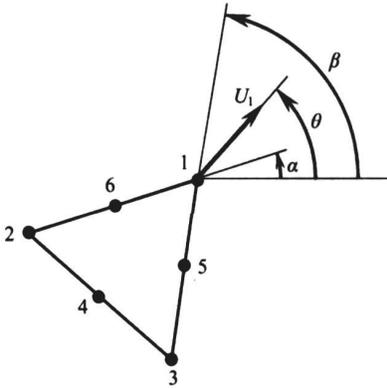


图3 角节点为顺风节点

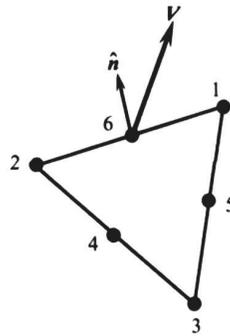


图4 中间节点为顺风节点

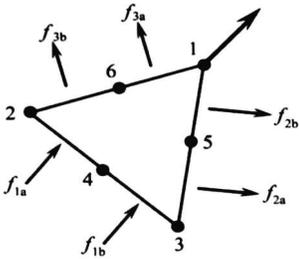


图5 质量流的定义

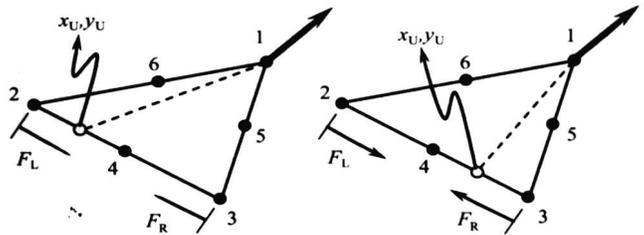


图6 角节点可能的迎风节点

一旦一个顺风节点被确定, 该单元每边的质量流率按图5计算. 从这些质量流就可以确定迎风点的位置. 图6给出了当节点1是顺风节点时有可能出现的(迎风点)情况, 图中迎风点 (x_U, y_U) 的位置可以由因子 F_L 和 F_R 来确定, F_L 和 F_R 可以由该单元每边质量流比来计算, 表达如下:

$$F_L = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{3a} + f_{3b}}{f_{1a}}, 1 \right\}, 0 \right\}, \tag{9}$$

$$F_R = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{2a} + f_{2b}}{f_{1b}}, 1 \right\}, 0 \right\}. \tag{10}$$

然后计算迎风节点

$$x_U = (1 - F_L)x_2 + (1 - F_R)x_3 + (F_L \cdot F_R)x_4, \tag{11}$$

$$y_U = (1 - F_L)y_2 + (1 - F_R)y_3 + (F_L \cdot F_R)y_4, \tag{12}$$

同样地, 迎风点的传输量 ϕ_U 可以如下确定:

$$\phi_U = (1 - F_L) \phi_2 + (1 - F_R) \phi_3 + (F_L \cdot F_R) \phi_4. \tag{13}$$

那么, 当节点 1 为顺风节点时, 方程(6) 中的对流项可以如下计算:

$$\left[\rho U_s \frac{\phi_1 - \phi_U}{\Delta s} \right] A_s = 0, \tag{14}$$

其中 $U_s = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$, $\Delta s = \sqrt{(x_1 - x_U)^2 + (y_1 - y_U)^2}$, $A_s = \int_{\Omega} N d\Omega$.

为了确定中间节点的迎风点位置, 可以采用如上所述的类似方法. 图 7(a)~ 图 7(d) 表示当节点 6 作为顺风节点时, 可能出现迎风点位置的情况. 图中给出了两种主要情形, 即情形 A 及情形 B. 对于情形 A (图 7(a)、图 7(b)), 当 $f_{3b} < (f_{1a} + f_{1b})$ 时, 可以计算因子 F_L 和 F_R

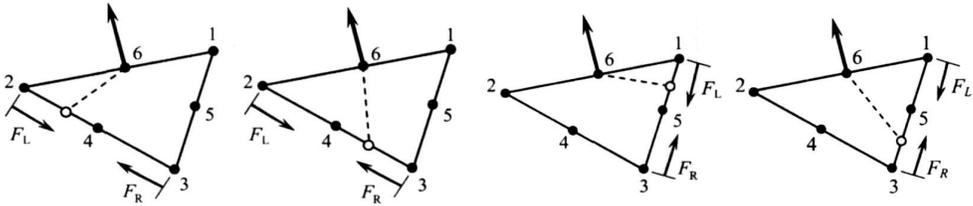
$$F_L = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{3b}}{f_{1a}}, 1 \right\}, 0 \right\}, \tag{15}$$

$$F_R = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{3b} - (f_{1a} + f_{1b})}{f_{1b}}, 1 \right\}, 0 \right\}. \tag{16}$$

情形 B (图 7(c)、图 7(d)) 满足 $f_{3a} < (f_{2a} + f_{2b})$ 时, 因子 F_L 和 F_R 如下:

$$F_L = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{3a}}{f_{2b}}, 1 \right\}, 0 \right\}, \tag{17}$$

$$F_R = \max \left\{ \min \left\{ \frac{f_{3a} - (f_{2a} + f_{2b})}{f_{2a}}, 1 \right\}, 0 \right\}. \tag{18}$$



情形 A

情形 B

图 7 中间节点可能出现的迎风点

$$\rho U_s \frac{A_s}{\Delta s} \begin{bmatrix} 1 & (F_L - 1) & (F_R - 1) & -F_L \cdot F_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix}$$

图 8 节点 1 是顺风节点时的对流矩阵

$$\rho U_s \frac{A_s}{\Delta s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (F_L - 1) & (F_R - 1) & -F_L \cdot F_R & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix}$$

(a) 情形 A

$$\rho U_s \frac{A_s}{\Delta s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (F_L - 1) & 0 & (F_R - 1) & 0 & -F_L \cdot F_R & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix}$$

(b) 情形 B

图9 节点6是顺风节点时的对流矩阵

当中间节点的迎风点位置确定后,可以得到方程(11)~(13)类似的表达式.

最后一步是适当地构建对流项的单元矩阵.图8表示当角节点1为唯一的顺风节点时的对流矩阵.对于中间节点,例如图7中的节点6,情形A及情形B的对流矩阵分别如图9(a)、图9(b)所示.

1.3 自适应网格技术

自适应网格技术有两种主要类型^[9]:1) 细化/粗化;2) 网格重分.第1)种类型,即细化/粗化技术,还可以进一步分成3种子类型:(a) h -方法,(b) p -方法,以及(c) r -方法.在 h -方法中,初始网格单元被细化为更小的单元或者粗化为更大的单元. p -方法保持初始网格单元的几何形状,但是增加或减小单元插值函数多项式的阶次. r -方法维持单元的数量及其原有的连通性,但是重新布置节点的位置.

第2)种类型中,在初始网格得到的解的基础上,重新构建一个新的网格,在解梯度变化大的区域,新网格将由小的单元组成,而在解梯度变化小的其他区域,新网格将由大的单元组成.本文将该技术与流线迎风有限元法相结合,求解对流-扩散问题.为了在流场中的不同位置,确定适当的单元尺寸,固体力学的概念是:使用主应力来确定一给定点的应力状态.既然传输行为复杂的区域需要采用小单元,因此传输量 ϕ 的分布就成为确定单元尺寸是否适当的一个指标.

因为小单元必须分布在解梯度变化大的区域,因此首先计算(主)传输量关于整体坐标 x 和 y 的二阶导数:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

主传输量在主方向 X 和 Y 上的混合导数不出现,因此得到

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

设以变量 λ_1 和 λ_2 代之,

$$\lambda_1 = \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|, \quad \lambda_2 = \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right|, \tag{21}$$

这些量用来计算适当单元尺寸值 h_1 和 h_2 ,并由下列条件给出:

$$h_1^2 \lambda_1 = h_2^2 \lambda_2 = \text{const} = h_{\min}^2 \lambda_{\max}, \tag{22}$$

其中 h_{\min} 是给定的最小单元尺寸, λ_{\max} 是整个模型的最大主传输量.

2 结 果

本节介绍 3 个实例. 第 1 个实例是热传入问题, 用来评估流线迎风公式分析对流-扩散问题的有效性. 第 2 个和第 3 个实例分别为反对称流场水平对流问题和 Smith & Hutton 测试, 用来说明白适应网分技术与流线迎风公式相结合时, 图解纯对流问题的效率.

2.1 热传入问题

第 1 个实例是热传入问题^[10], 冷流体流经一个横截面宽高比 ($L \gg a$) 很大的热输送管, 如图 10 所示. 在远离输送管侧壁的区域, 温度近似呈二维分布, 因此可以采用图 11 所示的计算区域及边界条件. 对于二维对流-扩散问题, 控制方程为

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \Gamma_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Gamma_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{23}$$

其中, $\Gamma_x = 10 / (Pr Re^2)$, $\Gamma_y = 1.6 / Pr$, Re 和 Pr 分别是 Reynolds 数和 Prandtl 数.

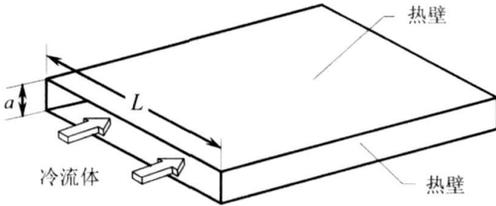


图 10 热传入问题

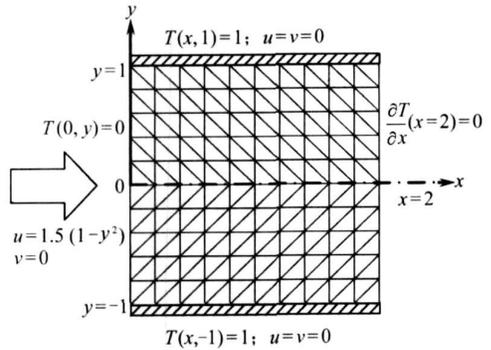


图 11 热传入问题的计算域及边界条件

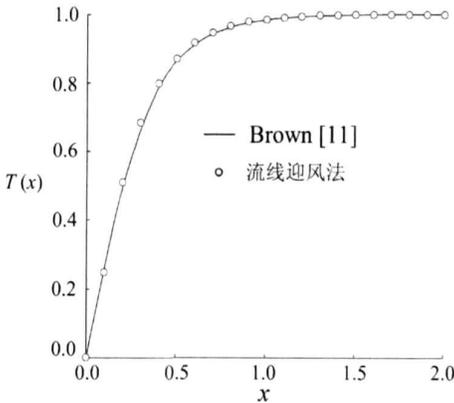


图 12 沿计算域中心线温度分布的比较

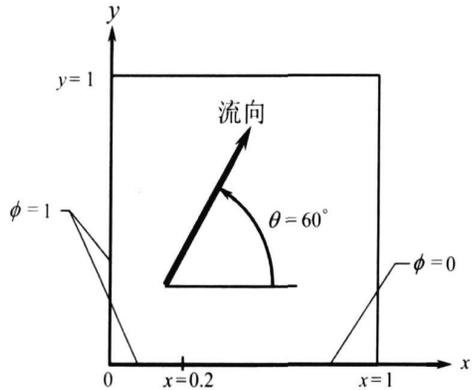


图 13 反对称流场的水平对流问题

为了将沿输送管中心线的温度分布与半解析解^[11]进行比较, 在整个区域上给定一个充分发展的速度分布, $u = 1.5(1 - y^2)$, $v = 0$, Pr 和 Re 分别取 0.7 和 100. 图 12 显示了用流线迎风法得到沿输送管中心线的温度分布以及与文献[11]所得结果的比较. 由图可知, 本方法与半解析法所得到的结果吻合得很好.

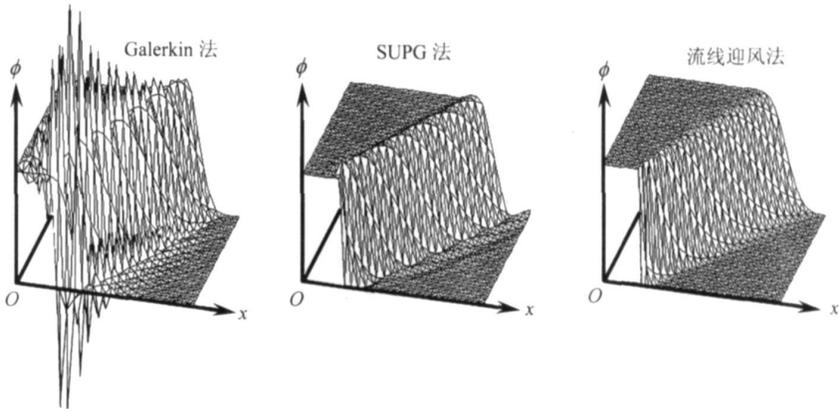


图 14 反对称流场水平对流问题结果的比较

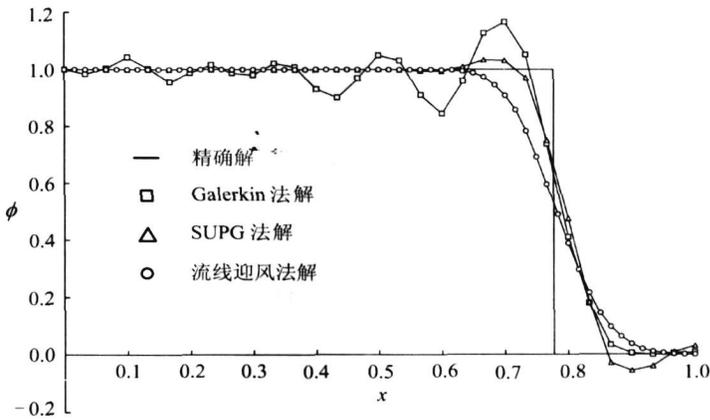


图 15 多种方法给出的沿流出边界的数值结果图

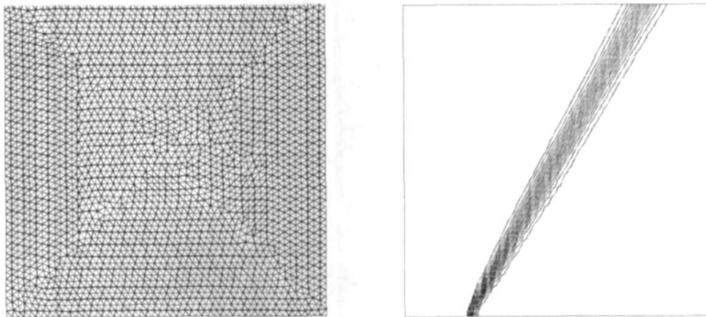


图 16 初始网格及其相应结果

2.2 倾斜流场对流问题

评价流线迎风公式的第2个实例是倾斜流场对流问题。该问题是纯对流传输问题，在文献中，通常用来评价处理对流项的新算法的精确性和稳定性。计算区域为一个方形区域，如图13所示，整个区域速度场是均匀的，与 x 轴成 60° 角。

图13给出了边界条件，计算域流入侧， ϕ 值呈阶梯形不连续分布，在计算域左侧， $\phi = 1$ ；在底边，当 $0 \leq x \leq 0.2$ 时， $\phi = 1$ ，当 $0.2 < x \leq 1$ 时， $\phi = 0$ 。图14、15给出了流线迎风法所

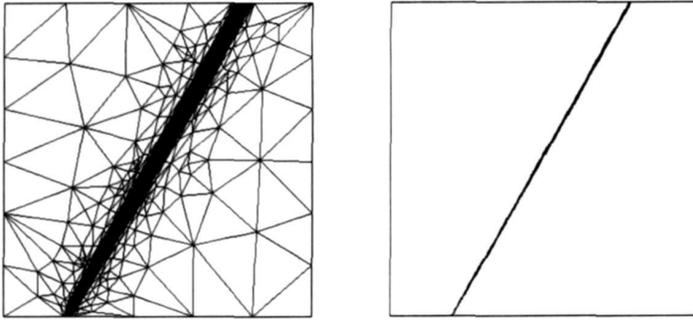


图 17 自适应网格及其相应结果

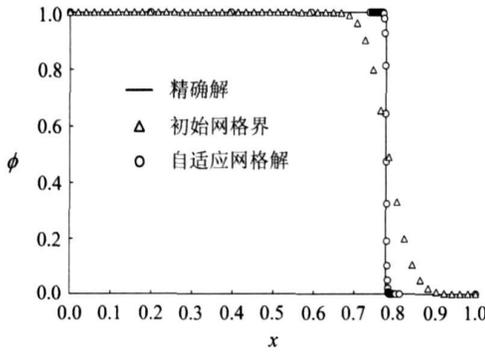


图 18 初始网格和自适应网格数值结果的比较

得的结果, 以及传统的逼近法, 如标准的 Galerkin 法和流线迎风 Petrov-Galerkin (SUPG) 法所得的结果. 从图中可以看出, 流线迎风法不存在任何非物理振荡.

为了提高解的精度, 自适应网格技术应用于流线迎风有限元法. 图 16 展示了计算区域内初始网格及其 ϕ 分布, 结果显示, 沿着不连续区域存在相当大的数值扩散, 原因是单元尺寸大了. 图 17 给出了自适应网格及其相应的结果. 图 17 表明, 在不连续区域内生成成群的小单元, 而在其他区域设置大单元. 图 18 显示了初始网格和自适

应网格, 沿着流出边界 ϕ 分布的比较, 从图中可以发现, 流线迎风法的自适应网格可以捕捉间断情况, 给出高精度解.

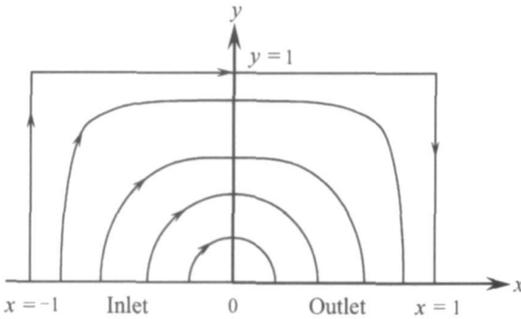


图 19 Smith 和 Hutton 测试

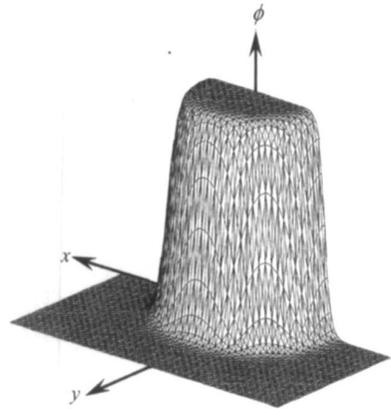


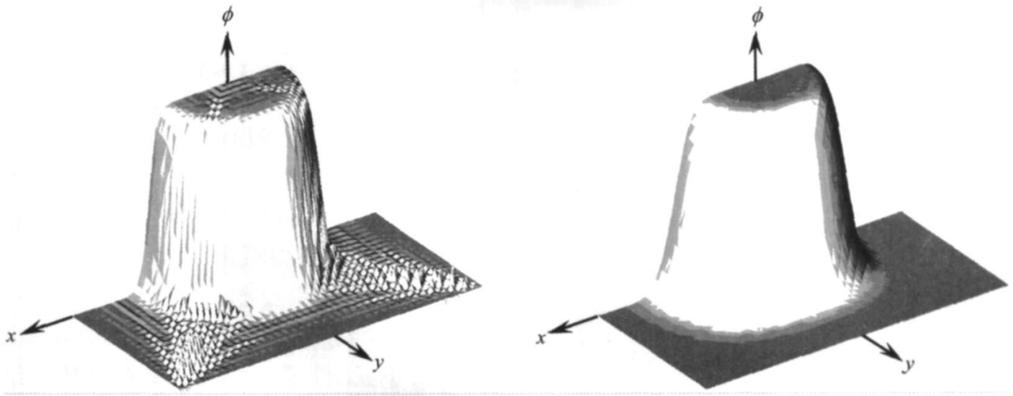
图 20 纯对流问题的 ϕ 分布

2.3 Smith 和 Hutton 测试

第 3 个测试实例也是用来显示自适应网格技术与流线迎风有限元法相结合的效用. 该问题是由 Smith 和 Hutton 给出的^[12], 计算区域见图 19, 其速度场为

$$u = 2y(1 - x^2), \tag{24}$$

$$v = -2x(1 - y^2). \tag{25}$$



(a) SUPG 法的 ϕ 分布

(b) 本文方法的 ϕ 分布

图 21 Smith 和 Hutton 测试结果的比较

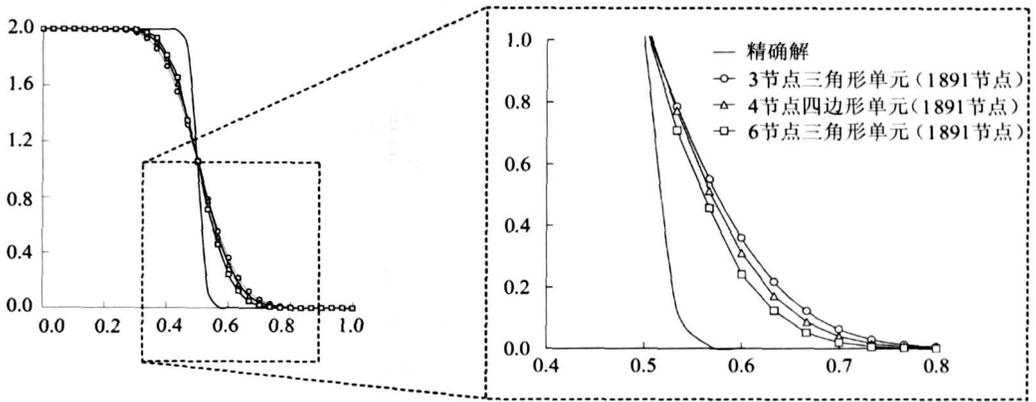
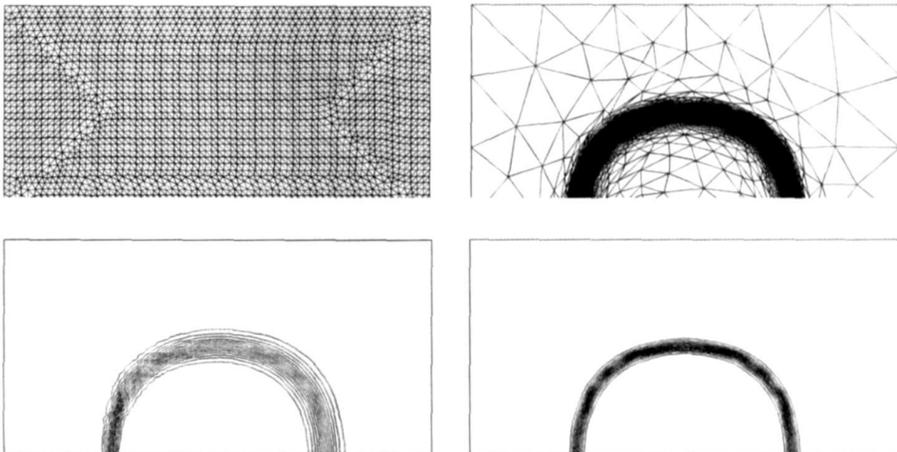


图 22 出口断面数值结果的比较(3节点三角形单元、4节点四边形单元和6节点三角形单元)



(a) 初始网格及结果

(b) 自适应网格及结果

图 23 初始网格和最终的自适应网格以及它们相应的结果

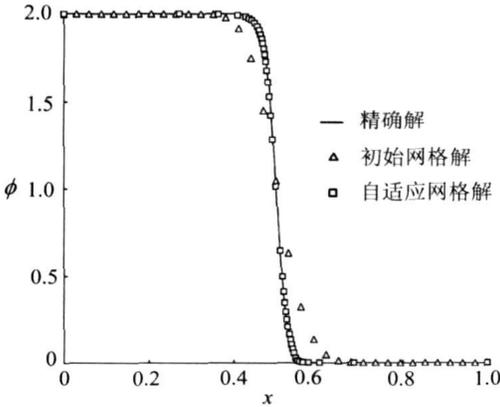


图 24 沿着流出边界的初始网格和自适应网格数值结果的比较

图 19 给出了其流线图, 入口端 ϕ 分布如下:

$$\phi = 1 + \tanh[(2x + 1)10]. \quad (26)$$

对于纯对流问题, 入口端的剖面应如图 20 所示的那样, 传播到出口平面, 没有任何扩散. 为了说明本文方法的性能, 图 21(a)、图 21(b) 给出了整个计算域内, 流线迎风有限元法和 SUPG 法所得的 ϕ 的分布图. 从图中可以看出, 流线迎风法不存在任何非物理振荡. 图 22 给出了本文方法得到的出口平面处 ϕ 的分布和 3 节点三角形单元以及 4 节点四边形单元所得到的数值结果的对比. 结果表明, 本文(6 节点单元)方法所得的结果比 3 节点三角形单元、4 节点四边形单元所得结果具有更高的解精度.

为了论证自适应网格技术与本文方法相结合时的性能, 图 23 给出了自适应网格技术的初始网格, 以及采用该网格所得到结果的等值线分布, 图 23 右侧显示了自适应网格及其对应的结果. 图 24 给出了初始网格与自适应网格在出口处解的剖面以及和精确解的比较. 可以看出, 自适应网格比初始网格所得结果精度更高, 因为在解梯度高的区域自动生成了小单元.

3 结 论

针对对流-扩散问题, 本文提出了 6 节点三角形单元自适应流线迎风有限元法. 流线迎风公式是针对传输方程的对流项提出的. 得到了对应的有限元方程, 并应用已有精确解和数值解的实例来评价其有效性. 结果表明, 本文所提出的方法不存在任何非物理空间的振荡, 它和自适应网格技术结合后, 提高了解的精度. 自适应网格技术在初始网格获得的解的基础上, 产生了一个完全新的网格. 新网格在解梯度变化大的区域, 单元密集, 提高了解的精度. 同时, 在其他区域生产了较大的单元, 减少了计算时间和计算机内存. 流线迎风有限元法与自适应网格技术相结合, 证明对解精度改善是有效的.

致谢 作者衷心感谢泰国研究基金(TRF)为本研究提供的支持.

[参 考 文 献]

- [1] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. Washington D C: Hemisphere, 1890.
- [2] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1982, 32(1/3): 199-259.
- [3] Rice J G, Schnipke R J. A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1985, 48(3): 313-327.
- [4] Hill D L, Baskharone E A. A monotone streamline upwind method for quadratic finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluid, 1993, 17(6): 463-475.
- [5] Wansophark N, Dechaumphai P. Combined adaptive meshing technique and segregated finite element algorithm for analysis of free and forced convection heat transfer[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40(5/6): 645-663.

- [6] Zienkiewicz O C, Liu Y C, Huang G C. Error estimates and convergence rates for various incompressible elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, **28**: 2191-2202.
- [7] Dechaumphai P. Evaluation of an adaptive unstructured remeshing technique for integrated fluid thermal-structural analysis[J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 1991, **5**(4): 599-606.
- [8] Huebner H K, Thornton E A, Byrom T G. The Finite Element Method for Engineers [M]. 3rd Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [9] Limtrakarn W, Dechaumphai P. Adaptive finite element method for high-speed flow-structure interaction[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, **20**(6): 597-606.
- [10] Fletcher C A J. Computational Techniques for Fluid Dynamics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [11] Brown G M. Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit[J]. AIChE Journal, 1960, **6**: 179-183.
- [12] Smith R M, Hutton A G. The numerical treatment of advection: a performance comparison of current methods[J]. Numerical Heat Transfer Part B, 1982, **5**(4): 439-461.

Streamline Upwind Finite Element Method Using 6-Node Triangular Element With Adaptive Remeshing Technique for Convective-Diffusion Problems

Niphon Wansophark, Pramote Dechaumphai

(Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University,
Patumwan, Bangkok 10330, Thailand)

Abstract: A streamline upwind finite element method using the 6-node triangular element is presented. The method was applied to the convection term of the governing transport equation directly along local streamlines. Several convective-diffusion examples were used to evaluate the efficiency of the method. Results show that the method is monotonic and does not produce any oscillation. In addition, an adaptive meshing technique is combined with the method to further increase the solution accuracy, and at the same time, to minimize the computational time and computer memory requirement.

Key words: streamline upwind; finite element method; convective-diffusion problem