

横观各向同性广义热弹性扩散 Rayleigh 波 在自由表面上的传播^{*}

R·库玛, T·坎赛

(库卢谢特拉大学 数学系, 库卢谢特拉-136119, 哈里亚拉邦, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 基于广义热弹性扩散理论, 边界无应力作用、绝热/恒温 and 化学势边界条件作用下, 研究均匀、横观各向同性、热弹性扩散半空间 Rayleigh 波的传播. 采用 Green 和 Lindsay (GL) 理论, 热扩散和热扩散-力学松弛条件采用 4 个不同的时间常数加以控制. 导出了所研究介质中表面波传播的久期方程. 为了说明和比较分析结果, 用图形示出了各向异性 and 扩散对相速度、衰减系数的影响. 同时, 还推导了某些特殊情况下的频率方程.

关键词: 波传播; 横观各向同性; 广义热弹性扩散; 相速度; 衰减系数

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

引 言

在已有经典的耦合和非耦合热弹性理论中, 热传导方程是扩散型的, 热传导波以无限大的速度传播, 此与物理观测相悖. 许多研究者尝试推广和修正经典热弹性理论, 目的是消除经典理论中热波以无限大速度传播这一谬误.

在所有这些理论中, 有两个有名的广义热弹性理论. 第一个是由 Lord 和 Shulman 提出的 Lord-Shulman 理论^[1], 该理论基于修正的热传导 Fourier 定律, 带有 1 个松弛时间. 另一个是由 Green 和 Lindsay 提出的 GL 理论^[2], 该理论同时修正能量方程和 Duhamel-Neumann 关系. Dhaliwal 和 Sherief^[3] 对均匀、各向异性热传导材料, 拓展了带有 1 个松弛时间的广义热弹性理论. 所有这些理论都预测热传导波将以一个有限速度传播. Chandrasekhariah^[4] 如同热扰动的第二声速引入该波. Hetnarski 和 Ignaczak^[5] 综述了各种有代表性的广义热弹性理论.

近来, 热扩散过程受到石油公司的关注, 更加有效地从油田中提取石油. 颗粒从高浓度区域向低浓度区域的自然运动称为扩散, 扩散正是浓度梯度造成的, 浓度梯度表示由于位置的变化引起浓度的改变. 弹性固体中的热扩散, 是由于温度场和质量扩散的耦合, 除了和周围环境交换热和质量以外, 还和应变相耦合.

* 收稿日期: 2008-02-07; 修订日期: 2008-09-26

基金项目: 印度科学和工业研究委员会 (CSIR) 资助项目

作者简介: R. Kumar (联系人, Tel: + 91- 1744 292644; E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com);

T. Kansal (E-mail: tarun_kansal@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

Nowacki^[6-9]利用耦合热弹性模型发展了热弹性扩散理论. Duziak 和 Kowalski^[10]及 Olesiak 和 Pyryev^[11]分别讨论了热扩散理论和弹性层热扩散准稳态耦合问题. 他们研究了温度场、质量扩散和应变交叉耦合作用产生的影响, 额外的质量浓度中的热激励产生应变, 同时产生了额外的温度场.

Sherief 等^[12]发展了带 1 个松弛时间的、波的传播速度是有限的广义热弹性扩散理论. Sherief 和 Saleh^[13]在带 1 个松弛时间的广义热弹性扩散理论意义上, 研究了热弹性半空间问题. Singh^[14-15]讨论了一个广义热扩散弹性固体自由表面上波的反射现象. Aouadi^[16-20]研究了不同类型的广义热弹性扩散问题. Sharma 等^[21]讨论了压电热弹性半空间中, 旋转和热松弛对 Rayleigh 波的影响. Sharma^[22-23]研究了热传导固体中, 广义热弹性扩散平面谐波和弹性热扩散表面波. 最近 Kumar 等^[24]导出了广义热弹性扩散的基本方程 (GL 模型), 并讨论了 Lamb 波.

在上述热扩散过程应用研究的基础上, 本文研究在均匀、横观各向同性、广义热弹性扩散半空间中 Rayleigh 波的传播. 利用无法化简的 Cardano 方法, 并借助于 DeMoivre 定理, 由久期方程计算波传播时的相速度和衰减系数. 对解析结果进行了数值计算并用图形示出为这种固体传承的各种物理现象.

1 基本方程

不计体力、热扩散源和质量扩散源时, 均匀、各向异性、广义热扩散弹性固体的基本控制方程为

$$\sigma_{\bar{j}} = c_{ijkl}e_{km} + a_{\bar{j}}(T + \tau_1 T_{\cdot}) + b_{ij}(C + \tau^1 C_{\cdot}), \quad (1)$$

$$q_i = -K_{\bar{j}}T_{\cdot j}, \quad (2)$$

$$\rho S = \frac{\rho C_E}{T_0}(T + \tau_0 T_{\cdot}) + a(C + \tau^0 C_{\cdot}) - a_{ij}e_{\bar{j}} + k, \quad (3)$$

$$P = b_{lm}e_{lm} + b(C + \tau^1 C_{\cdot}) - a(T + \tau_1 T_{\cdot}), \quad (4)$$

$$\eta_{\bar{k}, i} = -\alpha_{ij}^* P_{\cdot ij}. \quad (5)$$

其中, c_{ijkl} ($c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl} = c_{jilk}$) 为弹性参数; a_{ij} ($= a_{ji}$)、 b_{ij} ($= b_{ji}$) 分别为热张量和扩散模量张量; ρ 、 C_E 分别为常应变时的密度和比热容; a 、 b 分别为描述热弹性扩散效应和扩散效应的度量系数; T_0 为参考温度并设 $|T/T_0| \ll 1$; τ^0 、 τ^1 为扩散松弛时间, 且 $\tau^1 \geq \tau^0 \geq 0$; τ_0 、 τ_1 为温度松弛时间, 且 $\tau_1 \geq \tau_0 \geq 0$; $T(x_1, x_2, x_3, t)$ 为温度变化; C 为浓度; $\sigma_{\bar{j}}$ ($= \sigma_{ji}$)、 $K_{\bar{j}}$ ($= K_{ji}$)、 $e_{\bar{j}} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ 分别为应力张量分量、热传导张量分量和应变张量分量; α_{ij}^* ($= \alpha_{ji}^*$) 为扩散参数; $\eta_{\bar{k}}$ 为扩散质量矢量流; q_i 为热通量矢量 q 的分量; P 、 S 分别为每单位质量的化学势和熵; k 、 g 为材料常数; 下标“ \cdot ”和字母顶上的“ \cdot ”分别对应于偏导数和对时间的导数.

物质的运动方程、熵方程和浓度方程分别为

$$\sigma_{\bar{j}, j} + \rho F_i = \rho \dot{u}_i, \quad (6)$$

$$q_{i, i} + \rho T_0 S_{\cdot} - \rho M + P \eta_{\bar{k}, i} = 0, \quad (7)$$

$$\eta_{\bar{k}, i} = -C_{\cdot} + \rho N, \quad (8)$$

其中, F_i 为每单位质量承受的外力, M 、 N 分别为每单位质量的热源强度和物质扩散源强度, u_i 为位移矢量.

将式(1)~(5)代入方程(6)~(8), 不计体力、热扩散源和质量扩散源时, 可得运动方程

$$c_{ijkl}e_{km} + a_{\bar{j}}(T + \tau_1 T_{\cdot})_{\cdot j} + b_{ij}(C + \tau^1 C_{\cdot})_{\cdot j} = \rho \dot{u}_i; \quad (9)$$

热传导方程

$$\rho C_E (\mathcal{T} + \tau_0 \dot{T}) + a T_0 (C + \tau^0 \dot{C}) - a_{ij} \delta_{ij} T_0 = K_{ij} T_{,ij}; \quad (10)$$

质量扩散方程

$$- \alpha_{ij}^* b_{km} e_{km, j} - \alpha_{ij}^* b [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,j}] + \alpha_{ij}^* a [(T_{,j} + \tau_1 \mathcal{T})_{,j}] = - \mathcal{C}. \quad (11)$$

应用下列变换:

$$x'_1 = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi, \quad x'_2 = -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi, \quad x'_3 = x_3, \quad (12)$$

其中, ϕ 为 x_1-x_2 平面上的旋转角. 方程(9)~(11)中, 均匀、横观各向同性、广义热扩散弹性固体的基本方程为

$$c_{11} u_{1,11} + c_{12} u_{2,21} + c_{13} u_{3,31} + c_{66} (u_{1,22} + u_{2,12}) + c_{44} (u_{1,33} + u_{3,13}) - a_1 [(T + \tau_1 \mathcal{T})_{,1}] - b_1 [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,1}] = \rho \dot{u}_1, \quad (13)$$

$$c_{66} (u_{1,21} + u_{2,11}) + c_{12} u_{1,12} + c_{11} u_{2,22} + c_{44} u_{2,33} + (c_{13} + c_{44}) u_{3,32} - a_1 [(T + \tau_1 \mathcal{T})_{,2}] - b_1 [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,2}] = \rho \dot{u}_2, \quad (14)$$

$$(c_{13} + c_{44}) (u_{1,13} + u_{2,23}) + c_{44} (u_{3,11} + u_{3,22}) + c_{33} u_{3,33} - a_3 [(T + \tau_1 \mathcal{T})_{,3}] - b_3 [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,3}] = \rho \dot{u}_3, \quad (15)$$

$$\rho C_E (\mathcal{T} + \tau_0 \dot{T}) + a T_0 (C + \tau^0 \dot{C}) + [a_1 (u_{\mathcal{R},1} + u_{\mathcal{R},2}) + a_3 u_{\mathcal{R},3}] T_0 = K_1 (T_{,11} + T_{,22}) + K_3 T_{,33}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1^* [b_1 (u_{1,111} + u_{2,222} + u_{2,211} + u_{1,122}) + b_3 (u_{3,311} + u_{3,322})] + \\ & \alpha_3^* [b_1 (u_{1,133} + u_{2,233}) + b_3 u_{3,333}] - \alpha_1^* b [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,11} + (C + \tau^1 \mathcal{C})_{,22}] - \\ & \alpha_3^* b [(C + \tau^1 \mathcal{C})_{,33}] + \alpha_1^* a [(T + \tau_1 \mathcal{T})_{,11} + (T + \tau_1 \mathcal{T})_{,22}] + \\ & \alpha_3^* a [(T + \tau_1 \mathcal{T})_{,33}] = - \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij} = -a_i \delta_{ij}, \quad b_{ij} = -b_i \delta_{ij}, \quad \alpha_{ij}^* = \alpha_i^* \delta_{ij}, \quad K_{ij} = K_i \delta_{ij}, \\ a_1 = (c_{11} + c_{12}) \alpha_1 + c_{13} \alpha_3, \quad a_3 = 2c_{13} \alpha_1 + c_{33} \alpha_3, \\ b_1 = (c_{11} + c_{12}) \alpha_{1c} + c_{13} \alpha_{3c}, \\ b_3 = 2c_{13} \alpha_{1c} + c_{33} \alpha_{3c}, \quad c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2. \end{cases} \quad (18)$$

其中, α_i 、 α_{ic} 分别为线性热膨胀系数和扩散膨胀系数. 在方程(13)~(17)中, 通过缩减下标: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$, 将 c_{ijkl} 用 $c_{ln}(l, j, k, m = 1, 2, 3; l, n = 1, 2, \dots, 6)$ 表示.

2 问题的数学描述

在初始均衡温度 T_0 下, 考虑均匀、横观各向同性、广义热扩散弹性半空间. 取水平表面任意一点为坐标系 (x_1, x_2, x_3) 的原点. 沿材料对称轴取为 x_3 -轴, x_3 -轴竖直向下指向半空间, 并用 $x_3 \geq 0$ 表示该半空间. $x_3 = 0$ 面上无牵引力作用, 而有绝热/恒温边界条件和化学势边界条件作用. 取波传播方向为 x_1 -轴, 并使平行于 x_2 -轴的直线上所有的质点的位移是相等的. 因此, 所有的场量均与 x_2 -坐标无关, 则二维问题

$$\mathbf{u}(x_1, x_3, t) = (u_1, 0, u_3), \quad T(x_1, x_3, t), \quad C(x_1, x_3, t) \quad (19)$$

为位移矢量、温度变化和浓度.

定义如下无量纲量:

$$\begin{cases} x_i' = \frac{w_1^* x_i}{v_1}, & t' = w_1^* t, & u_i' = \frac{w_1^* u_i}{v_1}, & T' = \frac{a_1 T}{\rho_1^2}, & C' = \frac{b_1 C}{\rho_1^2}, \\ P' = \frac{P}{b_1}, & \tau_0' = w_1^* \tau_0, & \tau_1' = w_1^* \tau_1, & \tau^0' = w_1^* \tau^0, & \tau^1' = w_1^* \tau^1, \\ h' = \frac{v_1 h}{w_1^*}, & \sigma_j' = \frac{\sigma_j}{a_1 T_0}, & v_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, & w_1^* = \frac{\rho C_{Ev} v_1^2}{K_1}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, w_1^* 为材料的特征频率, v_1 为材料中的纵波速度.

将式(20)代入式(13)~(17), 并借助式(19), 略去撇号后得

$$u_{1,11} + \delta_1 u_{1,33} + \delta_2 u_{3,13} - (T + \tau_1 T)_{,1} - (C + \tau^1 C)_{,1} = \ddot{u}_1, \quad (21)$$

$$\delta_2 u_{1,13} + \delta_1 u_{3,11} + \delta_4 u_{3,33} - \varepsilon_1 (T + \tau_1 T)_{,3} - \varepsilon_2 (C + \tau^1 C)_{,3} = \ddot{u}_3, \quad (22)$$

$$(T + \tau_0 T)' + \zeta_1 (C + \tau^0 C)' + \zeta_2 (u_{,1} + \varepsilon_1 u_{,3}) = T_{,11} + \varepsilon_3 T_{,33}, \quad (23)$$

$$q_1^* u_{1,111} + q_2^* u_{3,333} + q_3^* [(T + \tau_1 T)_{,11}] + q_4^* [(T + \tau_1 T)_{,33}] - q_5^* [(C + \tau^1 C)_{,11}] - q_6^* [(C + \tau^1 C)_{,33}] + q_7^* u_{1,133} + q_8^* u_{3,311} = -C, \quad (24)$$

其中

$$\delta_1 = \frac{c_{44}}{c_{11}}, \quad \delta_2 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}}, \quad \delta_4 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{b_3}{b_1}, \quad \zeta_1 = \frac{a T_0 v_1^2 a_1}{w_1^* K_1 b_1},$$

$$\zeta_2 = \frac{a_1^2 T_0}{\rho K_1 w_1^*}, \quad \varepsilon_3 = \frac{K_3}{K_1}, \quad q_1^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_1^2}{\rho_1^4}, \quad q_2^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_3 b_1}{\rho_1^4},$$

$$q_3^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_1 a}{a_1 v_1^2}, \quad q_4^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_1 a}{a_1 v_1^2}, \quad q_5^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b}{v_1^2}, \quad q_6^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b}{v_1^2},$$

$$q_7^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_1^2}{\rho_1^4}, \quad q_8^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_3 b_1}{\rho_1^4}.$$

3 问题的解

设有如下形式的解:

$$(u_1, u_3, T, C) = (1, W, S, R) U \exp[i\xi(x_1 + m x_3 - ct)], \quad (25)$$

其中, $c = \omega/\xi$ 为无量纲相速度, ω 为频率, ξ 为波数; m 为未知参数; $1, W, S, R$ 分别为位移 u_1 、 u_3 、温度变化 T 和浓度 C 与 u_1 的幅值比.

将解式(25)代入方程(21)~(24), 得

$$\xi^2(1 + m^2 \delta_1 - c^2) + \xi^2 \delta_2 m W + \xi \omega \tau_{11} S + \xi \omega \tau_{21} R = 0, \quad (26)$$

$$\xi^2 m \delta_2 + \xi^2 (\delta_1 + \delta_4 m^2 - c^2) W + \varepsilon_1 \xi \omega m \tau_{11} S + \varepsilon_2 \xi \omega m \tau_{21} R = 0, \quad (27)$$

$$\xi \omega \zeta_2 + \varepsilon_1 \xi \omega m \zeta_2 W + \xi^2 (1 + \varepsilon_3 m^2 - c^2 \tau_{10}) S - \omega^2 \zeta_1 \tau_{20} R = 0, \quad (28)$$

$$q_1^* \xi^2 + q_7^* \xi^2 m^2 + q_2^* \xi^2 m^3 W + q_8^* \xi^2 m W - \xi \omega \tau_{11} (q_3^* + q_4^* m^2) S + \xi \omega \tau_{21} (q_5^* + q_6^* m^2) R = -c R. \quad (29)$$

其中

$$\tau_{11} = (\tau_1 + i/\omega), \quad \tau_{21} = (\tau^1 + i/\omega), \quad \tau_{10} = (\tau_0 + i/\omega), \quad \tau_{20} = (\tau^0 + i/\omega), \quad (30)$$

若 $[1 \ W \ S \ R]^T$ 的系数行列式为 0, 则方程组(26)~(29)有非平凡解, 从而导出如下多项式特征方程:

$$m^8 + A^* m^6 + B^* m^4 + C^* m^2 + D^* = 0, \quad (31)$$

其中, 系数 A^* 、 B^* 、 C^* 、 D^* 由附录 A 给出. 特征方程(31)是 m^2 的四次方程式, 因此有 4 个根

$m_p^2, p = 1, 2, 3, 4$. 由于我们感兴趣的仅仅是表面波, 因此本质上, 运动被限制在半空间的自由面 $x_3 = 0$ 上, 于是特征根 m_p^2 必须满足辐射条件 $\text{Re}(m_p) \geq 0$. 从而位移、温度变化和浓度有如下形式的解:

$$(u_1, u_3, T, C) = \sum_{p=1}^4 (1, n_{1p}, n_{2p}, n_{3p}) A_p \exp[i\xi(x_1 + im_p x_3 - ct)], \quad (32)$$

其中, $A_p, B_p (p = 1, 2, 3, 4)$ 为任意常数.

耦合常数 $n_{1p}, n_{2p}, n_{3p} (p = 1, 2, 3, 4)$ 由附录 B 给出.

4 边界条件

界面 $x_3 = 0$ 上的无量纲边界条件由如下方程给出:

(i) 力学条件(表面无应力)

$$\begin{cases} \sigma_{33} = (\delta_2 - \delta_1) u_{1,1} + \delta_4 u_{3,3} - \varepsilon_1 (T + \tau_1 T) - \varepsilon_2 (C + \tau^1 C) = 0, \\ \sigma_{31} = \delta_1 (u_{3,1} + u_{1,3}) = 0, \end{cases} \quad (33)$$

(ii) 热条件

$$T_{,3} + hT = 0, \quad (34)$$

其中, h 为表面传热系数, $h \rightarrow 0$ 对应绝热边界, $h \rightarrow \infty$ 对应恒温边界.

(ii) 化学势条件

$$P = u_{1,1} + \varepsilon_2 u_{3,3} - n_2 (C + \tau^1 C) + n_1 (T + \tau_1 T) = 0, \quad (35)$$

其中

$$n_1 = \frac{ac_{11}}{a_1 b_1}, \quad n_2 = \frac{bc_{11}}{b_1^2}.$$

5 久期方程的推导

将方程(32)中的 u_1, u_3, T, C 值代入边界条件(33)~(35), 得到 4 个线性方程联立的方程组:

$$\sum_{p=1}^4 P_{1p} A_p = 0, \quad \sum_{p=1}^4 P_{2p} A_p = 0, \quad \sum_{p=1}^4 P_{3p} A_p = 0, \quad \sum_{p=1}^4 P_{4p} A_p = 0, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{1p} &= (\delta_2 - \delta_1) + i\delta_4 m_p n_{1p} + c\tau_{11}\varepsilon_1 n_{2p} + c\tau_{21}\varepsilon_2 n_{3p}, \quad P_{2p} = n_{1p} + im_p, \\ P_{3p} &= 1 + i\varepsilon_2 m_p n_{1p} + n_2 c\tau_{21} n_{3p} - n_1 c\tau_{11} n_{2p}, \quad P_{4p} = (im_p + h) n_{2p}, \quad p = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

若幅值 $A_p (p = 1, 2, 3, 4)$ 的系数行列式为 0, 则方程组(36)有非平凡解. 经过冗长的代数简化, 得到久期方程为

$$P_{41}D_1 - P_{42}D_2 + P_{43}D_3 - P_{44}D_4 = 0, \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} D_1 &= P_{12}(P_{23}P_{34} - P_{33}P_{24}) - P_{13}(P_{22}P_{34} - P_{32}P_{24}) + P_{14}(P_{22}P_{33} - P_{32}P_{23}), \\ D_2 &= P_{11}(P_{23}P_{34} - P_{24}P_{33}) - P_{13}(P_{21}P_{34} - P_{31}P_{24}) + P_{14}(P_{21}P_{33} - P_{31}P_{23}), \\ D_3 &= P_{11}(P_{22}P_{34} - P_{24}P_{32}) - P_{12}(P_{21}P_{34} - P_{31}P_{24}) + P_{14}(P_{21}P_{32} - P_{31}P_{22}), \\ D_4 &= P_{11}(P_{22}P_{33} - P_{23}P_{32}) - P_{12}(P_{21}P_{33} - P_{31}P_{23}) + P_{13}(P_{21}P_{32} - P_{31}P_{22}). \end{aligned}$$

对于绝热($h \rightarrow 0$)和恒温($h \rightarrow \infty$)的热弹性扩散半空间, 久期方程(37)分别变为

$$m_1 n_{21} D_1 - m_2 n_{22} D_2 + m_3 n_{23} D_3 - m_4 n_{24} D_4 = 0, \quad (38)$$

$$n_{21} D_1 - n_{22} D_2 + n_{23} D_3 - n_{24} D_4 = 0. \quad (39)$$

方程(38)、(39)分别为横观各向同性、广义热弹性扩散半空间,在绝热和恒温边界上,无应力、有化学势作用时, Rayleigh 表面波的久期方程. 在这些久期方程中,包括了该介质的 Rayleigh 波的相速度、波数和衰减系数等完整信息. 一般来说,波数和相速度是复数,因而波在空间传递是衰减的.

若记

$$c^{-1} = \nu^{-1} + i\omega^{-1}F, \quad (40)$$

则 $\xi = E + iF$, 其中 $E = \omega/\nu$, ν 和 F 为实数. 特征方程(31)的根一般也是复数,因此假定 $m_p = p_p + iq_p$, 则平面波解(32)中的指数变为

$$iE(x_1 - m_p^I x_3 - \mathcal{M}) - E \left[\frac{F}{E} x_1 + m_p^R x_3 \right], \quad (41)$$

其中 $m_p^R = p_p - q_p \frac{F}{E}$, $m_p^I = q_p + p_p \frac{F}{E}$. (42)

这说明 ν 为波传播速度, F 为波的衰减系数. 在久期方程(38)、(39)中应用表达式(40), 则可得波传播速度 ν 和波传播的衰减系数 F .

方程(32)可以写为

$$(u_1, u_3, T, C) = \sum_{p=1}^4 (1, n_{1p}, n_{2p}, n_{3p}) A_p \exp(-Fx_1 - \lambda_p^R x_3) \exp(i(E(x_1 - \mathcal{M}) - \lambda_p^I x_3)), \quad (43)$$

其中, $\lambda_p = E(m_p^R + im_p^I) = \lambda_p^R + i\lambda_p^I$. 显然

$$|\lambda_p^R|^2 - |\lambda_p^I|^2 = E^2[(m_p^R)^2 - (m_p^I)^2], \quad |\lambda_p^R| |\lambda_p^I| \cos \phi = \frac{1}{2} E^2 m_p^R m_p^I,$$

其中, ϕ 为复矢量 λ_p 的实部和虚部间的夹角.

因此,相平面(相垂直于矢量 λ_p^R)和幅平面(相垂直于矢量 λ_p^I)并不相互平行,因而最大衰减不是沿波传播方向,而是沿矢量 λ_p^R 方向.

6 特殊情况

6.1 在方程(38)、(39)中取 $\tau_0 = \tau^0 = \tau_1 = \tau^1 = 0$, 可得对应于横观各向同性耦合热弹性扩散半空间的频率方程.

6.2 不计扩散效应,即若取 $b_1 = b_3 = a = b = 0$, 方程(38)、(39)可简化为横观各向同性、广义热弹性固体中 Rayleigh 波的频率方程,即

$$m_1 n_{21} G_1 - m_2 n_{22} G_2 + m_3 n_{23} G_3 = 0. \quad (44)$$

$$n_{21} G_1 - n_{22} G_2 + n_{23} G_3 = 0, \quad (45)$$

其中

$$n_{1p} = - \frac{\epsilon_3 \delta_2 m_p^3 + (\delta_2 - c^2 \tau_{10} \delta_2 - \epsilon_1 \tau_{11} c^2 \zeta_2) m_p}{\delta_4 \epsilon_3 m_p^4 + (\epsilon_3 \delta_1 + \delta_4 - \epsilon_3 c^2 - \delta_4 c^2 \tau_{10} - \epsilon_1^2 \tau_{11} \zeta_2 c^2) m_p^2 + (\delta_1 - c^2)(1 - c^2 \tau_{10})},$$

$$n_{2p} = \frac{(\delta_2 \epsilon_1 - \delta_4) c \zeta_2 m_p^2 + (c^2 - \delta_1) c \zeta_2}{\delta_4 \epsilon_3 m_p^4 + (\epsilon_3 \delta_1 + \delta_4 - \epsilon_3 c^2 - \delta_4 c^2 \tau_{10} - \epsilon_1^2 \tau_{11} \zeta_2 c^2) m_p^2 + (\delta_1 - c^2)(1 - c^2 \tau_{10})},$$

$$H_{1p} = (\delta_2 - \delta_1) + i\delta_4 m_p n_{1p} + c \tau_{11} \epsilon_1 c_{11} n_{2p}, \quad H_{2p} = n_{1p} + im_{2p}, \quad p = 1, 2, 3.$$

$$G_1 = H_{12}H_{23} - H_{22}H_{13}, \quad G_2 = H_{11}H_{23} - H_{21}H_{13}, \quad G_3 = H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12}.$$

方程(44)、(45)与 Sharma 等在文献[25]中得到的方程(40)和(41)相类似.

6.2.1 不考虑热效应时,久期方程(44)、(45)退化为

$$P_{11}^* P_{22}^* - P_{21}^* P_{12}^* = 0, \quad (46)$$

其中

$$P_{1p}^* = (\delta_2 - \delta_1) + i\delta_4 m_p n_{1p}, \quad P_{2p}^* = n_{1p} + im_p, \quad p = 1, 2.$$

$$n_{1p} = -\frac{\delta_2 m}{\delta_1 + \delta_4 m^2 - c^2} = -\frac{1 + \delta_1 m^2 - c^2}{\delta_2 m}, \quad p = 1, 2.$$

根 m_1 和 m_2 由下式给出:

$$m_1^2 + m_2^2 = -\frac{\delta_1(\delta_1 - c^2) + \delta_4(1 - c^2) - \delta_2^2}{\delta_1 \delta_4}, \quad m_1^2 m_2^2 = \frac{(1 - c^2)(\delta_1 - c^2)}{\delta_1 \delta_4}.$$

方程(46)与 Sharma 等在文献[26]中得到的方程(38)类似.

6.3 若有

$$\begin{cases} c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, & c_{12} = c_{13} = \lambda, & c_{44} = \mu, & a_1 = a_3 = \beta_1, \\ b_1 = b_3 = \beta_2, & K_1 = K_3 = K, & \alpha_1^* = \alpha_3^* = D, \end{cases} \quad (47)$$

从而,方程(38)、(39)变为各向同性、广义热弹性扩散固体的频率方程,即

$$m_1 m_{21} M_1 - m_2 m_{22} M_2 + m_3 m_{23} M_3 - m_4 m_{24} M_4 = 0, \quad (48)$$

$$m_{21} M_1 - m_{22} M_2 + m_{23} M_3 - m_{24} M_4 = 0. \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned} M_1 &= N_{12}(N_{23}N_{34} - N_{33}N_{24}) - N_{13}(N_{22}N_{34} - N_{32}N_{24}) + N_{14}(N_{22}N_{33} - N_{32}N_{23}), \\ M_2 &= N_{11}(N_{23}N_{34} - N_{24}N_{33}) - N_{13}(N_{21}N_{34} - N_{31}N_{24}) + N_{14}(N_{21}N_{33} - N_{31}N_{23}), \\ M_3 &= N_{11}(N_{22}N_{34} - N_{24}N_{32}) - N_{12}(N_{21}N_{34} - N_{31}N_{24}) + N_{14}(N_{21}N_{32} - N_{31}N_{22}), \\ M_4 &= N_{11}(N_{22}N_{33} - N_{23}N_{32}) - N_{12}(N_{21}N_{33} - N_{31}N_{23}) + N_{13}(N_{21}N_{32} - N_{31}N_{22}), \\ N_{1p} &= (\delta_2 - \delta_1) + im_p m_{1p} + c\tau_{11}(\lambda + 2\mu)m_{2p} + c\tau_{21}m_{3p}, \quad N_{2p} = m_{1p} + im_p, \\ N_{3p} &= 1 + im_p m_{1p} + n_2 c\tau_{21}m_{3p} - n_1 c\tau_{11}m_{2p}, \quad p = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

耦合常数 m_{qp} 可以利用方程(47)给出的量,由 n_{qp} ($q = 1, 2, 3; p = 1, 2, 3, 4$) 得到.

若直接求解各向同性、广义热弹性扩散半空间问题,则方程(48)、(49)是相同的.

6.3.1 忽略扩散效应,即若在方程(48)、(49)中取 $\beta_2 = a = b = 0$,可得各向同性、广义热弹性固体的频率方程,即

$$m_1 m_{21} G_1^* - m_2 m_{22} G_2^* + m_3 m_{23} G_3^* = 0. \quad (50)$$

$$m_{21} G_1^* - m_{22} G_2^* + m_{23} G_3^* = 0, \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} m_{1p} &= -\frac{(c_1^2 - c_2^2)m_p^3 + ((c_1^2 - c_2^2)(1 - c^2\tau_{10}) - \tau_{11}c^2\xi_2)m_p}{c_1^2 m_p^4 + (c_2^2 + c_1^2(1 - c^2 - c^2\tau_{10} - \tau_{11}\xi_2 c^2))m_p^2 + (c_2^2 - c_1^2 c^2)(1 - c^2\tau_{10})}, \\ m_{2p} &= \frac{-c_2^2 c \xi_2 m_p^2 + (c_1^2 c^2 - c_2^2) c \xi_2}{c_1^2 m_p^4 + (c_2^2 + c_1^2(1 - c^2 - c^2\tau_{10} - \tau_{11}\xi_2 c^2))m_p^2 + (c_2^2 - c_1^2 c^2)(1 - c^2\tau_{10})}, \\ H_{1p}^* &= (\delta_2 - \delta_1) + im_p m_{1p} + c\tau_{11} m_{2p}, \quad H_{2p}^* = m_{1p} + im_{2p}, \quad p = 1, 2, 3, \\ G_1^* &= H_{12}^* H_{23}^* - H_{22}^* H_{13}^*, \quad G_2^* = H_{11}^* H_{23}^* - H_{21}^* H_{13}^*, \\ G_3^* &= H_{11}^* H_{22}^* - H_{21}^* H_{12}^*, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \end{aligned}$$

方程(50)、(51)与 Sharma 等在文献[25]中取 $\beta_2 = a = b = 0$ 导出的方程类似.

6.3.1.1 进一步,忽略热效应,在对应于各向同性弹性半空间的频率方程中,将无量纲量变换为物理量,又可得到

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 4 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{1/2}. \quad (52)$$

频率方程(52)与 Ewing, Jardetzky 和 Press 在文献[27]中导出的方程类似.

7 数值结果和讨论

为便于数值计算,我们选择横观各向同性材料铜. 铜材的单个晶体的物理参数为

$$\begin{aligned} c_{11} &= 18.78 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, & c_{12} &= 10.06 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \\ c_{13} &= 8.0 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, & c_{33} &= 18.2 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \\ c_{44} &= 4.06 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, & T_0 &= 0.293 \times 10^3 \text{ K}, & C_E &= 0.5331 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 2.08 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, & \alpha_3 &= 2.0 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, & \alpha_{1c} &= 2.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}, \\ \alpha_{3c} &= 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}, & a &= 1.8 \times 10^4 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}, & b &= 10 \times 10^5 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-2}, \\ \alpha_1^* &= 1.65 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}, & \alpha_3^* &= 1.0 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}, & \rho &= 8.954 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ K_1 &= 0.433 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, & K_3 &= 0.400 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \tau_0 &= 0.02 \text{ s}, & \tau_1 &= 0.05 \text{ s}, & \tau^0 &= 0.01 \text{ s}, & \tau^1 &= 0.04 \text{ s}. \end{aligned}$$

相速度和衰减系数

热弹性扩散波的相速度和衰减系数随波数的变化示于图1、图2. 在图1、图2中,实线对应于横观各向同性热弹性扩散(TID),虚线对应于各向同性热弹性扩散(ID),带小圆圈的实线对应于无扩散横观各向同性热弹性(TI),带小星的虚线表示无扩散各向同性热弹性(I).

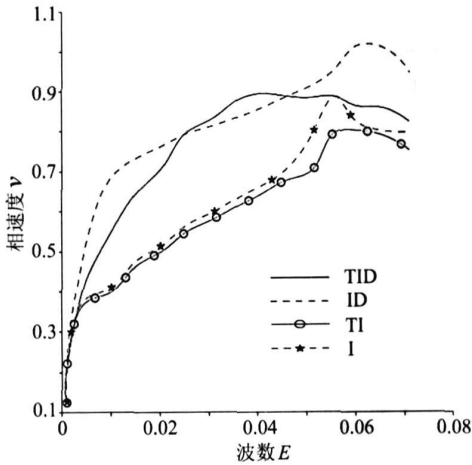


图1 相速度随波数的变化

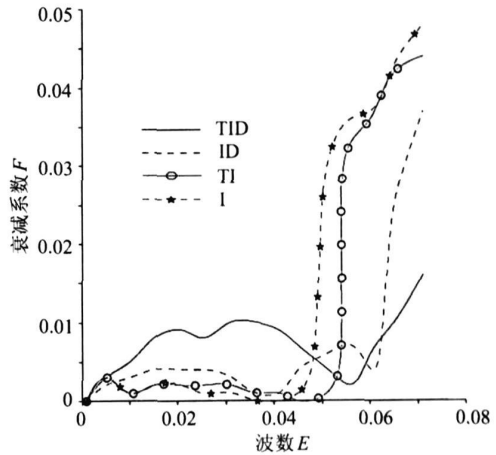


图2 衰减系数随波数的变化

由图1可以看出:当 $0.001 \leq E \leq 0.035$ 时, TID 对应的相速度增大, 在 $E = 0.035$ 时, 达到极大值; 在 $0.035 \leq E \leq 0.05$ 时变得稳定; 最终在 $E \geq 0.05$ 后, 相速度减小. 当 $0.001 \leq E \leq 0.06$ 时, ID 对应的相速度增大, 在 $E = 0.06$ 时, 达到最大值; 其后连续减小. ID 情况与 TID 情况相速度的增大相比较, 在 $0.001 \leq E \leq 0.02$ 时, 前者快于后者, 而在 $0.02 \leq E \leq 0.045$ 时, 前者慢于后者; 当 $E \geq 0.045$ 后, 前者再次快速增大, 然后慢慢减小.

TI 的相速度变化很明显, 当 $0.001 \leq E \leq 0.055$ 时, 相速度急剧增大, 直到 $E \geq 0.055$ 后, 才逐渐减少. TID 对应的相速度在 $E = 0.035$ 时达到极大值, 而 TI 对应的相速度在 $E = 0.055$ 时达到极大值. 与 TI 情况相比较, TID 情况的相速度增大更快, 减小更慢. ID 和 I 对应的相速度有类似的性质, 只有一点不同, ID 对应的相速度在 $E = 0.06$ 时达到最大值, 而 I 对应的相速度在 $E = 0.052$ 时达到最大值.

相应的衰减系数的变化示于图2. TID 情况的衰减系数在 $0.001 \leq E \leq 0.032$ 时增大, 在

0.032 $\leq E \leq$ 0.055 时减小, 在 $E \geq$ 0.055 后再增大. ID 情况的衰减系数, 在 0.001 $\leq E \leq$ 0.02 时, 缓慢增大, 在 0.02 $\leq E \leq$ 0.04 时, 下降到最小值, 最后, 当 $E \geq$ 0.04 后, 又戏剧性地增大. 图 2 表明, TID 情况对应的衰减系数值, 在 0.001 $\leq E \leq$ 0.05 时, 比 ID 情况对应的衰减系数值增长得更快, 而在 $E \geq$ 0.05 以后, 增长反而慢了.

当 0.001 $\leq E \leq$ 0.05 时, TI 情况的衰减系数, 先是增大, 然后减小到最小值, 而在 $E \geq$ 0.05 以后, 衰减系数急剧增大. 当 0.001 $\leq E \leq$ 0.052 时, TID 对应的衰减系数值超过 TI 相应的值, 而在 $E \geq$ 0.052 以后, TI 对应的衰减系数值反而领先了. ID 和 I 对应的衰减系数变化有着类似的性质.

8 结 论

本文研究了无边界应力作用、绝热/恒热和化学势边界条件下, 均匀、横观各向同性、热弹性扩散半空间中 Rayleigh 波的传播. 导出了表面波传播的久期方程. 讨论了某些特殊情况下的频率方程. 研究了材料各向异性 and 扩散对相速度、衰减系数的影响.

我们发现, ID 情况和 TID 情况相速度相比较, 增大时更快, 减少时变慢少. 随波数的增大, 与 TI 情况相比较, TID 情况对应的相速度有一个大的增大, 然后有一个小的减小. ID 和 I 情况有着类似的性质, 但有一点例外, 开始时两者相速度差是增大的, 但最后反而减小了. ID 和 I 情况, 相速度差先随着波数的增大而减少, 然后增大.

明显的是, TID 情况对应的衰减系数值, 较 ID 情况, 增大更快, 减小更慢. 在这较小的区域中, TID 对应的衰减系数值超过 TI 情况的相应值, 而后 TI 反而领先了. ID 和 I 情况也存在类似的趋势.

附 录 A

$$A^* = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 - f_3 g_3 - r_7 g_7}{f_2 g_1}, \quad B^* = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_4 - f_3 g_5 + r_1 g_6 - r_6 g_7 - r_7 g_{11}}{f_2 g_1},$$

$$C^* = \frac{f_1 g_4 + f_2 g_8 - f_3 g_9 + r_1 g_{10} - r_6 g_{11} + r_7 g_{13}}{f_2 g_1}, \quad D^* = \frac{f_1 g_8 - r_1 g_{12} + r_6 g_{13}}{f_2 g_1},$$

$$g_1 = f_7 l_3 - r_8 l_7, \quad g_2 = f_6 l_3 + f_7 l_2 - r_2 l_5 - r_9 l_7 + r_8 l_6, \quad g_3 = f_3 l_3 - r_8 j_2,$$

$$g_4 = f_6 l_2 + f_7 l_1 - r_2 l_4 + r_9 l_6, \quad g_5 = f_3 l_2 - r_2 l_9 + r_8 j_1 - r_9 j_2,$$

$$g_6 = f_3 l_5 - f_7 l_9 + r_8 j_3, \quad g_7 = f_7 j_2 - f_3 l_7, \quad g_8 = f_6 l_1, \quad g_9 = f_3 l_1 - r_2 l_8 + r_9 j_1,$$

$$g_{10} = f_3 l_4 - f_6 l_9 - f_7 l_8 + r_9 j_3, \quad g_{11} = f_3 l_6 + f_6 j_2 - f_7 j_1 + r_2 j_3, \quad g_{12} = f_6 l_8, \quad g_{13} = f_6 j_1,$$

$$f_1 = \xi^2(1 - c^2), \quad f_2 = \delta_1 \xi^2, \quad f_3 = \xi^2 \delta_2, \quad f_4 = \omega \xi \tau_{11}, \quad f_5 = \xi \omega \tau_{21},$$

$$f_6 = \xi^2(\delta_1 - c^2), \quad f_7 = \delta_4 \xi^2, \quad f_8 = \varepsilon_1 \xi \omega \tau_{11}, \quad f_9 = \varepsilon_2 \xi \omega \tau_{21}, \quad r_1 = \xi \omega \xi_2,$$

$$r_2 = \varepsilon_1 \xi_2 \omega \xi, \quad r_3 = \xi^2(1 - c^2 \tau_{10}), \quad r_4 = \varepsilon_3 \xi^2, \quad r_5 = -\zeta_1 \tau_{20} \omega^2, \quad r_6 = q_1^* \xi^2, \quad r_7 = q_7^* \xi^2,$$

$$r_8 = q_2^* \xi^2, \quad r_9 = q_8^* \xi^2, \quad h_1 = -\xi \omega \tau_{11} q_3^*, \quad h_2 = -q_4^* \xi^2 \tau_{11} c, \quad h_3 = \xi \omega \tau_{21} q_5^* + c,$$

$$h_4 = q_6^* \xi^2 \tau_{11} c, \quad l_1 = r_3 h_3 - r_5 h_1, \quad l_2 = h_4 r_3 + r_4 h_3 - h_2 r_5, \quad l_3 = r_4 h_4, \quad l_4 = f_8 h_3 - f_9 h_1,$$

$$l_5 = f_8 h_4 - h_2 f_9, \quad l_6 = f_8 r_5 - f_9 r_3, \quad l_7 = r_4 f_9, \quad l_8 = f_4 h_3 - f_5 h_1, \quad l_9 = h_4 f_4 - h_2 f_5,$$

$$j_1 = f_4 r_5 - f_5 r_3, \quad j_2 = r_4 f_5, \quad j_3 = f_4 f_9 - f_8 f_5,$$

附 录 B

$$I_1 = r_2 h_4 - r_8 r_5, \quad I_2 = f_7 h_4 - f_9 r_8, \quad I_3 = f_7 r_5 - f_9 r_2, \quad I_4 = r_2 h_3 - r_8 r_9,$$

$$I_5 = f_7 h_3 + f_6 h_4 - f_9 r_9, \quad I_6 = r_6 r_5 - r_1 h_3, \quad I_7 = f_7 r_7 - f_3 r_8, \quad I_8 = h_2 r_2 - r_8 r_3 - r_9 r_4,$$

$$I_9 = f_7 h_2 - f_8 r_8, \quad I_{10} = f_7 r_3 + f_6 r_4 + f_8 r_2, \quad I_{11} = r_2 h_1 - r_9 r_3, \quad I_{12} = f_7 h_1 + f_6 h_2 - f_8 r_9,$$

$$I_{13} = r_6 r_3 - h_1 r_1, \quad g_{14} = f_3 l_1 - r_7 l_7, \quad g_{15} = f_3 l_2 - r_1 l_5 - r_6 l_7 + r_7 l_6, \quad g_{16} = f_3 l_3 - r_1 l_4 + r_6 l_6,$$

$$\begin{aligned}
g_{17} &= f_3 I_{1-} - r_1 I_{2+} + r_7 I_{3+}, \quad g_{18} = f_3 I_{4-} - r_1 I_{5+} + r_6 I_{3+} + r_7 f_6 r_5, \quad g_{19} = f_6 I_{6+}, \quad g_{20} = r_4 I_{7+}, \\
g_{21} &= f_3 I_{8-} - r_1 I_{9+} + r_7 I_{10+} + r_6 f_7 r_4, \quad g_{22} = f_3 I_{11-} - r_1 I_{12+} + r_6 I_{10+} + r_7 f_6 r_3, \quad g_{23} = f_6 I_{13+}, \\
n_{1p} &= -\frac{m_p^5 g_{14+} + m_p^3 g_{15+} + m_p g_{16+}}{m_p^6 g_{1+} + m_p^4 g_{2+} + m_p^2 g_{4+} + g_8}, \quad n_{2p} = \frac{m_p^4 g_{17+} + m_p^2 g_{18+} + g_{19}}{m_p^6 g_{1+} + m_p^4 g_{2+} + m_p^2 g_{4+} + g_8}, \\
n_{3p} &= -\frac{m_p^6 g_{20+} + m_p^4 g_{21+} + m_p^2 g_{22+} + g_{23}}{m_p^6 g_{1+} + m_p^4 g_{2+} + m_p^2 g_{4+} + g_8}, \quad p = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

致谢 本文作者 T•坎赛感谢印度科学和工业研究委员会(CSIR)对本文的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. *J Mech Phys Solid*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [2] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *J Elasticity*, 1972, **2**(1): 1-7.
- [3] Dhaliwal R S, Sherief H. Generalized thermoelasticity for anisotropic media[J]. *Quarterly Appl Math*, 1980, **33**: 1-8.
- [4] Chandrashekhariah D S. Thermoelasticity with second: a review[J]. *Appl Mech Rev*, 1986, **39**(3): 355-376.
- [5] Hetnarski R B, Ignaczak J. Generalized thermoelasticity[J]. *J Thermal Stresses*, 1999, **22**(4/5): 451-476.
- [6] Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids—I[J]. *Bull Acad Pol Sci Ser Sci Tech*, 1974, **22**: 55-64.
- [7] Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids—II[J]. *Bull Acad Pol Sci Ser Sci Tech*, 1974, **22**: 129-135.
- [8] Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids—III[J]. *Bull Acad Pol Sci Ser Sci Tech*, 1974, **22**: 275-276.
- [9] Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids[J]. *Proc Vib Prob*, 1974, **15**: 105-128.
- [10] Dudziak W, Kowalski S J. Theory of thermodiffusion for solids[J]. *Internat J Heat and Mass Transfer*, 1989, **32**(11): 2005-2013.
- [11] Olesiak Z S, Pyryev Y A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1995, **33**(6): 773-780.
- [12] Sherief H H, Saleh H, Hamza F. The theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. *Internat J Engrg Sci*, 2004, **42**(5/6): 591-608.
- [13] Sherief H H, Saleh H. A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. *Internat J Solids Structure*, 2005, **42**(15): 4484-4493.
- [14] Singh B. Reflection of P and SV waves from free surface of an elastic solid with generalized thermodiffusion[J]. *J Earth Syst Sci*, 2005, **114**(2): 159-168.
- [15] Singh B. Reflection of SV waves from free surface of an elastic solid in generalized thermodiffusion[J]. *J Sound Vibration*, 2006, **291**(3/5): 764-778.
- [16] Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermodiffusion[J]. *ZAMP*, 2006, **57**(2): 350-366.
- [17] Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder[J]. *Internat J Math Math Sci*, 2006, (13): 1-15.
- [18] Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion[J]. *Internat J Solids Structure*, 2007, **44**(17): 5711-5722.

- [19] Aouadi M. Uniqueness and reciprocity theorems in the theory of generalized thermoelastic diffusion [J]. *J Thermal Stresses*, 2007, **30**(7): 665-678.
- [20] Aouadi M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media [J]. *J Thermal Stresses*, 2008, **31**(3): 270-285.
- [21] Sharma J N, Walia V, Gupta S K. Effect of rotation and thermal relaxations on Rayleigh waves in piezothermoelastic half space [J]. *Internat J Mech Sci*, 2008, **50**(3): 433-444.
- [22] Sharma J N. Generalized thermoelastic diffusive waves in heat conducting materials [J]. *J Sound Vibration*, 2007, **301**: 979-993.
- [23] Sharma J N, Sharma Y D, Sharma P K. On the propagation of elastothermodiffusive surface waves in heat-conducting materials [J]. *J Sound Vibration*, 2008, **351**(4): 927-938.
- [24] Kumar R, Kansal T. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusion plate [J]. *Internat J Solids Structure*, 2008, **4**(22/23): 5890-5913.
- [25] Sharma J N, Singh D, Kumar R. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic plates [J]. *Indian J Pure Appl Math*, 2003, **34**(6): 841-852.
- [26] Sharma J N, Pal M, Chand D. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials [J]. *J Sound Vibration*, 2005, **284**(1/2): 227-248.
- [27] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. *Elastic Layers in Layered Media* [M]. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Company, Inc, 1957.

Propagation of Rayleigh Waves at the Free Surface of Transversely Isotropic Generalized Thermoelastic Diffusion

Rajneesh Kumar, Tarun Kansal

(Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136 119, India)

Abstract: The propagation of Rayleigh waves in a homogeneous, transversely isotropic, thermoelastic diffusive half-space subjected to stress free, thermally insulated/ isothermal and chemical potential boundary conditions, in the context of generalized theory of thermoelastic diffusion is studied. Green and Lindsay (GL) theory, in which, thermodiffusion and thermodiffusion-mechanical relaxations are governed by four different time constants, was selected for study. Secular equations for surface wave propagation in the considered media were derived. Anisotropy and diffusion effects on the phase velocity, attenuation coefficient were presented graphically in order to illustrate and compare the analytical results. Some special cases of frequency equations were also deduced from the present investigation.

Key words: wave propagation; transversely isotropic; generalized thermoelastic diffusion; phase velocity; attenuation coefficient