

应用于非惯性系湍流模拟的 扩展内禀旋转张量*

黄于宁¹, 马晖扬²

(1. 北京大学 湍流和复杂系统国家重点实验室, 北京 100871;

2. 中国科学院 研究生院物理学院, 北京 100049)

(黄永念推荐)

摘要: 研究扩展内禀旋转张量在非惯性系湍流模拟中的作用, 特别是对代数 Reynolds 应力湍流模式(如非线性 $k-\varepsilon$ 模式)的重要性. 为此, 采用几个近年来发展的非线性 $k-\varepsilon$ 湍流模式模拟旋转坐标系下均匀剪切湍流, 并且和大涡模拟的结果进行比较. 计算结果和分析表明, 需要发展更先进的非线性 $k-\varepsilon$ 模式从而更好地描述非惯性系下的复杂湍流.

关键词: 湍流模拟; 非惯性系; 扩展内禀旋转张量; 代数 Reynolds 应力张量

中图分类号: O357.5 **文献标识码:** A

引 言

模拟惯性系下的复杂湍流, 无论是求解 Reynolds 平均湍流方程, 采用大涡模拟或直接数值模拟, 都是非常困难的课题. 那么, 由于坐标系旋转产生旋转效应, 使得对非惯性系下湍流的模拟就变得更加困难. 关于湍流模拟中的旋转效应可以参考 Lumley^[1-2]、Launder 等^[3]、Speziale 等^[4]、Kristoffersen 和 Andersson^[5]、Gatski 和 Speziale^[6]、Jongen 等^[7]、Nagano 和 Hattori^[8-9]、Yoshizawa 等^[10].

求解 Reynolds 平均方程(RANS)的湍流模式可以分成两类: 二阶矩封闭模式(以周培源上个世纪 40 年代的开创性文章^[11]为基础)以及代数 Reynolds 应力模式, 例如, 线性和非线性 $k-\varepsilon$ 模式. 后者因为计算简单, 在上个世纪 70 年代以来在工程湍流的模拟中得到广泛应用. 本文作者发展了一个引入平均旋转张量的三阶非线性 $k-\varepsilon$ 湍流模式^[12], 其系数是根据 Tavoularis 和 Comsin^[13]的实验确定的. 在本文中, 我们将讨论非惯性系下湍流的模拟. 通过坐标变换, 引入扩展内禀旋转张量. 进一步地, 我们将指出, 在非惯性系湍流模拟中, 正是扩展内禀旋转张量正确地反映了科氏力引起的旋转效应. 当我们应用在惯性坐标系下发展的、含有旋转张量的 Reynolds 应力模式模拟非惯性系湍流时, 平均旋转张量应该用扩展内禀旋转张量替代. 本文表明和 Reynolds 应力输运方程相容的恰恰是扩展内禀旋转张量, 而不是近年来在湍流模拟中得到广泛应用的内禀旋转张量. 为了说明扩展内禀旋转张量的作用, 我们应用近年来发展的

* 收稿日期: 2008-06-10; 修订日期: 2008-10-05

作者简介: 黄于宁(1961—), 男, 广东人, 教授, 博士(E-mail: yuninghuang@yahoo.com);

马晖扬 联系人. Tel: + 86-10-88256351; E-mail: hyma@gucas.ac.cn).

非线性 $K-\varepsilon$ 湍流模式——Craft 等的模式^[14]、Shih 等的模式^[15]、作者的模式 (Huang 和 Ma^[12])、以及 Yoshizawa 等的模式^[10]——计算在旋转坐标系下的均匀剪切湍流, 并和 Bardina 等^[16] 的大涡模拟结果进行比较.

1 非惯性系湍流模拟中的扩展内禀旋转张量

对惯性坐标系 $\mathcal{I} := (x, t)$ 中, 常密度 ρ 和常粘性系数 μ 的不可压缩牛顿流体的湍流运动, 平均运动的连续性方程和 Reynolds 平均 N-S 方程为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div}(\mathbf{T} + \rho\boldsymbol{\tau}) + \rho\mathbf{B}, \quad (2)$$

其中, 横线表示取系综平均, D/Dt 为相对平均速度场 \mathbf{v} 的随体导数, $\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}$, $\mathbf{D} = (\operatorname{grad}\mathbf{v} + (\operatorname{grad}\mathbf{v})^T)/2$ 是平均拉伸张量, $\boldsymbol{\tau} = -\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$ 是 Reynolds 应力张量, \mathbf{B} 是单位体积力.

脉动速度 \mathbf{v}' 的演化方程是

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + L\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}' + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} - \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'), \quad (3)$$

其中, $L = \operatorname{grad}\mathbf{v}$, $\mathbf{T}' = -p'\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}' = (\operatorname{grad}\mathbf{v}' + (\operatorname{grad}\mathbf{v}')^T)/2$ 是脉动拉伸张量, p' 是脉动压力.

从脉动速度 \mathbf{v}' 的演化方程可以导出 Reynolds 应力输运方程

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} + L\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}L^T = -\frac{1}{\rho} \overline{[(\operatorname{div} \mathbf{T}') \otimes \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \otimes \operatorname{div} \mathbf{T}']} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}. \quad (4)$$

注意到二阶矩湍流模式就是以该方程为基础的.

因为 $L = \operatorname{grad}\mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ 以及 $\mathbf{D} = (\operatorname{grad}\mathbf{v} + (\operatorname{grad}\mathbf{v})^T)/2$ 和 $\mathbf{W} = (\operatorname{grad}\mathbf{v} - (\operatorname{grad}\mathbf{v})^T)/2$ 分别是惯性系 \mathcal{I} 下的平均拉伸张量和平均旋转张量, 方程 (3) 变成

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + (\mathbf{D} + \mathbf{W})\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}' + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} - \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'), \quad (5)$$

方程 (4) 则为

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} + (\mathbf{D} + \mathbf{W})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{D} + \mathbf{W})^T = \\ -\frac{1}{\rho} \overline{[(\operatorname{div} \mathbf{T}') \otimes \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \otimes \operatorname{div} \mathbf{T}']} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}. \end{aligned} \quad (6)$$

考虑坐标系的变换, 从惯性系 $\mathcal{I} := (x, t)$ 变换到非惯性系 $\mathcal{I}^* := (x^*, t^*)$. 这种变换物理上意味着由欧氏群变换 (见 Truesdell 和 Noll^[17]) 所定义的观察者的变换:

$$\mathbf{x}^*(t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (7)$$

其中, $\mathbf{Q}(t)$ 是时间 t 的正交张量, $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{Q}(t)^T\mathbf{Q}(t) = \mathbf{1}$ 是单位张量, $\mathbf{b}(t)$ 是时间 t 的任意向量, 以及 $t^* = t + t_0$, t_0 是常数.

在此坐标变换下, 很容易得到 $\mathbf{v}^{*'}$ 在 $\mathcal{I}^* := (x^*, t^*)$ 下的演化方程:

$$\frac{D\mathbf{v}^{*'}}{Dt} + L^*\mathbf{v}^{*'} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'} + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}^{*'} \otimes \mathbf{v}^{*'}} - \mathbf{v}^{*'} \otimes \mathbf{v}^{*'}) - 2\mathbf{A}^*\mathbf{v}^{*'}, \quad (8)$$

其中, $L^* = \operatorname{grad}\mathbf{v}^*$, $\mathbf{T}^{*'} = -p^{*'}\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}^{*'}$, $p^{*'}$ 脉动压力, $\mathbf{D}^{*'} = (\operatorname{grad}\mathbf{v}^{*'} + (\operatorname{grad}\mathbf{v}^{*'})^T)/2$

是非惯性系下脉动拉伸张量, $A^* = -\mathbf{Q}(t)^T \mathbf{Q}(t)$ 是 \mathcal{Q}^* 相对于 \mathcal{Q} 的旋转张量.

在流体力学中常常采用 \mathcal{Q}^* 相对于 \mathcal{Q} 的旋转角速度 Ω 来替代旋转张量 A^* (见 Huang 和 Durst^[18]). 现在引入角速度 Ω , 脉动速度的演化方程为

$$\frac{D\mathbf{v}^{*'}}{Dt} + \mathbf{L}^* \mathbf{v}^{*'} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'} + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}} - \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}) - 2\Omega \times \mathbf{v}^{*'}, \quad (9)$$

注意到 $\mathbf{L}^* = \operatorname{grad} \mathbf{v}^* = \mathbf{D}^* + \mathbf{W}^*$, $\mathbf{D}^* = (\operatorname{grad} \overline{\mathbf{v}^*} + (\operatorname{grad} \overline{\mathbf{v}^*})^T)/2$ 以及 $\mathbf{W}^* = (\operatorname{grad} \overline{\mathbf{v}^*} - (\operatorname{grad} \overline{\mathbf{v}^*})^T)/2$ 分别是非惯性系的平均拉伸张量和旋转张量, 方程(8)可以写成

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}^{*'}}{Dt} + (\mathbf{D}^* + \mathbf{W}^* + 2\mathbf{A}^*) \mathbf{v}^{*'} = \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'} + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}} - \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}). \end{aligned} \quad (10)$$

同时方程(4)变成

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} + \mathbf{L}^* \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^* \mathbf{L}^{*T} = \\ - \frac{1}{\rho} [\overline{(\operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}) \times \mathbf{v}^{*'}} + \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}}] + \\ \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}} - 2\mathbf{A}^* \boldsymbol{\tau} - 2\boldsymbol{\tau}^* \mathbf{A}^{*T}, \end{aligned} \quad (11)$$

同样我们得到

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\tau}^*}{Dt} + (\mathbf{L}^* + 2\mathbf{A}^*) \boldsymbol{\tau}^* + \boldsymbol{\tau}^* (\mathbf{L}^* + 2\mathbf{A}^*)^T = \\ - \frac{1}{\rho} [\overline{(\operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}) \times \mathbf{v}^{*'}} + \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}}] + \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}}. \end{aligned} \quad (12)$$

这里引入扩展内禀旋转张量, 记为 $\Sigma^* = \mathbf{W}^* + 2\mathbf{A}^*$, 得到

$$\frac{D\mathbf{v}^{*'}}{Dt} + (\mathbf{D}^* + \Sigma^*) \mathbf{v}^{*'} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'} + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}} - \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}). \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\tau}^*}{Dt} + (\mathbf{D}^* + \Sigma^*) \boldsymbol{\tau}^* + \boldsymbol{\tau}^* (\mathbf{D}^* + \Sigma^*)^T = \\ - \frac{1}{\rho} [\overline{(\operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}) \times \mathbf{v}^{*'}} + \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \operatorname{div} \mathbf{T}^{*'}}] + \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'} \times \mathbf{v}^{*'}}. \end{aligned} \quad (14)$$

将方程(5)和(6)与方程(13)和(14)进行比较, 可以发现, 当模拟非惯性系 \mathcal{Q}^* 下的湍流时, 正是扩展内禀旋转张量 Σ^* 恰当地表明着由科氏力诱导的旋转效应, 从而当应用在惯性系下发展的、含有平均旋转张量 \mathbf{W} 的 Reynolds 应力模式模拟非惯性系湍流时, 当地平均旋转张量 \mathbf{W} 必须用扩展内禀旋转张量 Σ^* 替代.

正如上述所述, 在流体力学, 特别是在计算流体动力学领域, 常常采用 \mathcal{Q}^* 相对于 \mathcal{Q} 的旋转角速度 Ω 来替代旋转张量 A^* , 因此, 我们也考虑采用角速度, 注意到当坐标变换(7)给定, 旋转张量 $A^* = -\mathbf{Q}(t)^T \mathbf{Q}(t)$ 已知. 因为 $\Sigma^* = \mathbf{W}^* + 2\mathbf{A}^*$, 角速度 Ω 是旋转张量 A^* 的对偶, 即 $A^* \mathbf{v}^{*'} = \Omega \times \mathbf{v}^{*'}$, 我们得到

$$A_{ij}^* = \epsilon_{ik} \Omega_k, \quad (15)$$

其中, ϵ_{jk} 是置换符号, 且

$$\Sigma_{ij}^* = W_{ij}^* + 2A_{ij}^* = W_{ij}^* + 2\epsilon_{ik} \Omega_k. \quad (16)$$

下面我们将应用几个非线性 K - ϵ 模式数值计算旋转坐标系下均匀剪切湍流, 以期检验扩展内禀旋转张量 Σ^* 在其中发挥的重要作用. 应该注意到这里引入的扩展内禀旋转张量和 Speziale^[19] 推导出来、在湍流模拟中广泛应用的内禀旋转张量是不同的, 相差 $\epsilon_{ijk} \Omega_k$; 我们将表明, 这一区别将导致它们在应用于非惯性系湍流模拟时非常不同的特性.

2 模拟旋转坐标系下均匀剪切湍流的诱导旋转因子

基于 Reynolds 应力输运方程的二阶矩模式中, 科氏力显式地出现在方程(14). 与之不同的代数 Reynolds 应力模式, 例如非线性示 K - ϵ 模式, 为了计及科氏力诱导的旋转效应, 平均旋转张量必须用扩展内禀旋转张量替代. 事实上, 这种方法物理上是和 Reynolds 应力输运方程相容的, 从而也和 N-S 方程相容. 在应用湍流模式进行计算和讨论其结果之前, 这里为了记号的简便, 并不失一般性, 我们去掉有关公式中的“*”, 此时在一个任意非惯性系下脉动速度演化方程和 Reynolds 应力输运方程分别为

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + (\mathbf{D} + \Sigma)\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho}\text{div}\mathbf{T}' + \text{div}(\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} - \mathbf{v}'\mathbf{v}'), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} + (\mathbf{D} + \Sigma)\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{D} + \Sigma)^T = \\ - \frac{1}{\rho}[\overline{(\text{div}\mathbf{T}')\mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}'\text{div}\mathbf{T}'}] + \text{div}\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\mathbf{v}'}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\mathbf{D} = (\text{grad}\mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T)/2$ 和 $\mathbf{W} = (\text{grad}\mathbf{v} - (\text{grad}\mathbf{v})^T)/2$, 且

$$\Sigma_{ij} = W_{ij} + 2A_{ij} = W_{ij} + 2\epsilon_{ijk} \Omega_k. \quad (19)$$

显然, 在惯性系中 $\Omega = \mathbf{0}$, 这样扩展内禀旋转张量 Σ 就是平均旋转张量 \mathbf{W} , 而方程(17)及(18)就分别蜕化为方程(5)及(6).

这里值得注意的是, 由方程(19)定义的扩展内禀旋转张量 Σ 和内禀旋转张量 $W_{ij} = W_{ij} + \epsilon_{ijk} \Omega_k$ 的区别在于以下几个方面:

首先, 扩展内禀旋转张量 Σ 比内禀旋转张量 \mathbf{W} 多一项 $\epsilon_{ijk} \Omega_k$, 这就是为什么 Σ 称之为扩展内禀旋转张量的原因; 其次, 由于多了一项 $\epsilon_{ijk} \Omega_k$, 扩展内禀旋转张量不再是坐标系无关的, 而是依赖于坐标系, 即非客观的, 而内禀旋转张量 \mathbf{W} 是坐标系无关的, 即客观的(见 Gatski 和 Wallin^[20]); 第3点, 扩展内禀旋转张量 Σ 是与 Reynolds 输运方程相容的(从而也和 N-S 方程相容), 但是, 内禀旋转张量 \mathbf{W} 却不相容.

为了证明多年来在湍流模拟中广泛使用的内禀旋转张量与 Reynolds 应力输运方程不相容, 让我们考虑 Gatski 和 Speziale^[6] 关于显式代数 Reynolds 应力模式的文章, 其中使用了内禀旋转张量. 在文献[6] 62 页叙述到:

应用式(8)和(12), 我们将式(11)写成另一种形式

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} - \epsilon) b_{ij} = - \frac{2}{3} K S_{ij} - K \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] - \\ K [b_{ik} (\omega_{jk} + 2\epsilon_{nlj} \Omega_m) + b_{jk} (\omega_{ik} + 2\epsilon_{nki} \Omega_m)] + \frac{1}{2} \Pi_{ij}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (14)$$

$$\Pi_{ij} = \Psi_{ij} - D \epsilon_{ij}. \quad (15)$$

在所有常用的二阶矩模式中, Π_{ij} 被模化为下列通用形式:

$$\Pi_{ij} = \epsilon \mathcal{A}_{ij}(\mathbf{b}) + K \mathcal{A}_{ijkl}(\mathbf{b}) \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \quad \{16\}$$

对非惯性系, $\partial v_k / \partial x_l$ 为 $\partial v_k / \partial x_l + \epsilon_{nlk} \Omega_n$ 所替代, 将其代入{13}得到用平均速度梯度表示的确定 Reynolds 应力各向异性的封闭形式的代数方程组(原文摘录完, 其中公式号加{ }的是原文中的公式号).

注意到这里 $\mathcal{P} = -\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$ 是湍流生成项, 湍流耗散率张量为 $\epsilon_j = (2/3) \epsilon \delta_{ij} + D\epsilon_j$, 其中 $\epsilon = (1/2) \epsilon_i$ 是标量湍流耗散率, Ψ_j 是压力应变率张量.

由式{13}显然在非惯性系扩展内禀旋转张量 $\Sigma_{ik} = \omega_{ik} + 2\epsilon_{mki} \Omega_m$ 是与 Reynolds 应力输运方程相容的, 而内禀旋转张量 $W_{ik} = \omega_{ik} + \epsilon_{nki} \Omega_n$ 并非如此.

为了更清楚地表明这一点, 考虑在惯性系中式{13}的形式:

$$(\mathcal{P} - \epsilon) b_{ij} = -\frac{2}{3} K S_{ij} - K \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] - K [b_{ik} \omega_{jk} + b_{jk} \omega_{ik}] + \frac{1}{2} \Pi_{ij}.$$

那么, 在非惯性系用 $\Sigma_{ik} = \omega_{ik} + 2\epsilon_{mki} \Omega_m$ 替代 ω_{ik} , 我们得到式{13}的正确形式:

$$(\mathcal{P} - \epsilon) b_{ij} = -\frac{2}{3} K S_{ij} - K \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] - K [b_{ik} \Sigma_{jk} + b_{jk} \Sigma_{ik}] + \frac{1}{2} \Pi_{ij}.$$

然而, 若用 $W_{ik} = \omega_{ik} + \epsilon_{nki} \Omega_n$ 替代 ω_{ik} 其结果为

$$(\mathcal{P} - \epsilon) b_{ij} = -\frac{2}{3} K S_{ij} - K \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] - K [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] + \frac{1}{2} \Pi_{ij},$$

它是和参考文献[6]中的式{2}的 Reynolds 应力输运方程不相容的. 同时, 在文献[6]中给出 Π_{ij} 的一般形式(此处摘录原文):

“可以证明式{16}的一般形式为

$$\Pi_{ij} = -C_1 \Theta_{ij} + C_2 K S_{ij} + C_3 K \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] + C_4 K (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}), \quad \{17\}$$

其中

$$W_{ij} = \omega_{ij} + \epsilon_{nji} \Omega_n \quad \{18\}$$

是绝对涡量张量...”(摘录完).

很明显, 式{17}中内禀旋转张量 $W_{ik} = \omega_{ik} + \epsilon_{nki} \Omega_n$ 应该为扩展内禀旋转张量 $\Sigma_{ik} = \omega_{ik} + 2\epsilon_{mki} \Omega_m$ 替代.

自从 Speziale 1989 年开创性文章^[19]之后, 内禀旋转张量 $W_{ij} = W_{ij} + \epsilon_{ijk} \Omega_k$ 多年来一直为有关非惯性系湍流模拟的后续文章所采用(见文献[4, 7-8, 10, 20]). 对几种典型的湍流, 他们的计算结果与实验或 DNS 比较, 符合较好或得到某种改进, 但实际上, 这些湍流模式并不和 Reynolds 应力输运方程相容, 因此, 他们的结果并不具有所期望的通用性. 例如, 在 Speziale 和 MacGiolla Mhuiris^[21]的文章中, 应用内禀旋转张量确定均匀湍流的平衡态, 得到旋转坐标系均匀剪切湍流各向异性张量 a_{12} 的旋转因子 $[1 - 2\Omega/S]$, 而应用扩展内禀旋转张量得到的旋转

因子为 $[1 - 4\Omega/S]$, 它是和 Reynolds 应力输运方程一致的.

现在讨论旋转坐标系下均匀剪切湍流的数值模拟, 采用的是 3 个非线性 $K-\varepsilon$ 模式: Craft 等的模式^[14], Shih 等的模式^[15], Huang 和 Ma 的模式^[12], 以及 Yoshizawa 等^[10] 最近发展的二阶非线性 $K-\varepsilon$ 模式.

1) Craft 等三阶非线性模式 (CLS):

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{2K}{3}\mathbf{1} + 2C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \mathbf{D} - \beta_1 \frac{K^3}{\varepsilon^2} [\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}^2) \mathbf{1}] - \beta_2 \frac{K^3}{\varepsilon^2} (\mathbf{W}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{W}) - \\ & \beta_3 \frac{K^3}{\varepsilon^2} [\mathbf{W}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{W}^2) \mathbf{1}] + \gamma_1 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \text{tr}(\mathbf{D}^2) \mathbf{D} + \gamma_2 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \text{tr}(\mathbf{W}^2) \mathbf{D} + \\ & \gamma_3 \frac{K^4}{\varepsilon^3} [\mathbf{W}^2 \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W}^2 - \frac{2}{3} \text{tr}(\mathbf{W}^2 \mathbf{D}) \mathbf{1}] + \gamma_4 \frac{K^4}{\varepsilon^3} (\mathbf{W}\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^2 \mathbf{W}), \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $K = -\frac{1}{2} \text{tr}(\tau)$ 是湍动能, ε 是各向同性耗散率,

$$C_\mu = \frac{0.3(1 - \exp[-0.36/\exp(-0.75\Omega)])}{1 + 0.35\Omega^{3/2}}, \quad \Omega = \max(S, \Omega),$$

其中

$$S = (K/\varepsilon)[2\text{tr}(\mathbf{D}^2)]^{1/2}, \quad \Omega = (K/\varepsilon)[-2\text{tr}(\mathbf{W}^2)]^{1/2},$$

$\beta_1 = -0.4C_\mu$, $\beta_2 = 0.4C_\mu$, $\beta_3 = -1.04C_\mu$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 40.0C_\mu^3$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = -80.0C_\mu^3$. 注

意到, 因为 $\gamma_3 = 0$, 三阶项 $(\mathbf{W}^2 \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W}^2)$ 事实上对数值模拟没有贡献.

2) Shih 等的模式:

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{2K}{3}\mathbf{1} + 2\mu_T \frac{K^2}{\varepsilon} \mathbf{D} + A_3 \frac{K^3}{\varepsilon^2} [\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}] - \\ & 2A_5 \frac{K^4}{\varepsilon^3} [\mathbf{W}\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^2 \mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}) \mathbf{1} - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{D}^2) \mathbf{D}], \end{aligned} \quad (21)$$

系数为

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad A_3 = \frac{\sqrt{1 - (9/2) C_\mu^2 (KS^*/\varepsilon)^2}}{0.5 + (3/2)(K^3/\varepsilon^2) \Omega^* S^*},$$

$$A_5 = \frac{1.6\mu_T}{(K^4/\varepsilon^3)(7\text{tr} \mathbf{D}^2 + \text{tr} \mathbf{W}^2)/4},$$

其中

$$C_\mu = 1/(4.0 + A_s(KU^*/\varepsilon)), \quad f_\mu = [1 - \exp(-a_1 R_K - a_3 R_K^3 - a_5 R_K^5)]^{1/2},$$

$$A_s = \sqrt{6} \cos \phi, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} \text{tr} \mathbf{D}^3 / (\sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2})^3), \quad U^* = \sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2 - \text{tr} \mathbf{W}^2},$$

$$a_1 = 1.7 \times 10^{-3}, \quad a_3 = 1 \times 10^{-9}, \quad a_5 = 5 \times 10^{-10},$$

$$S^* = \sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2}, \quad \Omega^* = \sqrt{-\text{tr} \mathbf{W}^2}, \quad R_K = \sqrt{K} \nu / \nu.$$

3) Huang 和 Ma 的模式 (HM):

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{2K}{3}\mathbf{1} + 2C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \mathbf{D} - \gamma_1 C_\mu^2 \frac{K^3}{\varepsilon^2} [\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}^2) \mathbf{1}] + \gamma_2 C_\mu^2 \frac{K^3}{\varepsilon^2} \mathbf{D} + \\ & \gamma_3 C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon^3} (K - 2K\varepsilon) \mathbf{D} - \gamma_4 C_\mu^2 \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left[\mathbf{W}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{W}^2) \mathbf{1} \right] - \\ & \gamma_5 C_\mu^2 \frac{K^3}{\varepsilon^2} [\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}] + \gamma_6 C_\mu^3 \frac{K^4}{\varepsilon^3} [\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}] + \end{aligned}$$

$$\gamma_7 C_\mu^3 \frac{K^4}{\varepsilon^3} [\overset{\circ}{D} \overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{D} \overset{\circ}{D} - \frac{2}{3} \text{tr}(\overset{\circ}{D} \overset{\circ}{D}) \mathbf{1}], \quad (22)$$

其中, $C_\mu = 0.09$, $\gamma_1 = 2.896$, $\gamma_2 = 2.784$, $\gamma_3 = 0.843$, $\gamma_4 = 0.8482$, $\gamma_5 = 0.6344$, $\gamma_6 = 0.7767$, $\gamma_7 = 0.6885$, $\overset{\circ}{D}$ 表示 Jaumann 导数, $\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{D} D / Dt + \overset{\circ}{D} W - \overset{\circ}{D} W$.

4) Yoshizawa 等的模式:

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{2K}{3} \mathbf{1} + 2\gamma_1 \overset{\circ}{D} - 4C_{N1} \frac{K^2}{\Lambda \varepsilon} \gamma_7 [D^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(D^2) \mathbf{1}] - \\ & 4C_{N2} \frac{K^2}{\Lambda \varepsilon} \gamma_7 (\overset{\circ}{D} W - \overset{\circ}{D} W), \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $C_{N1} = 0.13$, $C_{N2} = 0.18$, $\Lambda = \sqrt{1 + 4C_S(KD_{ij}/\varepsilon)^2 + 4C_{\Omega}(KW_{ij}/\varepsilon)^2}$, $C_S = 0.015$, $C_{\Omega} = 0.02C_S$. $\gamma_7 = C_V(K^2/\varepsilon)/(\Lambda + C_A(1/K)(D/Dt)(K^2/\varepsilon))$, $C_V = 0.12$, $C_A = 0.95$. 注意到这里我们使用平均拉伸张量 D 和平均旋转张量 W 而不是 Yoshizawa 的 S 和 Ω .

在数值模拟中求解通常的 K 方程和 ε 方程:

$$\frac{DK}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\gamma_7}{\alpha_K} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) + \nu \cdot \cdot^2 K, \quad (24)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\gamma_7}{\alpha_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \nu \cdot \cdot^2 \varepsilon, \quad (25)$$

其中

$$\gamma_7 = C_\mu K^2 / \varepsilon, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \alpha_K = 1.0, \quad \alpha_\varepsilon = 1.3.$$

此外, 对均匀剪切湍流, Yoshizawa 采用了下列修正的 K 和 ε 方程:

$$\frac{DK}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (26)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \sqrt{1 + C_{\Omega \varepsilon} (K W_{ij} / \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon}{K}, \quad (27)$$

这里, $C_{\varepsilon 2} = 1.85$, $C_{\Omega \varepsilon} = 0.0025$.

均匀剪切湍流中 Reynolds 应力仅有 τ_{12} 项对湍动能 K 的产生有贡献. 无量纲 K 和 ε 方程分别为下列简单形式:

$$\frac{DK^*}{Dt^*} = 2K^* a_{12} - \varepsilon^* \left(\frac{\varepsilon_0}{K_0 S} \right), \quad (28)$$

$$\frac{D\varepsilon^*}{Dt^*} = 2C_{\varepsilon 1} \varepsilon^* a_{12} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^{*2}}{K^*} \left(\frac{\varepsilon_0}{K_0 S} \right), \quad (29)$$

其中, 当 $t^* = St = 0$ ($K_0 = K|_{t=0}$ 和 $\varepsilon_0 = \varepsilon|_{t=0}$) 时, $a_{12} = \tau_{12}/(2K)$, $K^* = K/K_0$, 在计算中当 $t^* = St = 0$ ($K_0 = K|_{t=0}$ 取 $\varepsilon_0 = \varepsilon|_{t=0}$), $\varepsilon^* = \varepsilon/\varepsilon_0$, $K^* = \varepsilon^* = 1$, $\varepsilon_0/(K_0 S) = 0.296$.

现在在上述模式中用扩展内禀旋转张量 Σ 替代平均旋转张量 W , 得到各向异性剪切应力 a_{12} 如下:

对 CLS 模式:

$$a_{12} = \frac{1}{2} C_\mu \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{8} \gamma_1 \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right)^3 - \frac{1}{8} \gamma_2 \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right)^3 \left[1 - 4 \frac{\Omega}{S} \right]^2, \quad (30)$$

其中

$$C_\mu = \frac{0.3(1 - \exp[-0.36/\exp(-0.75\eta)])}{1 + 0.35\eta^{3/2}}, \quad \eta = \max(S, \Omega),$$

$$S = \frac{KS}{\varepsilon}, \quad \Omega = \frac{KS}{\varepsilon} |1 - 4\Omega/S|, \quad \nu_1 = \nu_2 = 40.0C_{\mu}^3.$$

对 Shih 等的模式:

$$a_{12} = \frac{C_{\mu}}{2} \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{8} A_5 \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right)^3 \left[(1 - 4\frac{\Omega}{S})^2 - 1 \right], \tag{31}$$

其中

$$C_{\mu} = \frac{1}{4.0 + 1.5(KS/\varepsilon) \sqrt{1 + [1 - 4(\Omega/S)]^2}},$$

$$A_5 = \frac{6.4C_{\mu}}{(KS/\varepsilon)^2 (3.5 + 0.5[1 - 4(\Omega/S)]^2)}.$$

对 Huang 和 Ma 的模式:

$$a_{12} = \left\{ (1/2) C_{\mu}(KS/\varepsilon) + (1/4) \nu_3 C_{\mu}(2 - C_{\varepsilon 2})(KS/\varepsilon) - (1/4) \nu_6 C_{\mu}^3 (KS/\varepsilon)^3 [1 - 4(\Omega/S)]^2 \right\} \left\{ 1 + (1/2)(2 - C_{\varepsilon 1}) \nu_3 C_{\mu}(KS/\varepsilon)^3 \right\}, \tag{32}$$

其中, $C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92.$

对 Yoshizawa 等人的模式:

$$a_{12} = \frac{(1/2) C_{\nu}(KS/\varepsilon)}{\Lambda + C_A (1/K)(D/Dt)(K^2/\varepsilon)}, \tag{33}$$

其中, $C_{\nu} = 0.12, C_A = 0.95,$

$$\Lambda = \sqrt{1 + 2C_S \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right)^2 - 2C_{\Omega} \left(\frac{KS}{\varepsilon} \right)^2 \left[1 - 4\frac{\Omega}{S} \right]^2},$$

这里, $C_S = 0.015, C_{\Omega} = 0.02 C_S.$

考察方程(30) ~ (33), 显然在 a_{12} 表达式中诱导旋转因子 $[1 - 4(\Omega/S)]$ 是当地平均旋转张量 W 为扩展内禀旋转张量 Σ 替代的直接结果.

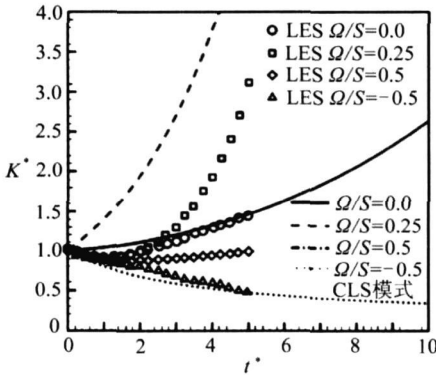


图 1 CLS 模式确定的湍动能随时间的演化(LES 数据取自文献[16])

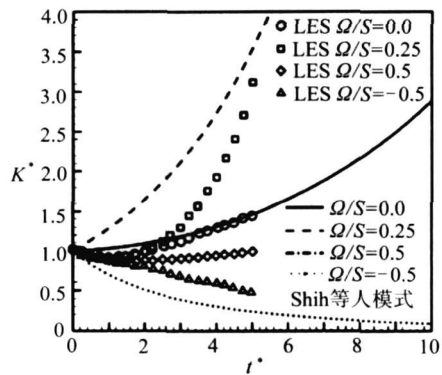


图 2 Shih 等人的模式确定的湍动能随时间的演化(LES 数据取自文献[16])

计算结果见图 1~ 4. 我们可以看到, 由于旋转因子 $[1 - 4(\Omega/S)]$ 出现在 a_{12} 表达式中, 每个模式都可以描述科氏力诱导的旋转效应, 但是, 当 $\Omega/S = 0.25$ 和 $\Omega/S = 0.5$ 时, 与 Bardina 等^[16] 的 LES 结果相比较, 没有一个模式恰当地确定出旋转效应; 然而, 当 $\Omega/S = -0.5$ 时, 除了 Yoshizawa 模式外, 其它模式都捕捉到旋转效应, 而且和 LES 的趋势一致. 有兴趣的读者还可以参考文献[4, 7, 8, 10, 20-21], 那里报道了同样算例的计算, 但是应用了内禀旋转张量, 而不

是扩展内禀旋转张量,其中包括几个熟知的非线性 $K-\epsilon$ 模式和二阶矩模式.

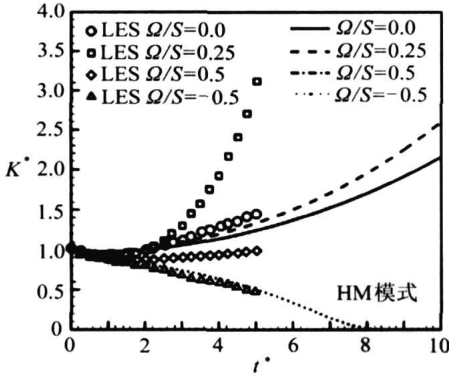


图3 HM 模式确定的湍动能随时间的演化 (LES 数据取自文献[16])

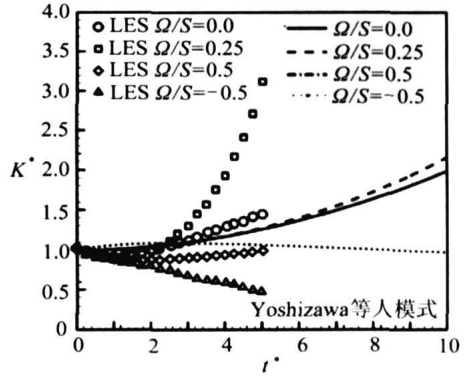


图4 Yoshizawa 等人的模式确定的湍动能随时间的演化(LES 数据取自文献[16])

4 讨论与结语

Gatski 和 Speziale^[6]曾指出: 他们的非线性 $K-\epsilon$ 模式可以捕捉旋转坐标系下的湍流剪切流和槽道流, 其结果和二阶矩模式相当, 即 SSG 模式(Speziale, Sarkar, Gatski^[22]). 但是, Gatski 和 Speziale 的二阶 $K-\epsilon$ 模式在旋转坐标系下均匀剪切湍流的模拟中给出了很好的结果, 这令人鼓舞. 有趣的是, 他们模式中 a_{12} 的旋转因子 $[1 - 4.5(\Omega/S)]$, 它非常接近于应用扩展内禀旋转张量得到的旋转因子 $[1 - 4(\Omega/S)]$. 另一方面, 应该注意, Gatski 和 Speziale 发展二阶 $K-\epsilon$ 模式并没有采用 Speziale 在上世纪 90 年代提出的二维湍流极限下的物质标架不变性原理. 同时, 很容易证明, 为了满足二维湍流极限下的物质标架不变性原理, Pope 的模式^[23]、Lumley 的模式^[2]、Gatski 和 Speziale 模式^[6], 以及本文中应用的上述 4 个非线性 $K-\epsilon$ 模式中所包含的平均旋转张量的项都必须去掉. 事实上, 得到广泛应用的 Speziale 非线性 $K-\epsilon$ 模式在推导过程中遵守了二维湍流极限下物质标架不变性原理, 结果平均旋转张量无法引入到模式中. 但是, 从理论的观点结合湍流的物理事实, 并没有观察到二维湍流极限下的物质标架不变性原理, 应该加以摒弃(Huang^[24]; 亦见 Lumley^[1,25]).

从上述分析可以清楚地看出, 当模拟非惯性系下湍流时, 必须将平均旋转张量 W 用扩展内禀旋转张量 Σ 替代. 对上述评估的 4 个非线性 $K-\epsilon$ 模式, $\Omega/S = 0.5$ 时的结果和 $\Omega/S = 0$ 时一样, 它是旋转因子 $[1 - 4(\Omega/S)]$ 的直接结果. 此外, 图 1~ 图 4 表明, 模式系数应该与更多的不变量以及扩展内禀旋转张量的不变量相关. 换言之, 在上述 4 个模式中, 模式系数和有关的不变量的依赖关系还不足够多. 例如, 对 CLS 模式、Shih 等人的模式、以及 Yoshizawa 等人的模式, 模式系数是两个典型不变量 $-\text{tr}D^2$ 和 $\text{tr}W^2$ 的函数, 而在 Huang 和 Ma 的模式中, 所有模式系数由均匀剪切湍流的实验确定的, 是常数. 但是, 实际上, 这些模式系数是一系列不变量的函数(见 Gatski 和 Speziale^[6]; Pope^[23]; Huang^[26]). 然而, 尽管上述 4 个非线性 $K-\epsilon$ 模式在确定旋转坐标系下均匀剪切湍流 $\Omega/S = 0.25$ 和 $\Omega/S = 0.5$ 时的结果不够令人满意, Gatski 和 Speziale 的二阶模式一个令人鼓舞的例子. 确实, 他们表明, 利用均匀剪切湍流的 LES 结果对模式系数进行合理的标定, 他们的模式可以捕捉某些复杂湍流的典型特征, 例如旋转系下的槽道流. 当然, Gatski 和 Speziale 的二阶模式, 类似所有其它二阶非线性 $K-\epsilon$ 模式一样, 无法捕捉

轴对称圆管旋转湍流中最重要的旋转效应,事实上,它给出平均周向速度是刚体旋转,和其它标准线性 K - ε 模式一样,和实验结果相矛盾(见 Huang 等人^[27])。

这里应该强调,在发展适用于非惯性系湍流模拟的二阶矩模式,在推导压力-应变率的一般表达式时,为了恰当地描述科氏力诱导的旋转效应,应该采用与坐标系相关的扩展内禀旋转张量,而不是坐标系无关的内禀旋转张量,其过程和上述介绍的代数 Reynolds 应力模式的情形是一致的。

关于代数 Reynolds 应力封闭方法中的 K 和 ε 方程,也有必要进行修正,以期更好地描述坐标系旋转诱导的效应。例如,应该从物理上加以检验并修正 ε 方程中的系数,使得它们依赖于坐标系的旋转,正如最近 Yoshizawa 等人^[10]所做的那样。同时,旋转坐标系下均匀剪切湍流应该成为最重要的评估算例,或者最基础的算例,对新发展的目的在于预估非惯性系下复杂湍流的模式进行评估。此外,若干约束应该遵守,例如可实现性条件。通常,只有一个模式成功地捕捉到旋转坐标系下均匀剪切湍流的重要特征,我们才能期望它在非惯性系下复杂湍流的模拟中性能良好。总之,作为湍流模式理论发展的方向,我们应该采用这样一种方式来发展湍流模式,即从一开始就建立一个对 Reynolds 应力的相对通用的封闭形式,模式系数应该是若干仔细选择的代表性的本构变量的函数,其中扩展内禀旋转张量应该是一个典型的本构变量,以及其它相应的不变量,配合一些典型湍流的 DNS 或实验数据,我们能够发展出性能良好的、适用于复杂湍流模拟的模式,而模拟惯性系下的湍流只是其中的一个特例。

致谢 感谢 Peter Bradshaw、Michael Brenner、Shiyi Chen、Franz Durst、Gregory Eyink、Daniel Joseph、Charles Meneveau、以及 Akira Yoshizawa 诸位教授。

[参 考 文 献]

- [1] Lumley J L. Toward a turbulent constitutive equation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, **41**: 413-434.
- [2] Lumley J L. Computational modeling of turbulent flows[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1978, **18**: 123-176.
- [3] Launder B E, Tselepidakis D P, Younis B A. A second-moment closure study of rotating channel flow [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **183**: 63-75.
- [4] Speziale C G, Gatski T B, Mac Giolla Mhuiris N. A critical comparison of turbulence models for homogeneous shear flows in a rotating frame[J]. *Physics of Fluids A*, 1990, **2**(9): 1678-1684.
- [5] Kristoffersen R, Andersson H. Direct simulation of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, **256**: 163-197.
- [6] Gatski T B, Speziale C G. On explicit algebraic models for complex turbulent flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, **254**: 59-78.
- [7] Jongen T, Mompean G, Gatski T B. Accounting for Reynolds stress and dissipation rate anisotropies in inertial and non-inertial frames[J]. *Physics of Fluids*, 1998, **10**(3): 674-684.
- [8] Nagano Y, Hattori H. An improved turbulence model for rotating shear flows[J]. *Journal of Turbulence*, 2002, **3**(6): 1-14.
- [9] Nagano Y, Hattori H. Direct numerical simulation and modelling of spanwise rotating channel flow with heat transfer[J]. *Journal of Turbulence*, 2003, **4**(10): 1-15.
- [10] Yoshizawa A, Nisizima S, Shimomura Y, et al. A new methodology for Reynolds averaged modeling

- based on the amalgamation of heuristic modeling and turbulence theory methods[J]. *Physics of Fluids*, 2006, **18**(3), 035109. DOI: 10.1063/1.2186669.
- [11] Chou P Y. On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent motion[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1945, **3**: 38-54.
- [12] Huang Y N, Ma H Y. Reynolds stress model involving the mean spin tensor[J]. *Physical Review E*, 2004, **70**(5): 036302.
- [13] Tavoularis S, Corsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform temperature gradient Parts 1 and 2[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, **104**: 311-367.
- [14] Craft T J, Launder B E, Suga K. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1996, **17**(2): 108-115.
- [15] Shih T H, Zhu J, Liou W, et al. Modeling of turbulent swirling flows[A]. In: *Proceedings of 11th Symposium on Turbulent Shear Flows*[C]. Grenoble, France, 1997, 31. 1-31. 6.
- [16] Bardina J, Ferziger J H, Reynolds W C. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows[R]. Tech. Report TF-19, Stanford, California: Stanford University, 1983.
- [17] Truesdell C, Noll W. The non-linear field theories of mechanics[A]. In: *Flügge S, Truesdell C, Eds. Handbuch der Physik*[C]. vol III/3. Berlin: Springer-Verlag 1965.
- [18] Huang Y N, Durst F. Reynolds stress under a change of frame of reference[J]. *Physical Review E*, 2001, **63**(5): 056305.
- [19] Speziale C G. Turbulence modeling in noninertial frames of reference[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1989, **1**(1): 3-19.
- [20] Gatski T B, Wallin S. Extending the weak-equilibrium condition for algebraic Reynolds stress models to rotating and curved flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, **518**: 147-155.
- [21] Speziale C G, Mac Giolla Mhuiris N. On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1989, **209**: 591-615.
- [22] Speziale C G, Sarkar S, Gatski T B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, **227**: 245-272.
- [23] Pope S B. A more general effective-viscosity hypothesis[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, **72**: 331-340.
- [24] Huang Y N. A note on the “principle of material frame-indifference in the limit of two-dimensional turbulence” [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, **11**(1): 854-860.
- [25] Lumley J L. Turbulence modeling[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, **50**: 1097-1103.
- [26] Huang Y N. On modelling the Reynolds stress in the context of continuum mechanics[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, **9**(5): 543-559.
- [27] Huang Y N, Ma H Y, Chu H J. Modelling turbulent swirling flows based on the approach of two-equation $k-\varepsilon$ approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, **51**(3): 285-304.

The Extended Intrinsic Mean Spin Tensor for Turbulence Modelling in a Non-Inertial Frame of Reference

HUANG Y_u ning¹, MA Hui-yang²

(1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems,
Peking University, Beijing 100871, P. R. China;

2. Department of Physics, Graduate University of the Chinese
Academy of Sciences, Beijing 100049, P. R. China)

Abstract: The role of the extended intrinsic mean spin tensor introduced for turbulence modelling in a non-inertial frame of reference which is described by the Euclidean group of transformations and, in particular, its significance and importance in the approach of the algebraic Reynolds stress modelling, such as in a nonlinear K-epsilon model is investigated. To this end and for illustration of the effect of the extended intrinsic spin tensor on turbulence modelling, several recently developed nonlinear K-epsilon models were examined and their performance in predicting the homogeneous turbulent shear flow in a rotating frame of reference with the LES data was compared. The results and analysis indicate that only if the deficiencies of these models and the like be well understood in detail and be properly corrected, may in the near future more sophisticated nonlinear K-epsilon models be developed to better predict the complex turbulent flows in a non-inertial frame of reference.

Key words: turbulence modelling; non-inertial frame of reference; extended intrinsic mean spin tensor; frame-dependent; algebraic Reynolds stress model