

# 基于 ENO 格式的三阶修正系数格式<sup>\*</sup>

李明军, 杨玉月, 舒适

(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

(郭兴明推荐)

摘要: 不增加基点, 仅摄动二阶 ENO 格式的系数(简记为 MCENO), 得到一类求解双曲型守恒律方程的三阶 MCENO 格式. 由 MCENO 格式的构造过程可以看出, MCENO 格式保留了 ENO 格式的许多性质, 例如本质无振荡性、TVB 性质等, 且能提高一阶精度. 进一步, 利用 MCENO 格式模拟二维 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性及 Lax 激波管的数值求解问题. 数值结果表明,  $t = 2.0$  时, MCENO 格式的密度曲线处于三阶 WENO 格式和五阶 WENO 格式之间, 是一个高效高精度格式. 值得注意的是, 三阶 MCENO 格式, 三阶 WENO 格式和五阶 WENO 格式的 CPU 时间之比为 0.62: 1: 2.19. 表明相对于原始 ENO 格式, MCENO 格式在光滑区域有较高精度, 能提高格式精度.

关键词: ENO 格式; 修正系数格式; Lax 激波管; Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性

中图分类号: O351; O175 文献标识码: A

## 引 言

ENO (essentially non-oscillatory) 格式出现在 Harten 等人 1987 年的经典文献中<sup>[1]</sup>. 众所周知, ENO 方法是一类一致高精度且能达到在逐段光滑区构造本质无振荡函数的数值方法(见文献[1]). ENO 格式非常适合解激波问题和复杂光滑解问题, 具有 TVD (或 TVB) 性质, 有极小的数值耗散, 可以对一大类界面追踪问题给出非常满意的数值结果. 然而, 二阶 ENO 格式在一维问题就需要 5 个基点(见文献[2]). Liu 利用加权的思想, 用模板的凸组合代替 ENO 格式原来的模板, 得到加权 ENO (WENO) 格式. 相对于只需要 3 个模板点的一阶迎风格式, 二阶 ENO 格式和 WENO 格式需要 5 个模板点(见文献[3-6]).

利用微分方程本身的性质, 高智得到了摄动有限差分 (PFD) 方法(见文献[7-8]). 在 PFD 方法中, 既离散微商项也离散非微商项, 而微商项可用二阶迎风差分与中心差分格式逼近. 最近, 和 PHD 方法的思想相似, 高智等利用一阶迎风格式作为基本格式, 针对对流扩散方程提出了摄动有限体积法 (PFV) (见文献[8-9]). 下面的工作主要是对 ENO 格式的系数进行摄动, 从而构造三阶精度修正系数 (MCENO) 格式, 该工作是对 PFD 理论的一个扩充(见文献[2]). 修正系数格式的构造过程可以看出, 修正系数格式保留了 ENO 格式的许多性质, 例如本质无振

\* 收稿日期: 2007-10-30; 修订日期: 2008-08-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10676031; 50675185); 教育部博士点基金资助项目 (20070530003); 教育部和湖南省教育厅联合支持重点基金资助项目 (208093; 07A068)

作者简介: 李明军 (1968-), 男, 湖南人, 教授, 博士 (E-mail: limingjun@xtu.edu.cn);

杨玉月, 副教授, 博士 (联系人. Tel: + 86-732-2377837; E-mail: yyy@xtu.edu.cn).

荡性、TVB 性质等,且能提高一阶精度.进一步,利用修正系数格式模拟二维 Rayleigh Taylor (RT) 不稳定性和激波管的数值求解问题<sup>[10]</sup>.

## 1 双曲型守恒律方程的二阶精度 ENO 格式

本节对于文献[2]中得到的 ENO-LLF 格式(简称为 ENO 格式)作一个介绍.对于双曲型守恒律方程,有如下逼近形式:

$$U_t + \sum_{i=1}^d f_i(U)_{x_i} = 0 \text{ (或者 } g(x, U, t), \text{ 源项)}, \quad (1)$$

$$U(x, 0) = U^0(x), \quad (2)$$

其中,  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ . 设计算网格为  $x_k = k \cdot \Delta x$ ,  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $U_k^n$  表示(1)式的精确解  $U(x_k, t_n)$  的一个计算近似解.

记  $J_i(U) = (f_i'(U))$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) 为 Jacobi 矩阵, 假设双曲型守恒律方程(1)是严格双曲型的(即, 对任意  $U$ ,  $J_i(U)$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) 的特征值均为不相同的实根). 一般地, 仅需要计算绝对值最大的特征值, 而不需要计算所有的左、右特征值(见文献[2]). 当  $d = 2$  时, 可记

$$F(U) = f_1(U), \quad G(U) = f_2(U), \quad F_x(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial x}, \quad G_y(U) = \frac{\partial G(U)}{\partial y},$$

$$F'(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}, \quad G'(U) = \frac{\partial G(U)}{\partial U}.$$

为了简单起见, 从一维问题开始考虑. 对于二维双曲型系统(1)和(2), 利用维数分裂法处理.

为了获得双曲型系统(1)和(2)的二阶精度格式, 记

$$F^+(U) = \frac{F(U) + \alpha U}{2}, \quad F^-(U) = \frac{F(U) - \alpha U}{2}, \quad (3)$$

其中,  $\alpha = \max\{|\lambda_1|: F'(U) \text{ 的绝对值最大的特征值}\}$ . 本文中, 仅考虑如下  $F_x(U)$  的特征值:  $\alpha = \alpha_{+1/2}$  为常数, 也就是说,  $\alpha = \alpha_{+1/2} = \alpha_{-1/2}$ . 二阶 ENO-LLF 通量定义为

$$\begin{aligned} \hat{F}_{j+1/2}^{\text{LLF},2} = & \frac{1}{2}(F(U_{j+1}) + F(U_j) - \alpha(U_{j+1} - U_j)) + \\ & \frac{1}{4}m[\Delta_+ F(U_j) + \alpha \Delta_+ U_j, \Delta_- F(U_j) + \alpha \Delta_- U_j] - \\ & \frac{1}{4}m[\Delta_+ F(U_{j+1}) - \alpha \Delta_+ U_{j+1}, \Delta_- F(U_{j+1}) - \alpha \Delta_- U_{j+1}], \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\Delta_{\pm} U_j = \pm(U_{j\pm 1} - U_j)$

和 
$$m(x, y) = \begin{cases} x, & \text{若 } |x| \leq |y|, \\ y, & \text{否则.} \end{cases}$$

下面总是采用如下守恒形式:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda_1(\hat{F}(U)_{j+1/2}^{\text{LLF},2} - \hat{F}(U)_{j-1/2}^{\text{LLF},2}) - \lambda_2(\hat{G}(U)_{j+1/2}^{\text{LLF},2} - \hat{G}(U)_{j-1/2}^{\text{LLF},2}),$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

对于一维守恒型格式, 仅考虑(4)式中  $x$ -方向的作用而忽略  $y$ -方向的所有项.

## 2 基于二阶 ENO 格式的三阶 MCENO 格式

下面, 我们利用二阶 ENO 格式构造具有 TVD 性质的三阶 MCENO 格式. 对于标准二阶

ENO-LLF 通量(4), 记

$$m_{1j} = \Delta_+ F(U_j) + \alpha \Delta_+ U_j, \quad m_{2j} = \Delta_- F(U_j) + \alpha \Delta_- U_j,$$

$$m_{3j} = \Delta_+ F(U_{j+1}) - \alpha \Delta_+ U_{j+1}, \quad m_{4j} = \Delta_- F(U_{j+1}) - \alpha \Delta_- U_{j+1}.$$

情况 1  $|m_{1j}| \leq |m_{2j}|, |m_{3j}| \leq |m_{4j}|, |m_{1(j-1)}| \leq |m_{2(j-1)}|, |m_{3(j-1)}| \leq |m_{4(j-1)}|$  (简记为  $\leq \leq \leq$ , 称为比较符号), 于是有

$$\hat{F}(U)_{j+1/2}^{LLF,2} - \hat{F}(U)_{j-1/2}^{LLF,2} = \frac{\partial F(U)}{\partial x} \Delta x - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 F(U)}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{4} \alpha \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Delta x^3 + o(\Delta x^4). \quad (5)$$

注意到, 要获得基于二阶 ENO 格式的三阶 MCENO 格式, 需要考虑(5)式中,  $F_{xx}(U)$ 、 $F_{xxx}(U)$ 、 $U_{xx}$  和  $U_{xxx}$  前面的系数(0, -1/12, 0,  $\alpha/4$ ), 我们称之为摄动系数. 情形 1~16 的所有摄动系数对应地列于表 1, 比较符号和系数的对应关系的详细说明略去.

表 1 基于 ENO 格式的 MCENO 格式的摄动系数 ( $k = 1/12$ )

情形	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$F_{xx}$	0	0	0	0	3k	-3k	0	-3k	-6k	-3k	3k	6k	3k	0	-3k	3k
$F_{xxx}$	-k	-4k	2k	-k	-4k	-k	-4k	-k	-k	-4k	2k	-k	-k	2k	2k	-k
$U_{xx}$	0	0	0	0	3k	3k	6k	-3k	0	3k	-3k	0	3k	-6k	-3k	-3k
$U_{xxx}$	3k	0	0	-3k	0	3k	0	3k	3k	0	0	-3k	-3k	0	0	-3k

注 表 1 中关于  $U_{xx}$  和  $U_{xxx}$  的系数需要乘  $\alpha$ .

从而, ENO 格式(5)的修正二阶偏微分方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial F(U)}{\partial x} - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 F(U)}{\partial x^3} \Delta x^2 + \frac{1}{4} \alpha \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Delta x^2 \right] - \left[ \frac{\partial G(U)}{\partial y} - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 G(U)}{\partial y^3} \Delta y^2 + \frac{1}{4} \beta \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \Delta y^2 \right] + o(\Delta x^3, \Delta y^3). \quad (6)$$

对于我们将要得到的 MCENO 格式的修正偏微分方程, 假设  $F_x(U)$  的系数为  $a$ , 将  $a$  展开为  $\Delta x$  的幂级数

$$a = I + a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2 + o(\Delta x^3), \quad (7)$$

其中,  $a_1$  和  $a_2$  为  $4 \times 4$  待定系数矩阵. 若将关系式(7)代入修正偏微分方程(6), 而且  $F_x(U)$  和  $G_y(U)$  按照 ENO 格式的空间形式展开, 则可以得到如下新的修正差分格式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{1}{\Delta x} (I + a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2) (\hat{F}(U)_{j+1/2}^{LLF,2} - \hat{F}(U)_{j-1/2}^{LLF,2}) - \frac{1}{\Delta y} (I + b_1 \Delta y + b_2 \Delta y^2) (\hat{G}(U)_{j+1/2}^{LLF,2} - \hat{G}(U)_{j-1/2}^{LLF,2}). \quad (8)$$

比较修正差分格式(8)与差分格式(4), 如果满足如下假设:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \left[ \frac{1}{12} \frac{\partial^3 F(U)}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] A(F),$$

其中

$$A(F) = \begin{cases} \frac{\partial F(U)^{-1}}{\partial x}, & \text{若 } \frac{\partial F(U)}{\partial x} \neq 0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

那么, 对于情况 1, 得到双曲型守恒系统(1)的三阶精度格式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{1}{\Delta x} \left[ I + \left[ \frac{1}{12} \frac{\partial^3 F(U)}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] A(F) \Delta x^2 \right] (\hat{F}(U)_{j+1/2}^{LLF,2} - \hat{F}(U)_{j-1/2}^{LLF,2}) -$$

$$\frac{1}{\Delta y} \left[ \mathbf{I} + \left( \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^3} \right) \mathbf{A}(\mathbf{G}) \Delta y^2 \right] (\hat{G}(\mathbf{U})_{j+1/2}^{\text{LLE},2} - \hat{G}(\mathbf{U})_{j-1/2}^{\text{LLE},2}), \quad (9)$$

这里,称

$$\mathbf{I} + \left( \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^3} \right) \mathbf{A}(\mathbf{F}) \Delta x^2, \quad \mathbf{I} + \left( \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^3} \right) \mathbf{A}(\mathbf{G}) \Delta y^2 \quad (10)$$

为格式(9)的摄动系数. 类似地,可以求出另外 15 种情况下的摄动系数.  $x$ - 方向的所有摄动因子如表 1. 比较原来的 ENO 格式、MCENO 格式二阶格式基础上按照物理意义乘上了摄动系数.

如果将情形 1~ 16 的摄动因子具体地代入格式(9),就可得到  $x$ - 方向具有 3 阶精度的差分格式(与 ENO 类似,在极值点处只有 1 阶). 如果需要考虑  $y$ - 方向具有 3 阶精度的 MCENO 格式,只需要对 ENO 格式中关于  $G_y(\mathbf{U})$  进行摄动得到相应的摄动因子,具体过程留给读者,并将所有数值结果安排在第 3 节.

引理 2.1 若 ENO 格式具有 TVB 性质,那么基于 ENO 格式得到的 MCEN 格式也具有 TVB 性质.

为了便于数值实现,对于数值通量,所有格式采用自适应模板,时间离散采用 TVD Runge-Kutta 法. 对于空间离散,采用如下逼近:

$$\frac{\hat{F}(\mathbf{U})_{j+1/2}^{\text{LLE},2} - \hat{F}(\mathbf{U})_{j-1/2}^{\text{LLE},2}}{\Delta x} + \frac{\hat{G}(\mathbf{U})_{j+1/2}^{\text{LLE},2} - \hat{G}(\mathbf{U})_{j-1/2}^{\text{LLE},2}}{\Delta y} = -L_{\Delta}(\mathbf{U}).$$

具体地,在时间离散中,采用如下经典二阶 TVD-RK 法(即经典 Heun 法):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}^j - \Delta t \cdot L_{\Delta}(\mathbf{U}^j) + \Delta t \cdot \mathbf{g}(\mathbf{U}^j, x, t_n), \\ \mathbf{U}^{* *} &= \mathbf{U}^* - \Delta t \cdot L_{\Delta}(\mathbf{U}^*) + \Delta t \cdot \mathbf{g}(\mathbf{U}^*, x, t_{n+1}), \\ \mathbf{U}^{j+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^j + \mathbf{U}^{* *}). \end{aligned}$$

### 3 数值算例

例 1 Lax 激波管问题<sup>[10-11]</sup>

Lax 激波管问题由向量形式的守恒方程表示

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

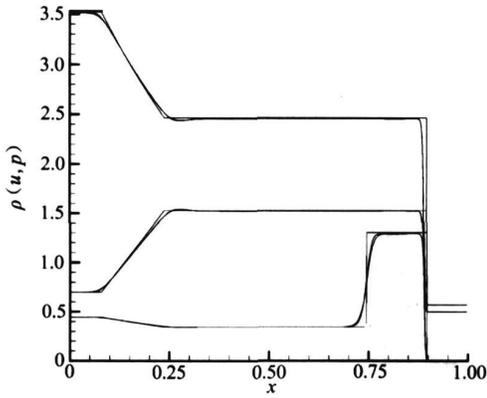
这里,  $\rho, u, p, E, \gamma = 1.4$  分别为流体的密度、流体速度、压强、单位体积的总能和绝热指数. 初始条件为

$$\begin{aligned} (\rho_l, u_l, p_l) &= (0.445, 0.695, 3.528), \\ (\rho_r, u_r, p_r) &= (0.5, 0.0, 0.571). \end{aligned}$$

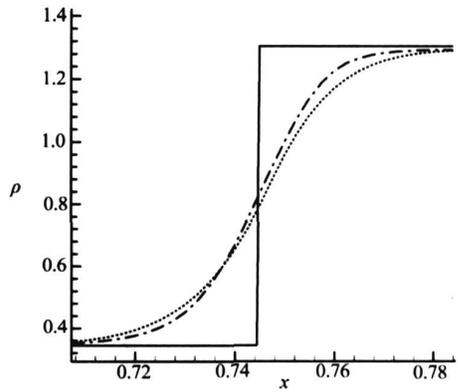
对上述方程使用 MCENO 格式和 ENO 格式求解,其网格点  $N = 400$ .  $t_0 = 0.6$  表示计算的总物理时间,  $c = 0.5$  表示 CFL 条件,时间离散用 TVD Runge-Kutta 法. 参考解  $u$  利用  $N = 8000$  给出.

由图 1 的局部放大图(图 1(b)~ 图 1(d))可以看出,在激波管的间断处的密度、速度和压力,MCENO 格式计算得到的数值比 ENO 格式得到的数值接近参考值. MCENO 格式的思想来源于中国科学院力学研究所高智的“摄动有限差分方法”(见文献[7]),这是一种物理格式,而

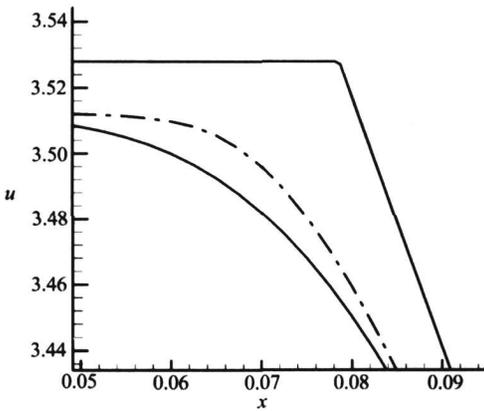
不是通常单纯利用数学处理获得的数值耗散高阶格式. 从我们的激波管问题数值模拟结果看出, 与 ENO 方法的结果比较, 没有增加更大的数值耗散效应. 或许, 这是物理格式与数学格式的本质差异之一.



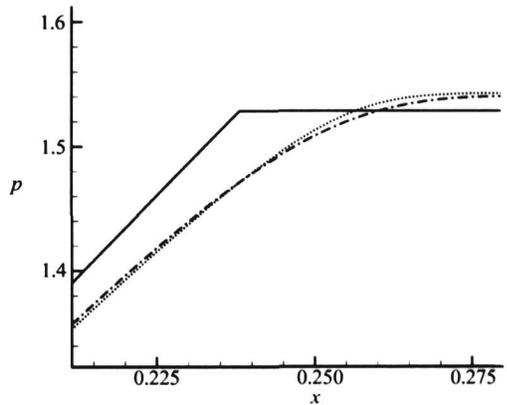
(a) 由 ENO 格式和 MCENO 格式获得的密度、速度和压力的数值解与精确解比较



(b) 密度的局部变化



(c) 速度的局部变化



(d) 压力的局部变化

图 1 Lax 激波管问题(网格数为 400, 计算时间为  $t = 0.6$ )

例 2 密度比 1:3 的 Rayleigh-Taylor 不稳定性的数值模拟

由于密度不同而得到的 Rayleigh-Taylor 不稳定性的数值模拟中, 高密度比问题变得非常困难和重要从而得到广泛研究<sup>[10-11]</sup>.

当  $k = 4, d = 2$  时, 设守恒系统(1)、(2) 中  $F(U) = f_1(U)$  和  $G(U) = f_2(U)$  如下:

$$\begin{cases} U = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T, \\ F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, u(E + p))^T = \\ \quad (u_2, u_2^2 u_1^{-1} + \gamma^*, u_2 u_3 u_1^{-1}, u_2 u_1^{-1}(u_4 + \gamma^*))^T, \\ G(U) = (\rho v, \rho v^2 + p, \rho u v, v(E + p))^T = \\ \quad (u_3, u_2 u_3 u_1^{-1}, u_3^2 u_1^{-1} + \gamma^*, u_3 u_1^{-1}(u_4 + \gamma^*))^T, \\ g = (0, -\rho G, 0, -\rho G u)^T, \end{cases}$$

其中,  $\gamma^* = (\gamma - 1)(u_4 - 2u_1(u_2^2 + u_3^2)^{-1}), p = (\gamma - 1)(E - \rho(u^2 + v^2)/2)$ . 那么, 双曲型

守恒系统(1)和(2)的一阶Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J_F \frac{\partial U}{\partial x} + J_G \frac{\partial U}{\partial y} = g,$$

其中,  $J_F$  和  $J_G$  为 Jacobi 矩阵, 热传导率  $\gamma = 10$ , 无量纲重力加速度  $G = 40$ .

运动界面为  $x = L/2 + A \cos(4\pi y/\lambda)$ , 其中  $L = |OA| = 100$ ,  $\lambda = |OB| = 20$ ,  $A = 1.0^{[10]}$ . 初始条件定义如下:

$$U(0, x, y) = \begin{cases} \left\{ \left( 1, 0, 0, \frac{p(0, x, y)}{\gamma - 1} \right) \right\}, & (x, y) \in D_1, \\ \left\{ \left( 3, 0, 0, \frac{p(0, x, y)}{\gamma - 1} \right) \right\}, & (x, y) \in D_2. \end{cases} \tag{12}$$

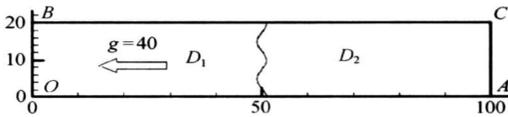
边界条件定义如下:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\Gamma_{OB}) = 0, \frac{\partial v}{\partial n}(\Gamma_{OA}) = 0, \frac{\partial v}{\partial n}(\Gamma_{BC}) = 0, \tag{13}$$

右边界  $\Gamma_{AC}$  为自由边界(即右边界为外流边界), 左边界  $\Gamma_{OB}$ , 上边界  $\Gamma_{BC}$  和下边界  $\Gamma_{OA}$  均为固壁边界. 关于压力  $p$  的初始条件如下:

$$p_{AC} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)gL}{2}, \tag{14}$$

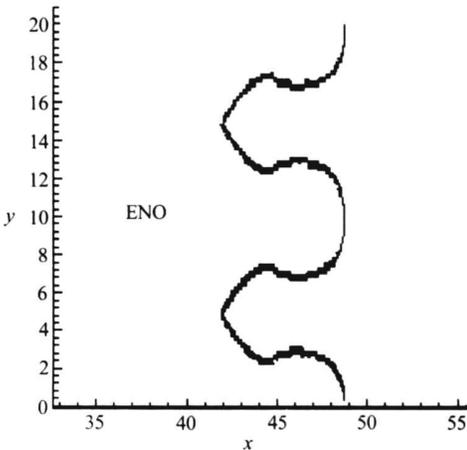
$$p(0, x, y) = \begin{cases} p_{AC} + (L - x_s)\rho_2g + (x_s - x)\rho_1g, & (x, y) \in D_1, \\ p_{AC} + (L - x)\rho_2g, & (x, y) \in D_2, \end{cases} \tag{15}$$



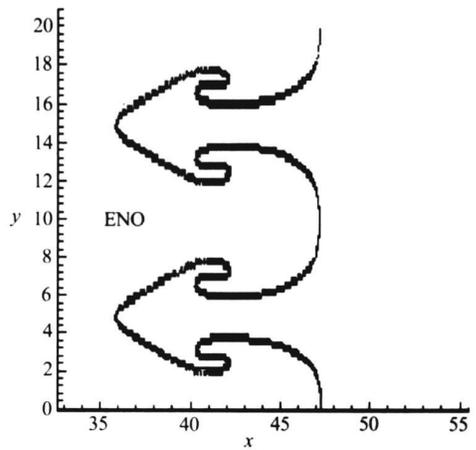
其中,  $(x_s, y) \in \Gamma_s$ ,  $\Gamma_s$  为界面曲线. 在我们的数值算例中, 使用  $500 \times 100$  个网格点, 且采用均匀网格自由跟踪界面曲线.

图2 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的计算区域 = 1.0 及  $t = 1.5$  时, 利用 MCENO 格式进行界面追踪

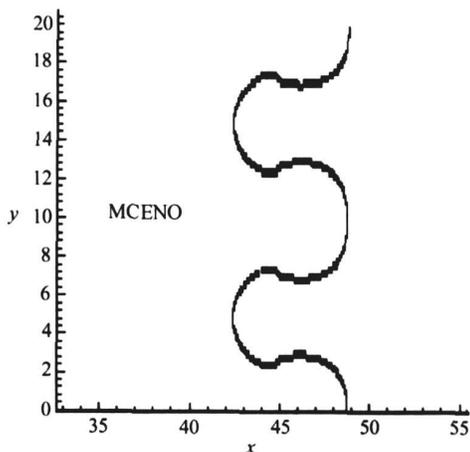
得到的界面曲线, 比利用 ENO 格式进行界面追踪所得到的界面曲线更符合物理问题实际, 用 MCENO 格式进行界面追踪的稳定性也明显要好. 另一方面, 两种格式的质量守恒都很好.



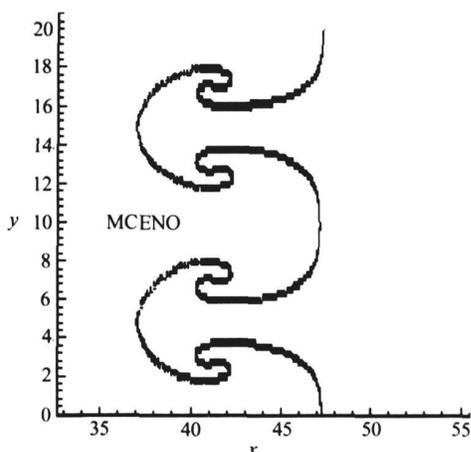
(a)  $t = 1.0$



(b)  $t = 1.5$



(c)  $t = 1.0$



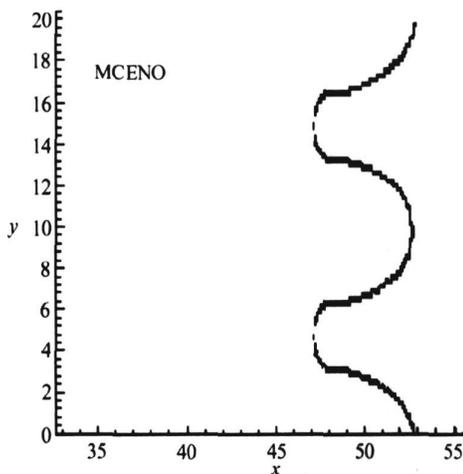
(d)  $t = 1.5$

图 3 密度比为 1:3 的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

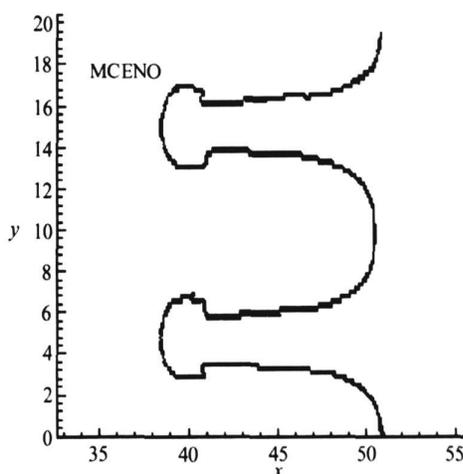
例 3 密度比 1:100 的 Rayleigh-Taylor 不稳定性的数值模拟

对具有不同密度引起的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题, 高密度比问题一直是被广泛研究的一类重要问题<sup>[11]</sup>. 本例中, 除了密度改变为  $\rho = 100$  外, 其它条件与例 2 相同.

从图 4 可以看出, 当总的物理时间分别为  $t = 0.5$  及  $t = 1.0$  时, 和例 2 一样, 利用 MCENO 格式进行界面追踪得到的界面曲线, 比利用 ENO 格式进行界面追踪所得到的界面曲线更符合物理问题实际, 用 MCENO 格式进行界面追踪的稳定性也明显要好. 为了比较格式的守恒性, 取物理时间在  $t = 0.6 \sim 1.5$  的总质量. 特别地, 由表 2 所示, 质量(-0.18)是 1000-0.18 的简写. 根据表 2, 当密度比为 1:3 时, ENO 格式和 MCENO 格式的质量守恒性都保持得很好. 然而, 当密度比为 1:100 时, 在物理时间段  $t = 0.9 \sim 1.2$ , 利用 MCENO 格式进行界面追踪的质量守恒性比利用 ENO 格式要好一些. 总的来说, ENO 格式和 MCENO 格式的质量守恒性都保持得较好.



(a)  $t = 0.5$



(b)  $t = 1.0$

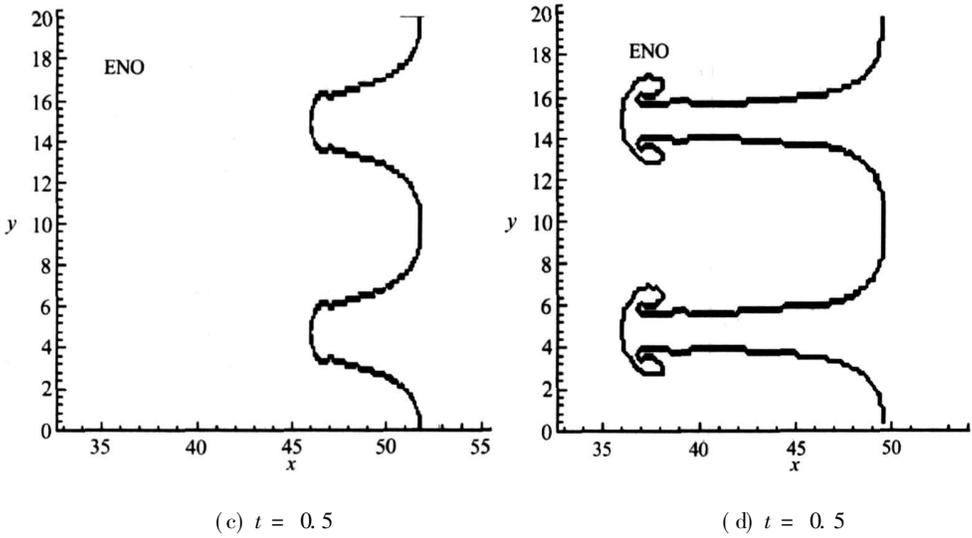


图4 密度比为 1:100 的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

表2 质量守恒性比较

计算格式	时间 $t$									
	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
ENO(I:3)	(-0.18)	(-0.13)	(-0.48)	(-0.03)	(-0.04)	(-0.12)	(-0.18)	(-0.19)	(-0.74)	(-0.32)
MCENO(I:3)	(-0.27)	(-0.14)	(-0.62)	(-0.02)	(-0.44)	(-0.51)	(-0.58)	(-0.30)	(-0.70)	(-0.95)
ENO(I:100)	0.45	0.67	0.38	0.33	0.52	0.43	1.61	1.67	3.03	5.03
MCENO(I:100)	0.48	0.54	0.47	0.25	0.73	0.43	0.80	1.85	2.64	6.30

表3 密度等值线和 CPU 时间((a) MCENO, (b) 3-WENO, (c) 5-WENO 格式)

格式	$t$	$\Delta t$	$T$	CPU 时间 $t_p/s$	$\rho = 1.5$	
					$X_l$	$X_r$
(a)	0.5	$8.2149 \times 10^{-4}$	548	260 161	0.485	0.523
	1.0	$8.1487 \times 10^{-4}$	1 219	577 484	0.440	0.581
	1.5	$7.9464 \times 10^{-4}$	1 836	870 828	0.379	0.666
	2.0	$6.8489 \times 10^{-4}$	2 511	1 202 716	0.306	0.763
(b)	0.5	$8.2866 \times 10^{-4}$	605	461 409	0.481	0.524
	1.0	$8.2847 \times 10^{-4}$	1 208	931 508	0.443	0.571
	1.5	$7.9273 \times 10^{-4}$	1 818	1 404 779	0.385	0.646
	2.0	$7.2161 \times 10^{-4}$	2 484	1 926 580	0.333 4	0.709
(c)	0.5	$8.2484 \times 10^{-4}$	607	1 014 741	0.478 3	0.527 2
	1.0	$8.2444 \times 10^{-4}$	1 213	2 032 779	0.428 4	0.586 1
	1.5	$7.8865 \times 10^{-4}$	1 826	3 059 779	0.358 5	0.672
	2.0	$6.7258 \times 10^{-4}$	2 513	4 216 486	0.274 7	0.764 7

例4 三阶 WENO 和五阶 WENO 格式的数值分析

下面考虑密度比为 1:3 的 RT 不稳定问题中三阶 MCENO, 三阶 WENO 和五阶 WENO 格式的数值分析. 图5可以看出, 密度线随时间而变化. 容易看出,  $t = 2.0$  时, 三阶 MCENO 的密

度线大致轮廓位于三阶 WENO 和五阶 WENO 格式之间. 从表 3(a) ~ 3(c) 可知, 除了  $t = 0.5$ , 三阶 MCENO 的密度线大致轮廓位于三阶 WENO 和五阶 WENO 格式之间, CPU 时间之比为 0.62 : 1 : 2.19. 因此, MCENO 是一个高精度而且使用 CPU 较少的格式.

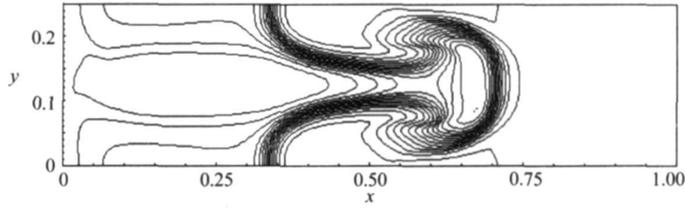
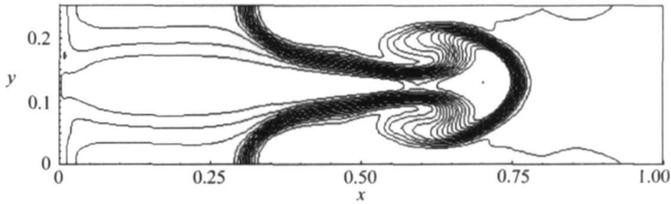
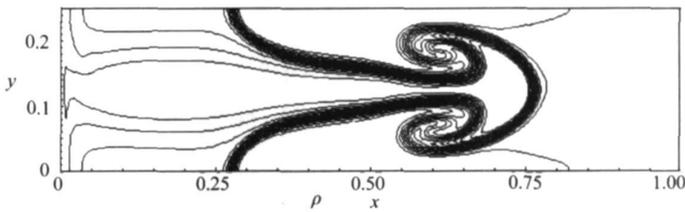
(a)  $t = 2$ , 三阶 WENO(b)  $t = 2$ , 三阶 MCENO(c)  $t = 2$ , 五阶 WENO

图 5 利用三阶 MCENO 格式, 三阶 WENO 格式和五阶 WENO 格式求解密度比为 1:3 的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

## 4 结 论

不增加基点, 仅摄动二阶 ENO 格式的系数, 得到一类求解双曲型守恒律方程的三阶修正系数 ENO 格式. 修正系数格式保留了 ENO 格式的许多性质, 该类格式在捕捉界面表现出很好的数值效果. 模拟二维 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性时表现很好的数值稳定性和质量守恒性. 值得注意的是, MCENO 格式、ENO 格式和五阶 WENO 格式的 CPU 时间之比为 0.62 : 1 : 2.19. 总的来说, ENO 格式和 MCENO 格式的质量守恒性都保持得较好.

致谢 感谢北京应用物理与计算数学研究所叶文华教授对例 1 和例 3 提供模型和参数. 中国科学院力学研究所高智研究员、美国加利福尼亚 Santa Barbara 大学刘旭东博士和湘潭大学肖爱国教授在本文完成过程中与作者进行了有意义的讨论, 特此一并表示感谢. 算例 2 是审稿人建议下完成的, 在此表示感谢.

## [参 考 文 献]

- [1] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory

- schemes III[J]. *J. Comput Phys*, 1987, **71**: 231-303; ICASE Report No 86-22, April 1986.
- [2] Liu X-D, Osher S. Convex ENO high order multi-dimensional schemes without field by field decomposition or staggered grids[J]. *J. Comput Phys*, 1998, **142**(2): 304-330.
- [3] Liu X-D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *J. Comput Phys*, 1994, **115**(1): 200-212.
- [4] Shu C-W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *J. Comput Phys*, 1988, **77**(2): 439-471.
- [5] Shu C-W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II [J]. *J. Comput Phys*, 1989, **83**(1): 32-78.
- [6] Jiang G-S, Shu C-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *J. Comput Phys*, 1996, **126**: 202-228.
- [7] 高智. 摄动有限研究进展[J]. *力学进展*, 2000, **30**(2): 200-215.
- [8] Gao Z, YANG G W. Perturbation finite volume method for convective-diffusion integral equation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **20**(6): 580-590.
- [9] 高智, 柏威. 对流扩散方程的摄动有限体积(PFV)方法及讨论[J]. *力学学报*, 2004, **36**(1): 88-93.
- [10] Glimm J, Grove J, Li X, et al. The dynamics of bubble growth for Rayleigh-Taylor unstable interface [J]. *Physics of Fluids*, 1988, **31**: 447-465.
- [11] Xu Z F, Shu C W. Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes[J]. *J. Comput Phys*, 2005, **205**(2): 458-485.

## Third-Order Modified Coefficient Scheme Based on the Essentially Non-Oscillatory Scheme

LI Ming-jun, YANG Yu-yue, SHU Shi

(School of Mathematics and Computational Science,  
Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China)

**Abstract:** A third-order numerical scheme was presented for approximating solutions of multi-dimensional hyperbolic conservation laws only using the modified coefficients of essentially non-oscillatory (MCENO) scheme without increasing the base points during the construction of the scheme. The construction process of scheme shows that the modified coefficient approach preserves the favourable properties inherent in the original essentially non-oscillatory (ENO) scheme for its essentially non-oscillation, total variation bounded (TVB) etc. The new scheme improves the accuracy by one order compared to the original one. Furthermore, the MCENO scheme was applied to simulate two-dimensional Rayleigh-Taylor (RT) instability with densities 1:3 and 1:100 and solve the Lax shock-wave tube numerically. It is also noted that the ratio of CPU times used implementing the MCENO, the third-order ENO and fifth-order weighed ENO (WENO) schemes is 0.62:1:2.19. These indicate that the MCENO scheme improves the accuracy in smooth regions and has higher accuracy and better efficiency compared with the original ENO scheme.

**Key words:** essentially non-oscillatory scheme; modified coefficient scheme; the Lax shock-wave tube; Rayleigh-Taylor instability