

电磁力控制下圆柱绕流的涡度拟能*

张 辉, 范宝春, 陈志华

(南京理工大学 瞬态物理实验室, 南京 210094)

(周哲玮推荐)

摘要: Okubo-Weiss 函数与流元的容变、畸变以及涡量相关, 可以用来评估流场的涡结构. 经该文本学证明, 对于边界无滑移的, 低 Reynolds 数的二维不可压缩流动, Okubo-Weiss 函数的全流场积分为 0. 还以电磁控制的圆柱绕流为例, 通过数值计算, 对该结论进行了验证. 根据计算结果, 依据 Okubo-Weiss 函数值, 对流场进行了划分, 讨论了总涡度拟能、总变形率和 Okubo-Weiss 函数在流场中的分布规律, 以及电磁力对分布的影响.

关键词: 涡度拟能; 变形率; 圆柱绕流; 电磁力

中图分类号: O361 文献标识码: A

引 言

表征流体元旋转角速度的物理量称为涡量, 涡量高度集聚的流体区域就是涡, 涡是流体运动特有的存在形式. 一个流体元与周围流体或固体的相互作用总可以分解为两种基本过程. 一种是沿流体元表面法向的胀压过程, 它的结果是引起流体元的压缩和膨胀; 另一种是沿流体元表面切向的剪切过程, 它的结果是流体元的旋转, 即通过粘性搓出涡量. 这两种过程总是共存于流体运动之中, 而且相互耦合.

湍流中存在的旋涡串级是指大涡因拉伸破碎为小涡, 能量也因此在此旋涡中传递的现象. 对于钝体绕流, 二维层流的情况下, 源自钝体表面的小涡脱体后, 逐渐发展为大涡, 并形成由大涡组成的尾流涡街^[1]. 因此, 上述两种流动, 流场中的涡具有相反的变化过程^[2].

旋涡的周围, 一般存在大的剪切变形, 而大的变形区周围, 又常存在小尺度的旋涡^[3]. 为了描述流场的涡结构, 引进涡度拟能和变形率两个物理量, 前者描述流体的旋转, 后者描述流体的变形. 可以利用涡的结构对流场的区域进行划分, Okubo^[4]和 Weiss^[5]引进 Okubo-Weiss 函数 q , 用以判断流场中涡的结构特征, 它是平方变形率与涡度拟能的差. 从而为划分流场的区域提供一个简便方法. 该函数 q 定义为平方变形率与涡度拟能的差, 当 $q < 0$ 时, 流场以旋转为主; 当 $q > 0$ 时, 流场以变形为主. 显然, 在涡核附近, q 值为负, 涡的边缘, q 值为正^[6,7]. Jeong 和 Hussain^[8]利用 Okubo-Weiss 函数来划分流场的特征区域, 并鉴别流场中的涡结构. Zavala Sansonⁿ证明了在直角坐标中, 边界无滑移的条件下, 涡度拟能和变形率的守恒关系; 滑

* 收稿日期: 2007-10-12; 修订日期: 2008-10-08

作者简介: 张辉(1981—), 男, 江苏徐州人, 博士生(Tel: + 86-25-84303236);

范宝春(1945—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士生导师(联系人.Tel: + 86-25-84303235; E-mail: bcfan@mail.njust.edu.cn).

移边界条件下, 全流场的总涡度拟能大于总平方变形率^[9].

本文从数学上证明了, 对于低 Reynolds 数的二维不可压缩流动, 无论固体边界的形状如何, 流场中是否存在控制流动的体积力, 只要边界上无滑移, Okubo-Weiss 函数在全流场的积分值就恒为 0, 即总涡度拟能和总变形率的值始终相等. 此外本文还以圆柱绕流及其电磁控制为例, 验证了上述结论.

通过电磁力来控制钝体绕流, 具有抑制流体分离, 消涡、减阻、抑制振荡和降噪的功能, 具有实际应用价值, 已经引起广泛关注. 早在 20 世纪中叶, Gailitis 等^[10]设计了一种由条状电极和磁极交错布置的电磁场激活板, 利用其在弱电解质溶液中产生的 Lorentz 力来改变流体边界层的结构. Weier 等^[11]对包覆此类激活板的圆柱绕流进行了实验和数值模拟. Kim 等^[12]讨论和分析了电磁场激活板包覆范围对减阻的影响. Posdziech 等^[13]讨论了不同 Reynolds 数下, 电磁场激活板包覆范围对圆柱绕流减阻效果的影响. 作者^[14-17]也对不同电磁力分布情况下的圆柱尾流问题进行了实验和计算方面的研究, 结果与上述文献一致. 本文对圆柱绕流的电磁控制现象进行了数值计算. 计算结果验证了以上关于 Okubo-Weiss 函数在全流场的积分值就恒为 0, 而与流场中的体积力(电磁力)无关. 另外, 本文还讨论了流场中涡量 Ω 和 Okubo-Weiss 函数 q 的分布变化规律, 以及电磁力对流场涡结构的影响.

1 Okubo-Weiss 函数及守恒律

记二维散度 $\nabla \cdot \mathbf{u} = (\nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2)^T$, 速度 \mathbf{u} 的梯度写成

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla_1 u_1 & \nabla_2 u_1 \\ \nabla_1 u_2 & \nabla_2 u_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

于是

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1(\nabla_1 u_1) & u_2(\nabla_2 u_1) \\ u_1(\nabla_1 u_2) & u_2(\nabla_2 u_2) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

对于不可压缩流动 $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2 = 0$, 故由(2)式

$$\nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) = -2\det(\nabla \mathbf{u}) = q/2, \quad (3)$$

其中, $q = S_1^2 + S_2^2 - \Omega^2$ 称为 Okubo-Weiss 函数^[5],

$S_1 = \nabla_1 u_1 - \nabla_2 u_2$ 是与容变相关的速度变形量,

$S_2 = \nabla_2 u_1 + \nabla_1 u_2$ 是与畸变相关的速度变形量,

$\Omega = \nabla_1 u_2 - \nabla_2 u_1$ 为涡量, Ω^2 为涡度拟能.

为了进一步说明 S_1 , S_2 和 Ω 的物理意义, 参见图 1. 一个流体元与周围流体或固体的相互作用总可以分解为两种基本过程. 一种是变形, 包括线度变化和畸变, 另一种是旋转. 沿流体元表面法向的胀压过程, 即容变, 其结果是引起流体元的压缩和膨胀, 有 $\nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2$, 对于不可压缩流, 由于流体微团的体积不变, 所以 $\nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2 = 0$, 因此, 为了表示不可压缩流体微团的线度变

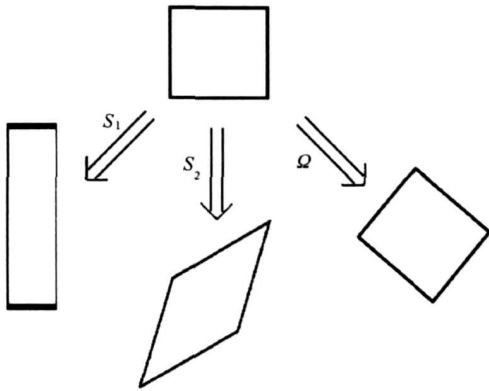


图 1 流体微团的变形与旋转

化, 令 $S_1 = \nabla_1 u_1 - \nabla_2 u_2$, 如图 1 所示; 另一种沿流体元表面切向的剪切过程, 即畸变, 可以通过角变形来体现, 令 $S_2 = \nabla_2 u_1 + \nabla_1 u_2$. S_1 和 S_2 这两种过程常常共存于流体运动之中, 相互耦

合. 流体微团的旋转用涡量 Ω 表示, $\Omega = \dot{\gamma}_1 u_2 - \dot{\gamma}_2 u_1$, 它是流体微团转动角速度的 2 倍.

因此 Okubo-Weiss 函数可以用来鉴别涡的结构, 从而为划分流场的区域提供一个简便方法.

Okubo-Weiss 函数 $q > 0$, 流场以变形为主; $q < 0$, 流场以旋转为主.

对于粘性流体, 边界 C 上 $u = 0$, 故由 (3) 式

$$\iint_S \nabla \cdot ((\nabla \cdot u) \cdot u) dA = \oint_C (\nabla \cdot u) \cdot u \cdot n dl = 0,$$

其中, n 为边界的单位法向量. 于是

$$\iint_S q dA = Q = 0, \tag{4}$$

或

$$\iint_S \Omega^2 dA = \iint_S (S_1^2 + S_2^2) dA, \tag{5}$$

该式说明, 对于二维不可压缩的粘性绕流, Okubo-Weiss 函数在全流场的积分为 0, 或涡度拟能 Ω^2 在全流场的积分等于变形量 $S_1^2 + S_2^2$ 在全流场的积分. 根据上述推导, 此守恒关系式与边界的形状无关, 与流场中是否存在力场或是否存在化学反应等也无关.

2 圆柱绕流流场及 Okubo-Weiss 函数

为了验证上述守恒关系, 本文以低 Reynolds 数情形下, 圆柱绕流及其电磁控制为例, 通过数值计算, 讨论圆柱绕流及电磁控制后的流场的 Okubo-Weiss 函数的分布, 并据此对流场进行划分和讨论.

在指数极坐标 (ξ, η) 中, 电磁力作用下, 无量纲形式的二维圆柱绕流的守恒方程为^[14]

$$H \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(U_r \Omega)}{\partial \xi} + \frac{\partial(U_\theta \Omega)}{\partial \eta} = \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right] + NH^{1/2} \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial \xi} + 2\pi F_\theta - \frac{\partial F_r}{\partial \eta} \right], \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = -H \Omega, \tag{7}$$

其中, $r = e^{2\pi\xi}$ 和 $\theta = 2\pi\eta$, (r, θ) 为极坐标.

流函数 ϕ 定义为

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = U_r = H^{1/2} u_r, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = U_\theta = H^{1/2} u_\theta.$$

涡量为

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \frac{\partial U_r}{\partial \eta} \right],$$

其中, u_r 和 u_θ 为速度 u 在 r, θ 方向的分量, $H = 4\pi^2 e^{4\pi\xi}$. $Re = 2u_\infty a / \nu$, u_∞ 为来流速度, ν 为流体动力学粘性系数, a 为圆柱半径; $N = j_0 B_0 a / (\rho u_\infty^2)$, 称为作用参数, $j_0 = \sigma E_0$, σ 为电介质的导电率, E_0 为电场强度, B_0 为磁场强度; F 为无量纲 Lorentz 力. 包覆范围内的 Lorentz 力随法向距离 r 呈指数衰减^[14], 满足

$$|F_\theta| = e^{-\alpha(r-1)}, \quad F_r = 0, \tag{8}$$

其中, α 为常数, 表示电磁场在流体中渗透强度.

考虑到粘性流体在圆柱壁面的无滑移条件, 设圆柱外, 初始流场无旋, 于是

$t = 0$ 时

$$\xi = 0 \text{ 处, } \phi = 0, \quad \Omega = -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2};$$

$$\xi > 0 \text{ 处, } \phi = -2\text{sh}(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta), \quad \Omega = 0.$$

边界条件为

$$\xi = 0 \text{ 处, } \phi = 0, \quad \Omega = -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2};$$

$$\xi = \xi_\infty \text{ 处, } \phi = -2\text{sh}(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta), \quad \Omega = 0.$$

此时方程(4)仍成立

$$\iint_S q \, dA = 0, \quad (4)'$$

其中

$$q = S_1^2 + S_2^2 - \Omega^2, \quad \Omega = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} - \frac{\partial U_r}{\partial \eta} \right),$$

$$S_1 = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \xi} - \frac{\partial U_0}{\partial \eta} \right), \quad S_2 = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \eta} + \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right).$$

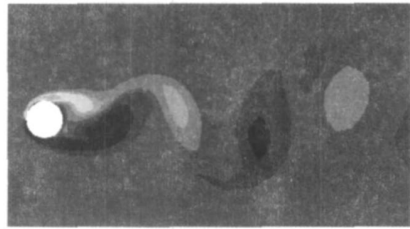
数值计算时, 取 $Re = 150$, Navier-Stokes 方程(6)采用 ADI 格式(Alternative-Direction Implicit), 方程(7)为 Poisson 方程, 采用 FFT 格式(Fast Fourier Transforms), 上述格式具有时间一阶精度和空间二阶精度^[14]. 计算步长分别为 $\Delta\xi = 0.004$, $\Delta\eta = 0.002$, $\Delta t = 0.005$.

3 结果与讨论

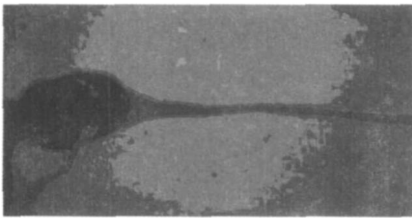
3.1 计算结果的验证



(a1) 实验(圆柱绕流)



(a2) 计算(圆柱绕流)



(b1) 实验(电磁力作用后)



(b2) 计算(电磁力作用后)

图2 电磁力控制前后的流场变化

为了验证计算结果, 将包覆了电磁激活板的圆柱, 插入流动的电解质溶液中. 激活板未被激活时, 由于逆压梯度的作用, 流体在圆柱表面脱体, 脱体旋涡以周期交替方式离开圆柱, 在尾部形成结构有序的 Van-Karman 涡街, 如图 2(a). 电磁激活板被激活后, 在 Lorentz 力的作用下,

圆柱表面附近流场的动量增加,脱体涡和涡街得到抑制,如图 2(b)。由上述计算方法得到的流场计算结果与实验一致。

圆柱表面的阻力包括摩阻和压阻,分别用 C_{fd} 和 C_{pd} 来表示,图 3 为各类阻力随 N 变化的计算曲线。激活板激活前,流场中不存在电磁力,即 $N = 0$,此时,总阻力系数 C_d 、压阻系数 C_{pd} 和摩阻系数 C_{fd} 皆大于 0。激活板激活后,在 Lorentz 力作用下,柱面附近的流体加速,这导致压力的下降,故压阻系数随 Lorentz 力增加而减小。 N 足够大时,压阻系数为负值,说明圆柱受到推力的作用。流体的加速还导致柱面法向的切向速度梯度的增加,从而导致摩阻的增加。压阻和摩阻随 N 的变化趋势是相反的。由于 C_{pd} 的下降速度大于 C_{fd} 上升速度,故总阻力系数是 C_d 减小的。由上述计算方法得到的圆柱受力结果与 Weier 等^[11]的实验结果一致。

3.2 圆柱绕流的涡结构

图 4 为涡量 Ω 和 Okubo-Weiss 函数 q 在圆柱绕流流场中的分布图。其中,灰色表示正值,黑色表示负值,由图可见,绕流流场是周期性变化的。

流体流过圆柱时,由于粘性的作用,在圆柱表面附近形成剪切边界层。当 Reynolds 数超过一定值以后,由于逆压梯度的作用,流体将以涡的方式周期性脱体,从而在下游形成涡街,如图 4(a) 所示。剪切边界层和涡街都将导致流场中的局部区域的涡度拟能 Ω^2 与变形率 $S_1^2 + S_2^2$ 的变化,从而影响 Okubo-Weiss 函数 q 的分布,如图 4(b) 所示。在圆柱的上游,由于圆柱迎风表面的滞止作用,圆柱前驻点附近的流场,线变形 S_1 较大,由于剪切作用较小,角变形率和旋转都比较小,故相应区域的变形率大于涡度拟能,有 Okubo-Weiss 函数 $q > 0$,如图 4 中圆柱上游灰色区域所示。在圆柱下游,流体将以涡的方式周期性脱体,形成涡街。在涡核的中心处,流体微团的旋转剧烈,线变形和角变形都相对较小,故涡核附近, Okubo-Weiss 函数 $q < 0$,如图 4(b) 中黑色区域。而在涡的边缘附近,由于粘性作用,在旋涡的带动下,周围流体剪切作用较强,此时线变形和涡度拟能都相对较小,所以 $q > 0$,如图 4(b) 中灰色区域。脱落的涡向下游移动后,由于涡度拟能的耗散,涡核的旋转及其周围的剪切作用大大减弱,在图 4(b) 中,下游的灰色和黑色区域逐渐变得不明显。

将涡度拟能和变形率在全流场的积分分别称为总涡度拟能或总变形率。其值随着绕流的周期变化而周期变化的,它们同时增大,同时减小,如图 5 所示,为比较方便,图中涡度拟能取负值,即用 $-\Omega^2$ 作图。由图可见,在周期性变化过程中,总涡度拟能和总变形率的值始终相等,从而保持 q 为 0,即满足方程(4)。计算结果与理论预测一致。

由于圆柱绕流的周期变化,涡度拟能和速度变形率的分布也存在周期变化,计算表明,这些量在流场中的区域权重分布变化不大,故以 $t = 477$ 时刻的分布为例,如图 6 所示。如果图 6 中的横坐标记作 x ,对任一 x_0 ,流场中出现 $x = x_0$ 的事件的区域面积占全流场面积的百分比称为权重。将具有涡能或者平方变形率的某个确定值的网格的面积加在一起,除以计算域的

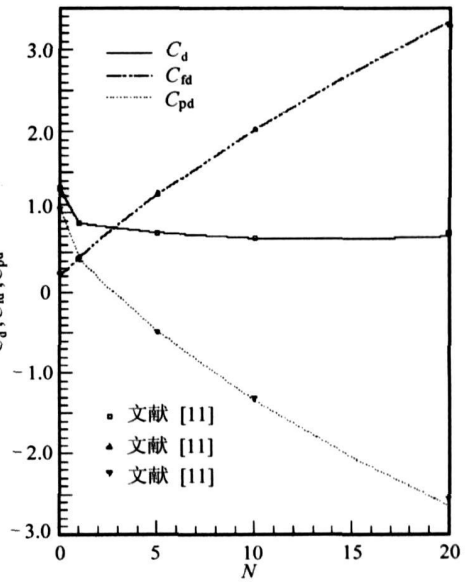
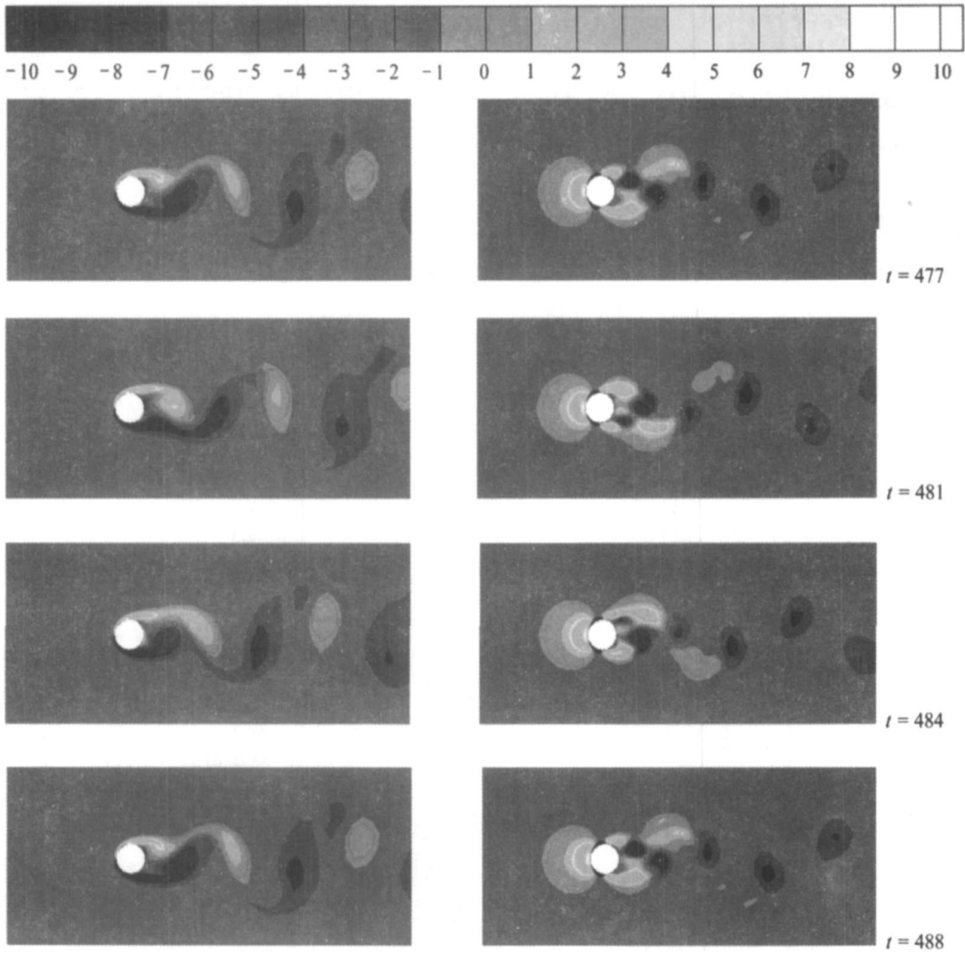


图 3 总阻力系数 C_d 、压阻系数 C_{pd} 和摩阻系数 C_{fd} 随作用参数的变化



(a) Ω (b) q

图 4 圆柱绕流中, 涡量和 Okubo-Weiss 函数的分布

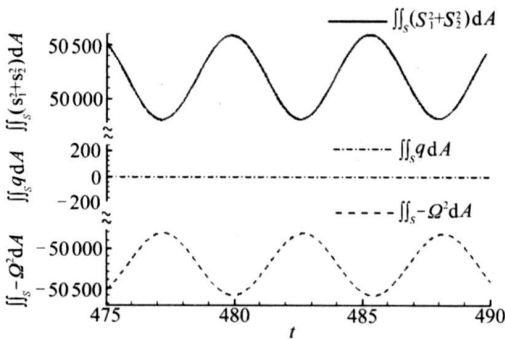


图 5 流场总涡度拟能和总速度变形率的周期性变化

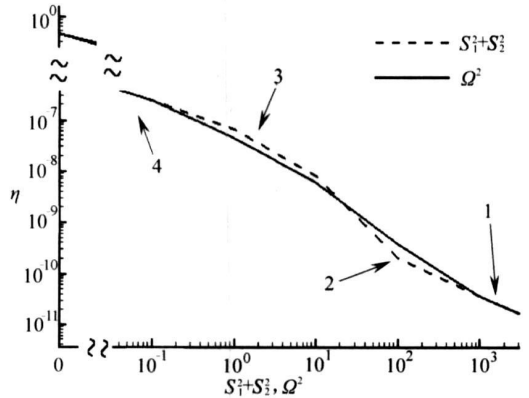


图 6 涡度拟能和速度变形率在圆柱绕流流场中的权重分布

总面积便可得到该值. 根据此图中的交点, 结合图 4, 可将流场分为 4 个区域. 1 区为高涡度拟能高变形率区域, 涡度拟能与变形率基本相等, 该区域集中在圆柱表面附近; 2 区的涡度拟

能和变形率皆小于 1 区, 涡度拟能大于变形率, 此为脱体涡核附近区域. 3 区为尾涡边缘以及涡与涡之间的连接区域, 该区域变形较大, 旋转较小, 变形率大于涡度拟能, 但涡度拟能和速度变形率皆小于 2 区; 4 区的涡度拟能和速度变形率都小于其他区域. 从 1 区到 4 区, 涡度拟能和速度变形率的大小递减. 但就所占流场面积而言, 从 1 区到 4 区递增. 虽然, 不同情况下, 涡度拟能和速度变形率的流场分布不同, 但两者在全流场的积分值是相等的, 即图 6 中, 实线和虚线所包围的面积相等, 从而有 Okubo-Weiss 函数 q 在全流场的积分值为 0.

3.3 电磁力作用下, 圆柱绕流的涡结构

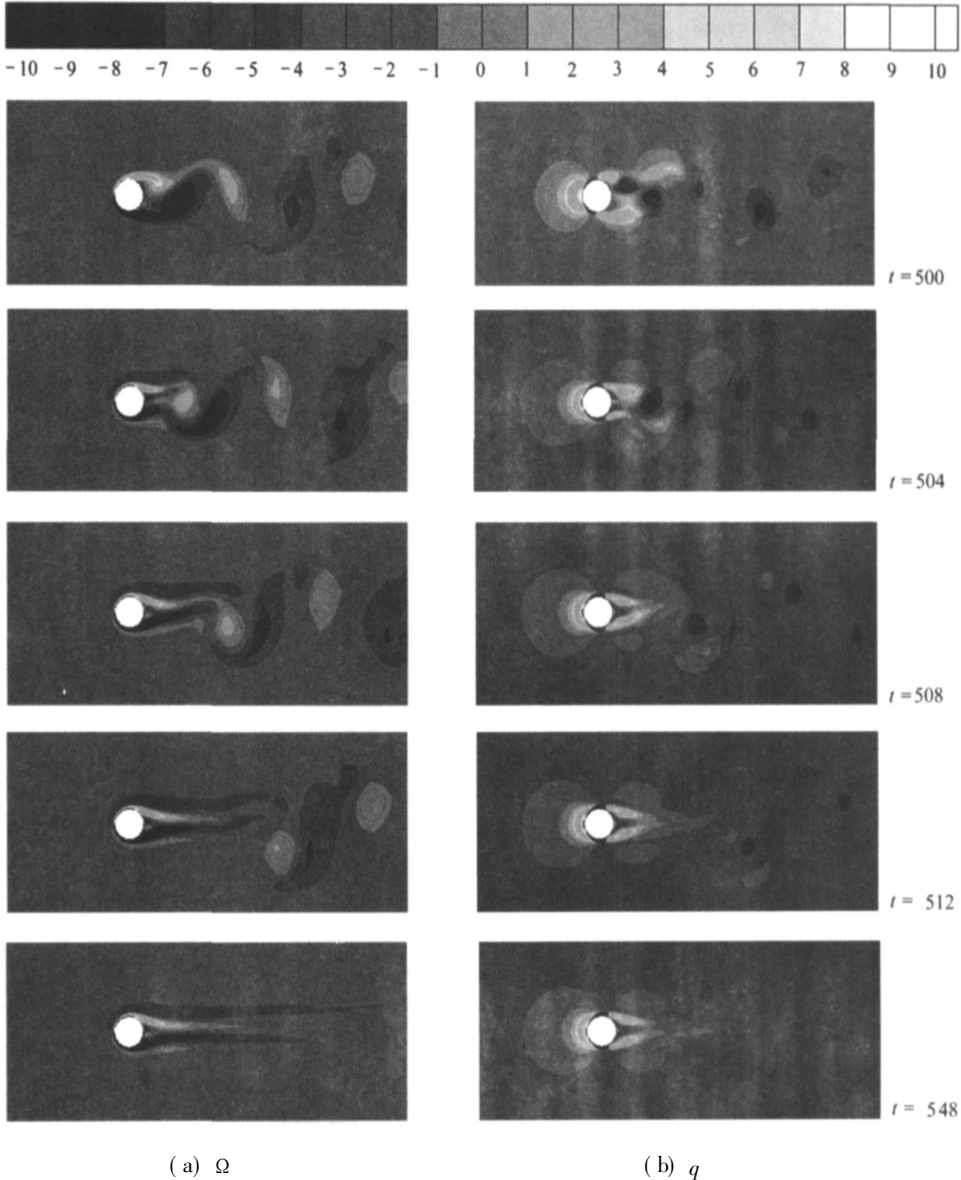


图 7 加电磁力时, 涡量和 Okubo-Weiss 函数的变化

在 $t = 500$ 时刻, 启动作用参数 $N = 3$ 的电磁场, 在电磁力作用下, 圆柱绕流的变化过程如图 7 所示. 其中图 7(a)、图 7(b) 分别为不同时刻, 涡量 Ω 和 Okubo-Weiss 函数 q 在流场中的分布图. 由图 7(a) 可见, 电磁力作用下, 流体的动量增加, 分离点后移, 卡门涡街逐渐消失.

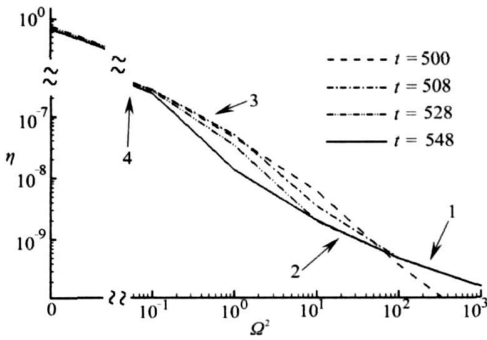
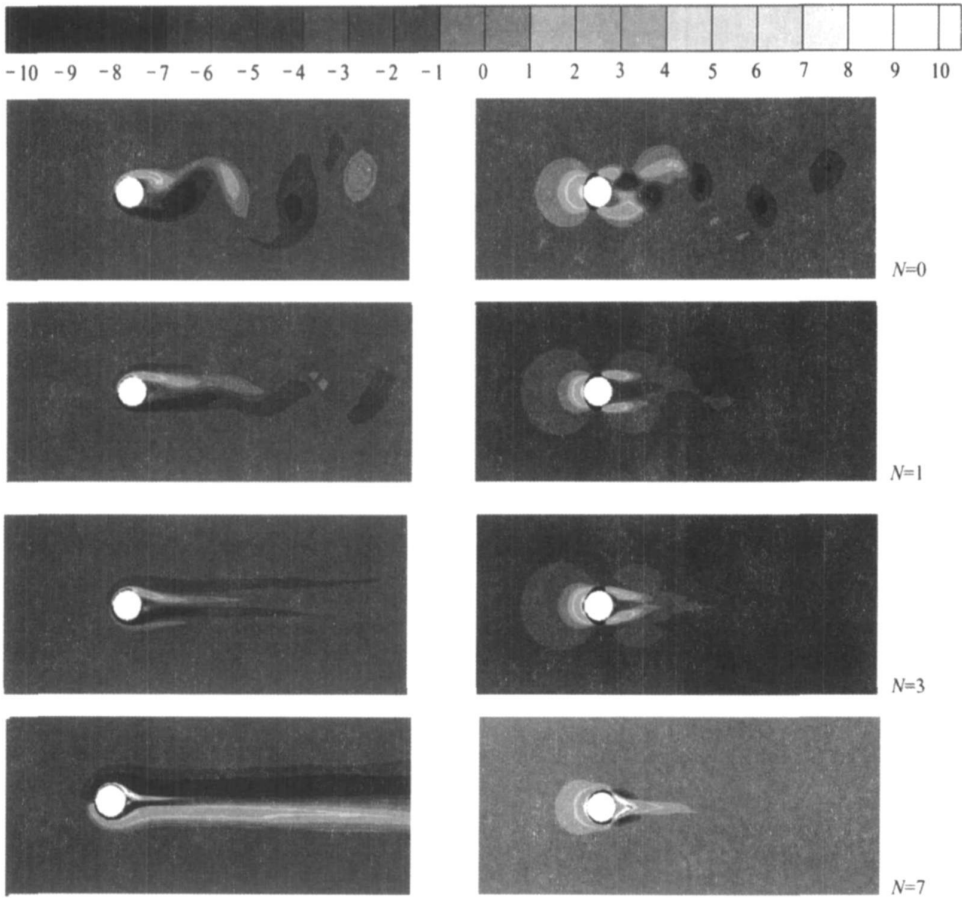


图 8 加电磁力时,总涡度拟能分布的变化

由 q 分布图 7(b) 可见,未加电磁力时,在卡门涡街的涡核处,涡度拟能大于变形率(图中的黑斑),而涡的边缘和涡之间的连接处,变形率大于涡度拟能(图中的灰斑).施加电磁力后,圆柱表面流体不再脱体,所以不再有涡产生,脱落的涡向下游移动时,由于涡度拟能的耗散,涡核的旋转及其周围的剪切作用大大减弱,故图中圆柱下游的灰色和黑色区域逐渐变得不明显, q 值趋于 0.但圆柱表面附近,由于剪切层的速度梯度增加,涡度拟能和变形率的强度皆增加,紧贴圆柱表面的很小的区域,涡度拟能大于变形率(黑色区域),其余的大部分区域,涡度拟能皆小于变形率(灰色区域).

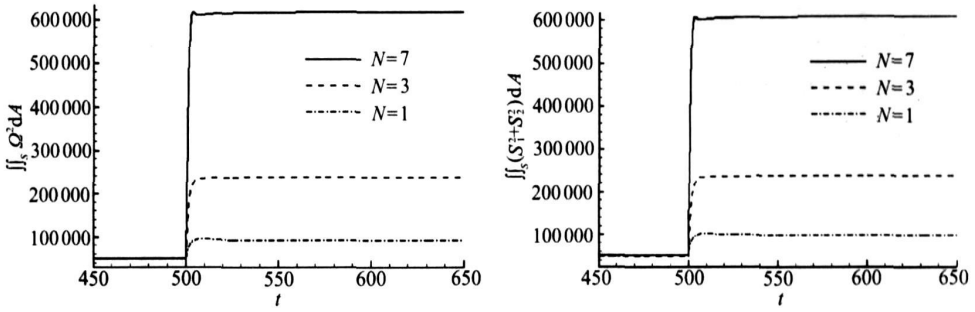


(a) Ω (b) q

图 9 不同电磁力作用下涡量和 Okube-Weiss 函数的变化

电磁力 $N = 3$ 作用下,流场渐趋平稳,图 8 为流场从非定常到定常的变化过程中,总涡度拟能的分布变化图.由于圆柱表面附近,在电磁力作用下,流体的速度梯度迅速增大,所以涡度拟能也迅速增加,且在 $t = 508$ 时刻,已达到稳定状态. 1 区的曲线上升,说明该区域涡度拟

能和变形率的强度增加. 随着脱体被抑制和卡门涡街的逐渐消失, 2 区域、3 区域的涡度拟能和变形率的强度也逐渐衰渐, 表现为该区曲线的下降. 4 区域由于离圆柱较远, 受到旋转和变形的影响较小, 所以电磁力作用前后曲线形状基本不变.



(a) 总涡度拟能 (b) 总速度变形率

图 10 总涡度拟能和总速度变形率的时间变化曲线

3.4 电磁力强度对圆柱绕流涡结构的影响

电磁力大小不同, 控制后的流场结构也不同, 如图 9 所示. 当作用参数 $N = 0$, 即不存在 Lorentz 力场时, 为典型的圆柱绕流, 由于尾部卡门涡街的存在, 所以圆柱尾部旋转和变形的区域较大. 当 $N = 1$ 时, 边界层流体动量增加, 分离点已明显后移, 旋转和变形的区域减小, 但尾流区域仍有振荡. $N = 3$ 时, 由于边界层流体动量继续增加, 速度梯度增大, 流体不再脱体, 涡街被完全抑制, 高涡度拟能和高变形率区域被限制在很小的局部范围内. 由于电磁力在法向呈指数衰减, 流体在边界无滑移, 故电磁力作用下, 速度最大值出现在离壁面一定距离的某处, 其两边的涡量是方向相反的, 即形成两层涡. 电磁力足够大时, 如 $N = 7$ 时, 边界层内的两层涡的特殊结构显得特别明显, 外层涡的强度也足够大. 此外, 在足够大的电磁力推动下, 圆柱尾部产生射流, 高涡度拟能和高变形率的区域增大.

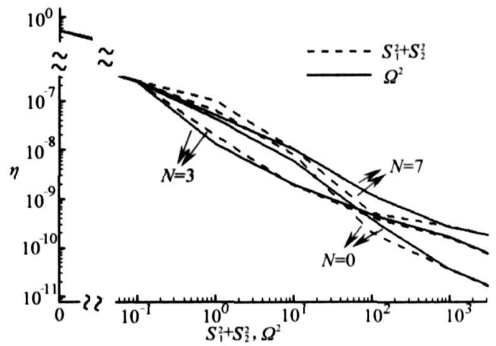


图 11 涡度拟能和变形率在不同电磁力作用下的权重分布

电磁控制下, 绕流流场的总涡度拟能与总变形随时间的动态变化过程如图 10 中虚线所示. 加电磁力前 ($t \leq 500$), 流场总涡度拟能和总变形率的变化如图 10 中 $t \leq 500$ 时的曲线所示, 即图 5 中的曲线, 该曲线是周期性变化的, 由于图 10 中, 纵坐标的取值和变化范围较大, 故不能显现其周期性变化规律. 电磁力作用后, 流场发生了显著变化, 但总体效应仍使总涡度拟能和总变形率皆急剧增大, 且最终保持为不再振荡的定值. 值得注意的是, 电磁力作用下, 无论流场如何变化, 总涡度拟能和总变形率的值始终相等, 一直保持 q 为 0, 即满足方程 (4). 该计算结果与理论预测一致.

不同电磁力作用下, 涡度拟能和变形率的分布如图 11 所示. $N = 0$, 即不加电磁力时, 与图 6 同. 当 N 较小, 如图 11 中 $N = 3$, 由于抑制了流体的分离, 消除了尾涡, 所以 2 区域、3 区域 (原先的涡核附近和尾涡边沿) 的曲线下降, 说明区域涡度拟能和变形率的平均强度下降. 图 11 中 2 区域和 3 区域交点左移, 说明 2 区扩大, 3 区减小. 1 区的曲线上升, 说明该区区域

的涡度拟能和高变形率的平均强度增加. 当 N 较大, 如图 11 中 $N = 7$ 时, 由于边界层内, 外层涡强度的增加(参见图 9), 使得 2 区、3 区的曲线的上升, 即涡度拟能和变形率的平均强度增加, 2 区域、3 区域交点左移, 说明 2 区扩大, 3 区减小. 1 区的曲线是随着 N 的增大而增大的. 4 区域由于离圆柱较远, 受绕流及电磁力的影响较小, 曲线基本不变. 根据上述计算结果, 虽然在不同电磁力作用下, 涡度拟能和速度变形率的分布都不同, 但是对于同一个电磁力, 两者在全流场的积分值相等, 即 Okubo-Weiss 函数 q 在全流场的积分值为 0. 符合本文证明的 Okubo-Weiss 函数守恒律.

4 结 论

Okubo-Weiss 函数与容变, 畸变和涡量有关. 本文证明了, 低 Reynolds 数的二维不可压缩流动, 无论固体边界的形状如何, 流场中是否存在控制流动的体积力, 只要边界上无滑移, Okubo-Weiss 函数在全流场的积分就恒为 0, 即

$$\iint_S q \, dA = 0.$$

另外, 对电磁控制圆柱绕流进行了数值计算, 结果验证了, 尽管流场中存在 Lorentz 力, 而且流场在 Lorentz 力作用下发生了复杂的变化, 但是守恒性质 $\iint_S q \, dA = 0$ 都是存在的.

[参 考 文 献]

- [1] Kraichnan R H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence[J]. *Phys Fluids*, 1967, **10**(7): 1417-1423.
- [2] Hua B L, Haidvogel D. Numerical simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence[J]. *J Atmos Sci*, 1986, **43**(23): 2923-2936.
- [3] Provenzale A. Transport by coherent barotropic vortices[J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1999, **31**: 55-93.
- [4] Okubo A. Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences[J]. *Deep-Sea Res*, 1970, **17**(3): 45-454.
- [5] Weiss J. The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics[J]. *Physica D*, 1991, **48**(2): 273-294.
- [6] Basdevant C, Philipovitch T. On the validity of the "Weiss criterion" in two-dimensional turbulence[J]. *Physica D*, 1994, **73**(1): 17-30.
- [7] Elhmaidi D, Provenzale A, Babiano A. Elementary topology of two-dimensional turbulence from a Lagrangian viewpoint and single-particle dispersion[J]. *J Fluid Mech*, 1993, **257**: 533-558.
- [8] Jeong J, Hussain F. On the identification of a vortex[J]. *J Fluid Mech*, 1995, **285**: 69-94.
- [9] Zavala Sanson L, Sheinbaum J. Elementary properties of the enstrophy and strain fields in confined two-dimensional flows[J]. *European Journal of Mechanics*, 2008, **27**(1): 54-61.
- [10] Gailitis A, Lielausis O. On a possibility to reduce the hydrodynamical resistance of a plate in an electrolyte[J]. *Applied Magnetohydrodynamics*, 1961, **12**: 143-146.
- [11] Weier T, Gerbeth G, Posdziech O, et al. Experiments on cylinder wake stabilization in an electrolyte solution by means of electromagnetic forces localized on the cylinder surface[J]. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1998, **16**(1): 84-91.
- [12] Kim S J, Lee C M. Investigation of the flow around a circular cylinder under the influence of an electromagnetic force[J]. *Experiments in Fluids*, 2000, **28**: 252-260.
- [13] Posdziech O, Grundmann R. Electromagnetic control of seawater flow around circular cylinders[J].

European Journal of Mechanics B/ Fluid, 2001, 20(2): 255-274.

- [14] 陈志华, 范宝春. 包覆电磁场激活板的圆柱尾迹的数值研究[J]. 力学学报, 2002, 34(6): 978-983.
- [15] 周本谋, 范宝春, 陈志华, 等. 流体边界层上电磁力的控制效应研究[J]. 力学学报, 2004, 36(4): 472-478.
- [16] Zhang H, Fan B-C, Chen Z-H, et al. Open-loop and optimal control of cylinder wake via electromagnetic fields[J]. Chinese Science Bulletin, 2008, 53(19): 2496-2952.
- [17] Zhang H, Fan B-C, Chen Z-H, et al. Suppression of flow separation around a circular cylinder by utilizing Lorentz force[J]. China Ocean Engineering, 2008, 22(1): 87-95.

Evolution of Global Enstrophy in Cylinder Wake Controlled by Lorentz Force

ZHANG Hui, FAN Bao-chun, CHEN Zhi-hua

(Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210094, P. R. China)

Abstract: The Okubo-Weiss function is correlated with the fluid particle compression, deformation and vorticity, which provides a simple way to characterize the different regions of flowfield. It had been proved mathematically that the global integration of Okubo-Weiss function is always equal to zero for a two dimensional incompressible flow with no-slip boundaries. Moreover, as an example to validate above conclusion, the flow past a circular cylinder controlled by electromagnetic force was calculated numerically. The distributions of global enstrophy, total squared strain and Okubo-Weiss function in controlled flowfield were discussed, and the influences of Lorentz force on them were also analyzed.

Key words: enstrophy; strain; cylinder wake; electromagnetic force