

压电压磁复合材料中二维散射问题的解析研究*

胡杨凡¹, 王彪²

(1. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275;

2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 用极化方法分析了含一二维夹杂的无限压电压磁基体中的波动散射问题. 以此为目的, 首先构建了二维压电压磁“相对体”的极化方法. 当一般性波动退减为简谐振动时, 极化方法的核心函数退减为二维谐波 Green 函数. 利用氢变换的解析方法, 首次求得了二维谐波 Green 函数的积分表达式, 该表达式在低频初始波与小尺度椭圆柱夹杂物的假设下可得到进一步的简化, 并最终求得解析解. 推导针对同时具有压电以及压磁效应的一般性各向异性材料进行, 然后将所得的结果简化到仅针对压电复合材料的情况. 以此简化解析解为基础, 提供了两个算例, 讨论了影响含一二维椭圆柱夹杂的 PZT-5H 压电陶瓷复合材料的散射截面的各种不同因素(包括夹杂的尺寸、形状效应, 材料常数的影响, 以及压电效应等).

关键词: 散射; 压电压磁复合材料; 极化方法; 动力学 Green 函数; 二维问题; 氢变换; 各向异性材料

中图分类号: O347.4; O302 文献标识码: A

引言

在复合材料中, 由夹杂引起的波的散射问题一直受到许多研究者的关注. Pao 等人^[1]对于弹性波在固体材料中的衍射以及由此引起的动态应力集中问题进行了详细地研究. 然而, 他的讨论局限于各向同性的材料. 另一方面, Auld^[2]的工作中对于波动在各向异性固体中的传播进行了相关的讨论, 但是遗憾的是由于分析方法等等各方面的原因, 衍射集散射等问题在本书中并未提及. Barnett^[3]指出运用由 Stroh^[4]最早提出的一种方法(一般称作 Stroh 方法), 波动在各向异性体中的传播能够得以简单有效的处理. 实际上, 提及各向异性体中的二维问题, 无论动态或静态, 人们都倾向于使用 Stroh 方法进行求解, 因为它所具备的数学上的简单形式及有效性. 而 Stroh 方法也曾经成功的处理一些动力学的问题, 包括 Rayleigh 表面波以及界面波的解析解. 这种波本身就可以视为是无限大表面对于入射波的一种散射. Wu^[5]推广了

* 收稿日期: 2008-09-03; 修订日期: 2008-09-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10732100; 10572155); 广东科学与技术局资助项目(2006A11001002); 中国教育部博士生基金资助项目(200630000411179)

作者简介: 胡杨凡(1985-), 男, 江西人, 博士生(E-mail: timhyf@yahoo.com.cn);

王彪(联系人, E-mail: wangbiao@mail.sysu.edu.cn).

Stroh 方法, 并利用它处理了所谓的“自恰”问题, 这也是 Stroh 方法在动力学问题中的另一次成功运用.

然而, 除去这些具简单形式的 Rayleigh 表面波, Stroh 方法对于更加一般性的问题, 包括同样具简单形式的简谐波并不能给出任何可操作的方法: 将具有 $f(x_1 + px_2)e^{i\omega t}$ 这种形式的函数带入方程, 我们不再得到熟知的本征方程组, 而是一个难于求解的复杂函数方程组. 另一方面, Wu^[5] 所提供的推广的 Stroh 方法只能处理边界在 $x_2 = 0$ 上的问题. 对于更加复杂的边界, 迄今为止推广的 Stroh 方法都无法给出令人满意的结果.

由于首选的 Stroh 方法无法给出令人满意的结果, 由任意形状的夹杂引起的二维散射这一重要的问题一直都处于无人问津的状态. 而实际上除了 Stroh 方法以外, Willis^[6] 还提供了另一种有效的方法——极化方法, 用以处理任意维度, 任意形式的散射问题. 其数学形式为以 Green 函数为核心的积分方程. Ma 和 Wang^[7] 发展了这种方法并引入了 Eshelby^[8] 的经典方法中首创的一些概念, 成功的解决了三维问题中的由椭圆夹杂引起的散射, 其中基体为各向异性的压电材料. 在本文中, 我们将 Willis^[6] 的极化方法与另一些解析技巧(包括氢变换以及留数定理等等)相结合, 分析了在压电压磁复合材料中的二维散射问题. 除了求得一般性的积分解, 在一些特定的简化条件下, 还得到了解析解.

1 基本方程

引用 Barnett 和 Lothe^[9] 以及 Pan 等^[10] 的标记方法并加以拓展, 我们得到了在各向异性压电压磁材料中的磁-电-弹耦合场中所满足的平衡方程:

$$C_{iJKl} u_{i, l} + f_J = \rho_{JK} \ddot{u}_K, \quad (1)$$

其中

$$C_{iJKl} = \begin{cases} C_{\bar{j}kl}, & J, K = 1, 2, 3, \\ e_{ij}, & J = 1, 2, 3; K = 4, \\ e_{ikl}, & J = 4; K = 1, 3, 3, \\ q_{l\bar{j}}, & J = 1, 2, 3; K = 5, \\ q_{ikl}, & J = 5; K = 1, 2, 3, \\ -\lambda_l, & J = 4; K = 5 \text{ 或 } J = 5; K = 4, \\ -\epsilon_l, & J, K = 4, \\ -\mu_l, & J, K = 5, \end{cases} \quad (2)$$

$$u_J = \begin{cases} u_j, & J = 1, 2, 3, \\ \phi, & J = 4, \\ \varphi, & J = 5, \end{cases} \quad f_J = \begin{cases} f_j, & J = 1, 2, 3, \\ -f_e, & J = 4, \\ -f_m, & J = 5, \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho_{JK} = \begin{cases} \delta_{JK} \rho, & J, K = 1, 2, 3, \\ 0, & J, K \neq 1, 2, 3, \end{cases}$$

$C_{\bar{j}kl}$ 、 ϵ_j 和 μ_j 分别代表材料的弹性常数, 介电常数以及磁导率常数张量; e_{ijk} 、 q_{jk} 和 λ_j 分别代表压电、压磁以及电磁感应的系数. u_j 、 ϕ 和 φ 分别代表弹性位移、电势以及磁势; f_j 、 f_e 和 f_m 则是体力、电荷及电流(或称磁荷); δ_{JK} 表征 Kronecher 张量, ρ 则是密度. \ddot{u}_J 指 u_J 对时间的二次导数. 方程(1)中所示的广义弹性常数张量与广义应力应变构成如下的本构方程:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl}, \tag{4}$$

其中广义应力应变定义如下:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \alpha_j, & J = 1, 2, 3, \\ D_i, & J = 4, \\ B_i, & J = 5, \end{cases} \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} \gamma_j, & I = 1, 2, 3, \\ -E_j, & I = 4, \\ -K_j, & I = 5. \end{cases} \tag{5}$$

在方程(5)中 α_j, D_i 以及 B_i 分别是应力、电位移以及磁通量, γ_j, E_j 以及 K_j 分别是应变、电场强度以及磁场强度. 从上述式子中我们可以看出, 所有的非耦合情况(包括纯粹的弹性体、压电材料、压磁材料) 都可以通过将无关系数设置为 0 而从方程(1) ~ (5) 中得到. 进一步的分析还表明各种的系数张量满足如下的对称关系:

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}; \\ e_{kji} = e_{kj}; \quad q_{hi} = q_{kj}; \\ \varepsilon_j = \varepsilon_i; \quad \lambda_j = \lambda_i; \quad \mu_j = \mu_i. \end{cases} \tag{6}$$

最后, 广义的应变与位移间的关系由如下的几何方程给出:

$$\gamma_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\varphi_{,i}. \tag{7}$$

2 复合材料的二维极化方法

考虑一个无限大的压电压磁复合体, 其基体的广义弹性模量为 C_{ijkl}^0 , 密度为 ρ_{JK}^0 , 夹杂为一个占据空间 Ω 的二维体, 其在 x_3 方向的长度为无穷大, 夹杂的广义弹性模量 C_{ijkl}^1 , 密度为 ρ_{JK}^1 . 对此复合体, 方程(1) 转化为

$$(C_{ijkl}^0 \delta_{ij} \delta_{kl}, i + f_j + \tau_{j,i} - \pi_j = \rho_{JK}^0 \ddot{u}_k, \tag{8}$$

其中

$$\tau_{ij} = \Delta C_{ijkl} \delta_{kl}, \quad \pi_j = \Delta \rho_{JK} \delta_j, \tag{9}$$

$$\Delta C_{ijkl} = (C_{ijkl}^1 - C_{ijkl}^0) H(\mathbf{x}), \quad \Delta \rho_{JK} = (\rho_{JK}^1 - \rho_{JK}^0) H(\mathbf{x}), \tag{10}$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

在方程(8) ~ (11) 中, 以及第 2 节的所有讨论中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, 大写的下标(如 J, K) 取值 1 ~ 5, 小写的下标(如 i, l) 取值 1 ~ 2.

现在假设存在一个纯合的“相对体”, 具有与基体相同的各种材料常数, 则其所满足的平衡方程为

$$(C_{ijkl}^0 \delta_{ij} \delta_{kl}, i + f_j = \rho_{JK}^0 \ddot{u}_k. \tag{12}$$

方程(12) 具有如下的伴随问题, 其中对应的伴随算子为 C_{ijkl}^* 、 ρ_{JK}^* , 共同构成如下方程:

$$(C_{ijkl}^* \delta_{ij} \delta_{kl}, i + F_k = \rho_{JK}^* \ddot{v}_j, \tag{13}$$

其中, F_k 为描述场 v 的伴随问题中的广义体积力. 上式中的伴随算子定义为

$$\int_0^\infty dt \int_S dS (v_j, i C_{ijkl}^0 \delta_{kl} - u_k, i C_{ijkl}^* \delta_{kl}, j) = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty dt \int_S dS (v_j \rho_{JK}^0 \delta_j - u_k \rho_{JK}^* \delta_j) = 0. \tag{15}$$

通过使用 Gauss 定理, 方程(12) ~ (15) 可得如下关系:

$$\int_0^\infty dt \int_{\partial S} dN v_j C_{iJK}^0 u_{K,i} m_i - u_K C_{iJK}^* v_{j,i} m_i + \int_0^\infty dt \int_S dS (v_j f_j + u_K F_K) = \int_S dS (v_j \rho_{jK}^0 u_{K,i} - u_K \rho_{Kj}^* v_j) |_{i=0}^\infty. \tag{16}$$

相对体对应的 Green 函数 G 的各个分量满足

$$(C_{iJK}^0 G_{KP,i})_{,i} + \delta_{jP} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') = \rho_{jK}^0 \dot{G}_{KP}, \tag{17}$$

$G_{KP}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ 分别表征广义 Green 位移的分量以及对应的点荷载的方向. 令 G^* 表征其伴随 Green 函数, 则其分量满足

$$(C_{iJK}^* G_{jQ,i})_{,i} + \delta_{KQ} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(t - t'') = \rho_{KJ}^* \dot{G}_{jQ}^*, \tag{18}$$

对应于相应的伴随边界条件. 从方程(16)可得

$$G_{QP}^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', t' - t'') = G_{PQ}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}', t'' - t'). \tag{19}$$

式(19)显示伴随 Green 函数 G^* 可以直接从 Green 函数 G 求得, 而前者对于某些推导来说更为方便. 将式(16)带入式(8)得

$$u_Q(\mathbf{x}'', t'') = - \int dt \int_S dS [G_{jQ,i}^*(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}, t'' - t) \tau_{j,i}(\mathbf{x}, t) - G_{jQ}^*(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}, t'' - t) \pi_j] + u_Q^0(\mathbf{x}'', t''), \tag{20}$$

其中

$$u_Q^0(\mathbf{x}'', t'') = - \int dt \int_S dS [G_{jQ}^*(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}, t'' - t) f_j(\mathbf{x}, t)] - \int dt \int_{\partial S} dN u_K C_{iJK}^* G_{jQ,i}^* m_i - G_{jQ}^*(C_{iJK}^0 u_{K,i} + \pi_j) n_i + \int_S dS \{ G_{jQ}^*(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}, t'') [\rho_{jK}^0 u_{K,i}(\mathbf{x}, 0) + \pi_j(\mathbf{x}, 0)] - u_K(\mathbf{x}, 0) \rho_{Kj}^* G_{jQ}^*(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}, t'') \}. \tag{21}$$

需要强调的是式(20) 仅当初始条件给出动量而非速度时才成立. 将式(20)、(21)的结论与 Willis^[6]的结果进行比较, 我们可以知道本文的结论可简化为针对压电材料, 压磁材料甚至纯粹弹性材料的方程. 式(20)又可表达为

$$\mathbf{u} = - N\tau - M\pi + \mathbf{u}^0, \tag{22}$$

其中

$$(N\tau)_Q(\mathbf{x}, t) = \int dt' \int_S dS' N_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \tau_{j,i}(\mathbf{x}', t'), \tag{23}$$

$$(M\pi)_Q(\mathbf{x}, t) = \int dt' \int_S dS' M_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \pi_j(\mathbf{x}', t'), \tag{24}$$

$$N_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{\partial G_{jQ}^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)}{\partial x_i} = \frac{\partial G_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')}{\partial x_i}, \tag{25}$$

$$M_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = - \frac{\partial G_{jQ}^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)}{\partial t'} = - \frac{\partial G_{Qj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')}{\partial t'}. \tag{26}$$

将式(22)带入式(9)得

$$(\Delta C)_{ij}^{-1} \tau_{ij} + (N_x \tau)_{Qi} + (M_x \pi)_Q = u_{Q,i}^0, \tag{27}$$

$$(\Delta \rho)_{ij}^{-1} \pi_j + (N_t \tau)_Q + (M_t \pi)_Q = u_Q^0, \tag{28}$$

其中

$$(N_x)_{Qi} = \frac{\partial^2 G_{Qj}}{\partial x_l \partial x_i}, \quad (M_x)_{Qj} = \frac{\partial^2 G_{Qj}}{\partial x_l \partial t}, \tag{29}$$

$$(N_t)_{QJ} = \frac{\partial^2 G_{QJ}}{\partial t \partial x_i}, \quad (M_t)_{QJ} = \frac{\partial^2 G_{QJ}}{\partial t \partial t}. \tag{30}$$

考虑如下二维初始波在基体中传播, 其表达式为

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{a} \exp\left\{-i[k_0(\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{x}) + \omega t]\right\}, \tag{31}$$

其中, $\mathbf{n}^0 = [n_1, n_2]^T$ 是一单位向量. 振幅 \mathbf{a} 以及波数 k_0 满足

$$\left[\mathbf{Q}n_1^2 - \rho \frac{\omega^2}{k_0^2} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)_{n_1 n_2} + \mathbf{T}n_2^2 \right] \mathbf{a} = 0, \tag{32}$$

其中, 上标 T 代表矩阵转置, $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ 的定义如下

$$\mathbf{Q} = [C_{1JK1}], \quad \mathbf{R} = [C_{1JK2}], \quad \mathbf{T} = [C_{2JK2}], \tag{33}$$

而 ρ 的表达式则为

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

当我们考虑上述简谐波引起的散射问题时, 由夹杂引起的散射波的表达式中, 时间变量 t 仅以乘子 $\exp(-i\omega t)$ 的形式出现在解表达中. 因此, 我们需要 N, M 等算子的谐波简化表达. 而这些算子的核心均为二维谐波格林函数.

3 动力学二维谐波 Green 函数

本节求解针对各向异性压电压磁材料的动力学二维谐波 Green 函数. 首先, 令一广义简谐荷载作用于 x_3 轴上各点并指向 x_Q 方向, 起始时间为 $t = -\infty$. 则我们可得到如下结论:

$$f_K(\mathbf{x}, t) = \delta_{KQ} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \tag{35}$$

其中, \mathbf{x} 在平面 (x_1, x_2) 中. 则固体中各点的广义位移也必然为简谐运动, 运动满足如下关系:

$$u_Q(\mathbf{x}, t) = G_{QJ}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \tag{36}$$

将式(35)、(36)带入式(1)得

$$(L_{JK}(\partial) + \rho_{JK} \omega^2) G_{QJ} = -\delta_{KQ} \delta(\mathbf{x}), \tag{37}$$

其中

$$L_{JK}(\partial) = C_{1JK1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (C_{1JK2} + C_{2JK1}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{2JK2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{38}$$

从式(37)可以看出著名的 Stroh 方法无法解决这一问题. 若我们将形如 $G_{QJ} = G_{QJ}(x_1 + px_2)$ 的方程带入方程(37), 则发现方程并未得以简化从而无法求解. 我们必须寻求其他方法来求解这一问题. 将附录 A 中定义的氢变换带入方程(37)的两边可得

$$\left[L_{JK}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho_{JK} \omega^2 \right] \hat{G}_{QJ}(s) = -\delta_{KQ} \delta(s), \tag{39}$$

其中

$$L_{JK}(\mathbf{n}) = C_{1JK1} n_1^2 + (C_{1JK2} + C_{2JK1}) n_1 n_2 + C_{2JK2} n_2^2. \tag{40}$$

根据式(6), $L_{JK} = L_{KJ}$. 在式(39)中密度张量可展开为

$$[\rho_{JK}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

式(39)可进行如下的分解:

$$\left[L_{jk}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho \delta_{j\mu\nu}^2 \right] \hat{G}_j(s) + L_{4k}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2 \hat{G}_{q4}(s)}{\partial s^2} + L_{5k}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2 \hat{G}_{q5}(s)}{\partial s^2} = -\delta_{jk} \delta(s), \quad (42)$$

其中, 由于篇幅原因省略了大部分简化式, 其形式都与式(42)类似. 在式(42)以及下面的讨论中, 小写下标(如 j, k) 取值 1~3. 又可得如下形式的关系式:

$$\frac{\partial^2 \hat{G}_{q4}}{\partial s^2} = (L_{55}^{-1}L_{45} - L_{54}^{-1}L_{44})^{-1} (L_{54}^{-1}L_{j4} - L_{55}^{-1}L_{j5}) \frac{\partial^2 \hat{G}_j}{\partial s^2}, \quad (43)$$

上式同样由于篇幅关系进行了省略. 将形式如式(43)的方程带入形式如式(42)的方程可得

$$\left\{ \Gamma_{jk}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho \delta_{j\mu\nu}^2 \right\} \hat{G}_{qj}(s) = -\delta_{jk} \delta(s), \quad (44)$$

$$\left\{ \Gamma_{jk}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho \delta_{j\mu\nu}^2 \right\} \hat{G}_{4j}(s) = - (L_{45}^2 - L_{55}L_{44})^{-1} (L_{55}L_{4k} - L_{45}L_{5k}) \delta(s), \quad (45)$$

$$\left\{ \Gamma_{jk}(\mathbf{n}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho \delta_{j\mu\nu}^2 \right\} \hat{G}_{5j}(s) = (L_{45}^2 - L_{55}L_{44})^{-1} (L_{44}L_{5k} - L_{45}L_{4k}) \delta(s), \quad (46)$$

其中

$$\Gamma_{jk}(\mathbf{n}) = L_{jk} + (L_{45}L_{54} - L_{44}L_{55})^{-1} [L_{j4}L_{55}L_{4k} - L_{54}(L_{j5}L_{4k} + L_{j4}L_{5k}) + L_{j5}L_{44}L_{5k}]. \quad (47)$$

比较式(45)、(46)的右侧以及式(44)、(43), 注意到 $L_{JK} = L_{KJ}$, 因此有

$$\hat{G}_{jQ} = \hat{G}_{Qj}. \quad (48)$$

由此, 式(45)、(46)将不会在下面的求解中出现, 我们只需通过方程(43)求出 $\hat{G}_{4j}(s)$ 以及 $\hat{G}_{5j}(s)$ 即可.

从式(47)可知矩阵 $\Gamma = [\Gamma_{jk}(\mathbf{n})]$ 是对称矩阵且取正值. 通过将坐标轴转化至 Γ 的本征空间, 方程(44)可被简化为一组独立的一维 Helmholtz 方程组. 其本征函数由如下方程给出:

$$\Gamma_{jk} E_{km} = \lambda_m E_{jm} \quad (m = 1, 2, 3), \quad (49)$$

其中, λ_m 是矩阵 Γ 的对应于本征向量 $\mathbf{E}_m = [E_{1m}, E_{2m}, E_{3m}]^T$ 的本征值. 这里需要特别注意的是求和约定并不对下标 m 起作用. 易知, 此处的本征值已基本本征向量都是实数, 而此处我们令本征向量组成正交基, 即有

$$\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_n = \delta_{mn}. \quad (50)$$

方程(44)可转换为

$$\left[\lambda_m \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \rho v^2 \right] G_{qm}(s) = -E_{qm} \delta(s), \quad (51)$$

其中

$$G_{qm}(s) = E_{jm} \hat{G}_j, \quad (52)$$

$$\hat{G}_{qj}(s) = E_{nj} G_{qn}. \quad (53)$$

方程(51)的解首先由 Wang 和 Achenbach^[11] 给出

$$G_{qm} = \frac{iE_{qm}}{2\rho c_m^2 k_m} e^{ik_m |s|}, \tag{54}$$

其中, 相速度 c_m 以及波数 k_m 定义为

$$c_m = \sqrt{\lambda_m/\rho}, \quad k_m = \omega/c_m. \tag{55}$$

从式(53) 可得

$$\hat{G}_{qj} = \sum_{m=1}^3 \frac{iE_{qm}E_{jm}}{2\rho_m^2 k_m} e^{ik_m |s|}. \tag{56}$$

式(54) 的逆变换可通过将式(56) 带入式(A2) 而得

$$G_{qj}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}}{2\rho_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}). \tag{57a}$$

通过与求解 G_j 同样的操作手段, 我们可以求得 G_{4j} 、 G_{5j} 、 G_{44} 、 G_{45} 、 G_{45} . 有

$$G_{q4}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}(L_{54}^{-1}L_{j4} - L_{55}^{-1}L_{j5})}{2\rho_m^2(L_{55}^{-1}L_{45} - L_{54}^{-1}L_{44})} \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}), \tag{57b}$$

$$G_{q5}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}(L_{44}^{-1}L_{j4} - L_{45}^{-1}L_{j5})}{2\rho_m^2(L_{45}^{-1}L_{55} - L_{44}^{-1}L_{54})} \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}), \tag{57c}$$

$$G_{44}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \left[\frac{(L_{54}^{-1}L_{4q} - L_{55}^{-1}L_{5q}) E_{qm}E_{jm}(L_{54}^{-1}L_{j4} - L_{55}^{-1}L_{j5})}{2\rho_m^2(L_{55}^{-1}L_{45} - L_{54}^{-1}L_{44})^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right] d\mathbf{l}(\mathbf{n}) - \oint_{|\mathbf{n}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{2\tau(L_{55}^{-1}L_{45} - L_{54}^{-1}L_{44})L_{54}} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}) \right\}, \tag{57d}$$

$$G_{45}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \left[\frac{(L_{44}^{-1}L_{4q} - L_{45}^{-1}L_{5q}) E_{qm}E_{jm}(L_{54}^{-1}L_{j4} - L_{55}^{-1}L_{j5})}{2\rho_m^2(L_{55}^{-1}L_{45} - L_{54}^{-1}L_{44})(L_{45}^{-1}L_{55} - L_{44}^{-1}L_{54})} \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right] d\mathbf{l}(\mathbf{n}) - \oint_{|\mathbf{n}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{2\tau(L_{45}^{-1}L_{55} - L_{44}^{-1}L_{54})L_{44}} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}) \right\}, \tag{57e}$$

$$G_{55}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \left[\frac{(L_{44}^{-1}L_{4q} - L_{45}^{-1}L_{5q}) E_{qm}E_{jm}(L_{44}^{-1}L_{j4} - L_{45}^{-1}L_{j5})}{2\rho_m^2(L_{45}^{-1}L_{55} - L_{44}^{-1}L_{54})^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right] d\mathbf{l}(\mathbf{n}) - \oint_{|\mathbf{n}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{2\tau(L_{44}^{-1}L_{54} - L_{45}^{-1}L_{55})L_{45}} d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}) \right\}. \tag{57f}$$

式(57a) ~ (57f) 带入式(25)、(26)、(29)、(30) 可得到相应算子的表达式

$$N_{jq}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}t_i}{2\rho_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau)}{\tau} + \frac{ik_m e^{ik_m |\mathbf{n}\mathbf{x} + \tau|}}{\tau} \right) d\tau d\mathbf{l}(\mathbf{n}) =$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{jm} n_i}{2\rho_m^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (58a)$$

$$N_{i4q}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{jm} n_i (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (58b)$$

$$N_{i44}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \left[\frac{(L_{54}^{-1} L_{4q} - L_{55}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{jm} n_i (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})^2} \times \left[- \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau \right] \right] dl(\mathbf{n}) - \oint_{|n|=1} \frac{n_i}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44}) L_{54}} dl(\mathbf{n}) \right\}, \quad (58c)$$

$$N_{i54}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \left[\frac{(L_{44}^{-1} L_{4q} - L_{45}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{jm} n_i (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44}) (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54})} \times \left[- \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau \right] \right] dl(\mathbf{n}) - \oint_{|n|=1} \frac{n_i}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54}) L_{44}} dl(\mathbf{n}) \right\}, \quad (58d)$$

$$(N_x)_{jql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{jm} n_i n_l}{2\rho_m^2} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \operatorname{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (59a)$$

$$(N_x)_{i4ql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{jm} n_i n_l (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \operatorname{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (59b)$$

$$(N_x)_{i44l} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{(L_{54}^{-1} L_{4q} - L_{55}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{jm} n_i n_j (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})^2} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \operatorname{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}) - \oint_{|n|=1} \frac{n_i n_j}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44}) L_{54}} dl(\mathbf{n}) \right\}, \quad (59c)$$

$$(N_x)_{i54l} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{(L_{44}^{-1} L_{4q} - L_{45}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{jm} n_i n_l (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2\rho_m^2 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44}) (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54})} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \operatorname{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}) - \oint_{|n|=1} \frac{n_i n_l}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54}) L_{44}} dl(\mathbf{n}) \right\}, \quad (59d)$$

$$M_{QJ}(\mathbf{x}) = - iwG_{QJ}(\mathbf{x}), \quad (59e)$$

$$(M_x)_{JQl} = iwN_{JQl}, \quad (59f)$$

$$(N_t)_{jQ} = - iwN_{jQ}, \quad (59g)$$

$$(M_l)_{JQ} = -iwMJQ. \tag{59h}$$

需要注意的是在式(58a)~(59h)中,对于二维问题来说 $i = 1, 2; l = 1, 2$, 而其余的小写下标均满足取值 1~3. 此规则将延续到后面的讨论中. 方程(58a)~(59h)所给出的长篇幅表达式

可通过数值方法求解. 以方程(59d)为例. 对于第 1 项以 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau$ 为核心的表达式来说, 我们可以首先通过展开 $\text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau)$ 将积分变为两项. 这两项积分将具备 $\int_{-\infty}^{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \frac{e^{ik_m \tau}}{\tau} d\tau$ 的形式, 并可以通过级数展开求解. 方程(59d)中的第 2、第 3 项将在第 5 节进行详细求解. 方程(58a)~(59h)与方程(27)~(28)给出了由方程(22)描述的广义位移. 从方程(22), 我们知道总的位移常由初始位移场 u_0 以及散射位移场 v 叠加而成, 后者可表示为

$$v = -N\tau - M\pi. \tag{60}$$

对于压电材料, 方程(57a)~(59f)简化为

$$G_{qi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}}{2\rho_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau dl(\mathbf{n}), \tag{61a}$$

$$G_{q4}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jn}L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau dl(\mathbf{n}), \tag{61b}$$

$$G_{44}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \left[\frac{L_{4q}E_{qm}E_{jn}L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) \frac{e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right] dl(\mathbf{n}) - \oint_{|\mathbf{n}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{2V_{44}} d\tau dl(\mathbf{n}) \right\}, \tag{61c}$$

$$N_{jq}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}n_i}{2\rho_m^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right] dl(\mathbf{n}), \tag{61d}$$

$$N_{i4q}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jn}L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right] dl(\mathbf{n}), \tag{61e}$$

$$G_{i44}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \left[\frac{L_{4q}E_{qm}E_{jn}L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right) - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau \right] dl(\mathbf{n}) + \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{n_i}{L_{44} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} dl(\mathbf{n}) \right\}, \tag{61f}$$

$$(N_x)_{jq} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jm}n_i n_l}{2\rho_m^2} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}), \tag{62a}$$

$$(N_x)_{i4q} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{E_{qm}E_{jn}n_j L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}), \tag{62b}$$

$$(N_x)_{i44} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{L_{4q}E_{qm}E_{jn}n_j L_{j4}}{2\rho_m^2 L_{44}^2} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_m^2 \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \tau|}}{\tau} d\tau - \frac{2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2} \right] dl(\mathbf{n}) + \oint_{|\mathbf{n}|=1} \frac{n_i n_j}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 L_{44}} dl(\mathbf{n}). \tag{62c}$$

对于退化的压电材料, 式(47) 转化为

$$\Gamma_{jk}(\mathbf{n}) = L_{jk} + L_{44}^{-1} L_{j4} L_{4k}. \quad (63)$$

我们注意到, 对于退化的压电材料, 式(2) 中对应于材料磁性质的各项均被消去. 由此可知, 若将电性质与磁性质的相关项交换, 式(61a)~(61f) 同样可以表达压磁材料的相关性质.

4 散射截面

夹杂的散射界面 κ 定义为散射场 ν 的总平均能量流出率比初始波场在 \mathbf{n}^0 方向的平均能量流出率. 其中前者的分量表达式为

$$Y_i = -\frac{1}{4} i\omega (\sigma_{ij} \nu_j - \sigma_{ij} \nu_j), \quad (64)$$

其中, σ_{ij} 代表 ν 对应的广义应力场, 上划线代表共轭复数. 从某一二维区域流出的平均能量辐射率为

$$E = \int_{\partial S} Y_i n_i^0 dL. \quad (65)$$

利用 Gauss 定律可得

$$E = -\frac{1}{4} i\omega \int_S (\alpha_{j,i} \nu_j - \sigma_{ij,i} \nu_j + \sigma_{ij} \nu_{j,i} - \sigma_{ij} \nu_{j,i}) dS, \quad (66)$$

上式又可转变为

$$E = -\frac{1}{4} i\omega \int_S (\tau_{ij} \nu_{j,i} - \tau_{ij} \nu_{j,i}) dS - \frac{1}{4} \omega^2 \int_S (\pi_j \nu_j - \pi_j \nu_j) dS. \quad (67)$$

在上述方程中, τ 、 π 仅在夹杂平面 S 内部取非零值. 初始波的平均能量流动可以从方程(32) 中得到

$$E^0 = \frac{Q\omega^3}{2k_0} a_j a_j, \quad (68)$$

其中, a_j 是由式(31) 给出的振幅向量 \mathbf{a} 的各个分量. 最后, 我们得到了散射截面的表达式

$$\kappa = E/E^0. \quad (69)$$

5 简化条件下的解析结果

式(27)、(28) 在低频的瑞利极限以下能够得到相当的简化. 另外, 若夹杂的尺度比初始波的波长小很多, 则 τ 、 π 在夹杂内部可被视为常数. 通过省去高阶小项, 方程转化为

$$(\Delta C)^{-1} \bar{ij} Q \tau_j + \int_S (N_x^\infty)_{ij} Q d\mathbf{x}' \tau_j = -ik_0 a Q n_i^0, \quad (70)$$

$$(\Delta \rho)^{-1} \bar{ij} \pi_j = -i\omega a_j. \quad (71)$$

方程(70) 中的积分即为算子 N_x 的静态极限, 可以进行如下操作:

$$\int_S (N_x^\infty)_{ij} Q d\mathbf{x}' = d \left[\int_S N_{ij}^\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] \Big|_{dx_i}, \quad (72)$$

其中, N_{ij}^∞ 可以通过仅保留含有 $1/(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ 的项从方程(58a)~(58f) 中得到. 方程(72) 能够求得解析解, 其结果及推导过程在附录 B 中详细给出. 在方程(70)~(71) 中可解得 τ 、 π 为

$$\tau_j = -ik_0 \left[(\Delta C)^{-1} + \int_S (N_x^\infty) d\mathbf{x}' \right]_{ij}^{-1} a Q n_i^0, \quad (73)$$

$$\pi_j = -i(\Delta \rho) \omega a_j. \quad (74)$$

在简化条件下, 散射截面可从方程(67)~(69) 中求得如下:

$$\kappa = \frac{(\mathbb{T}ab)^2 w^3}{2E^0} [\mathbb{T}_{iJ}(\Delta N_x)_{iJQl} \mathbb{T}_{lQ} + \mathbb{T}_k \Delta M_{kp} \mathbb{T}_p], \quad (75)$$

其中

$$(\Delta N_x)_{\bar{j}ql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i n_l}{\rho_m^5} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76a)$$

$$(\Delta N_x)_{i4ql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i n_l (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{\rho_m^5 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76b)$$

$$(\Delta N_x)_{i5ql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i n_l (L_{44}^{-1} L_{j4} - L_{45}^{-1} L_{j5})}{\rho_m^5 (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54})} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76c)$$

$$(\Delta N_x)_{i44l} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{(L_{54}^{-1} L_{4q} - L_{55}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{mj} n_i n_j (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{\rho_m^5 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})^2} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76d)$$

$$(\Delta N_x)_{i54l} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{(L_{44}^{-1} L_{4q} - L_{45}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{mj} n_i n_l (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{\rho_m^5 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44}) (L_{45}^{-1} L_{55} - L_{44}^{-1} L_{54})} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76e)$$

$$(\Delta N_x)_{i55l} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{(L_{54}^{-1} L_{4q} - L_{55}^{-1} L_{5q}) E_{qm} E_{mj} n_i n_j (L_{54}^{-1} L_{j4} - L_{55}^{-1} L_{j5})}{2 \rho_m^5 (L_{55}^{-1} L_{45} - L_{54}^{-1} L_{44})^2} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (76f)$$

$$\Delta M_{kp} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj}}{\rho_m^3} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}). \quad (76g)$$

在方程(75)的推导过程中,利用了方程(58a)~(59j)的奇偶性条件. 方程(76a)~(76g)的详细推导过程在附录C中给出.

对一般压电材料,方程(76a)~(76g)简化为

$$(\Delta N_x)_{\bar{j}ql} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i n_l}{\rho_m^5} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (77a)$$

$$(\Delta N_x)_{i4ql} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i n_l L_{j4}}{\rho_m^5 L_{44}} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (77b)$$

$$(\Delta N_x)_{i44l} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{L_{4q} E_{qm} E_{mj} n_i n_l L_{j4}}{\rho_m^5 L_{44}^2} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}), \quad (77c)$$

$$\Delta M_{jp} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj}}{\rho_m^3} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}). \quad (77d)$$

6 算 例

在这一节, 计算含单一夹杂(材料常数分两种情况: BaTiO₃ 以及 BaTiO₃ 刚体)的压电复合材料的散射截面. 复合材料的基体材料为 PZT-5H. 基体与夹杂的材料均为横观各向同性材料, 材料的对称轴为 x_2 轴, 而二维问题的计算是在 x_1-x_2 平面进行(即材料在 x_1 与 x_2 方向的材料常数并不对称). 非零的材料常数有

BaTiO₃- 夹杂:

$$\begin{cases} C_{11}^* = 166 \text{ GPa}, C_{22}^* = 162 \text{ GPa}, C_{12}^* = 78 \text{ GPa}, \\ C_{13}^* = 77 \text{ GPa}, C_{44}^* = 43 \text{ GPa}, \\ e_{21}^* = -4.4 \text{ C/m}^2, e_{22}^* = 18.6 \text{ C/m}^2, e_{15}^* = 11.6 \text{ C/m}^2, \\ \epsilon_{11}^* = 11.2 \times 10^{-9} \text{ C/(N}\cdot\text{m}^2), \epsilon_{22}^* = 12.6 \times 10^{-9} \text{ C/(N}\cdot\text{m}^2), \\ \rho^* = 5700 \text{ kg/m}^3. \end{cases} \quad (78)$$

PZT-5H- 基体:

$$\begin{cases} C_{11} = 126 \text{ GPa}, C_{22} = 117 \text{ GPa}, C_{12} = 53 \text{ GPa}, \\ C_{13} = 55 \text{ GPa}, C_{44} = 35.5 \text{ GPa}, \\ e_{21} = -6.5 \text{ C/m}^2, e_{22} = 23.3 \text{ C/m}^2, e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2, \\ \epsilon_{11} = 15.1 \times 10^{-9} \text{ C/(N}\cdot\text{m}^2), \epsilon_{22} = 13.0 \times 10^{-9} \text{ C/(N}\cdot\text{m}^2), \\ \rho = 7500 \text{ kg/m}^3. \end{cases} \quad (79)$$

对于 BaTiO₃ 刚体夹杂, 材料的常数被设定为无穷大, 但是材料的密度保持不变. 对于算例中的问题来说, 材料的广义应力应变关系转化为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{21} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{22} \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{13})/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -\epsilon_{11} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

我们考虑如下问题, 初始波在 x_1 方向传播, 振幅及大小为 $\mathbf{a} = [1 \ 0 \ 0]^T$, 与椭圆柱夹杂发生碰撞. 夹杂的尺寸如图 1 所示. 对于两种不同材料的夹杂, 我们计算了散射截面随 ϵ 的变换. 随着 ϵ 的增加, 夹杂的体积也呈线性增长. 计算的结果展示于图 2. 所有的计算结果都需要乘上 $w^4 a^4$, 其中 a 是图 1 中所示的长轴长度, w 则由方程(31)给出.

从上述结果, 我们看到在两种情况下(BaTiO₃ 夹杂以及 BaTiO₃ 刚体夹杂), 尺寸效应的影响都是巨大的. 由于散射截面的表达式为一个面积分, 随着 ϵ 值的增大, 散射截面的值同样会增大.

然而, 正是由于这种影响占据主要的地位, 掩盖了其他因素的影响. 由此我们计算了另一个算例, 即散射截面随 θ 的变化, 其中 θ 可见于图 1. 在这次计算中, 随着 θ 的变化夹杂的体积

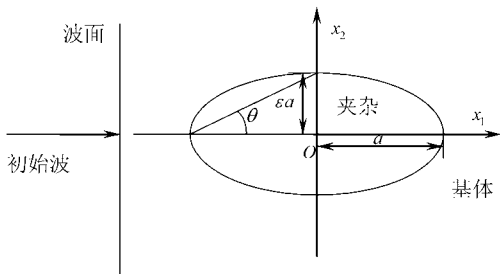


图 1 散射问题示意图

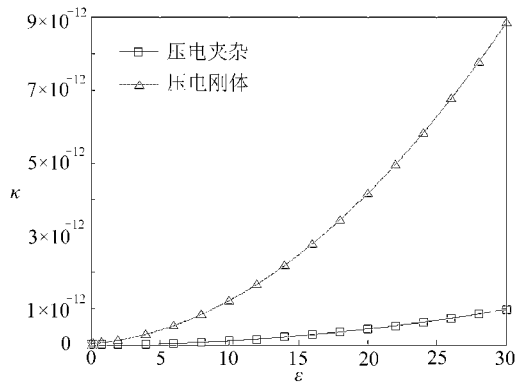


图 2 散射截面 κ 随 ε 的变化曲线

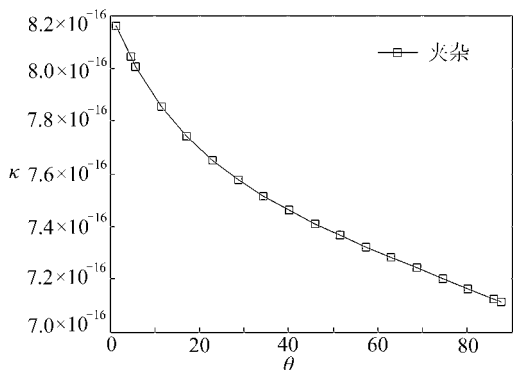


图 3 散射截面 κ 随 θ 的变化曲线(基体与夹杂的材料分别为弹性 PZT-5H 以及弹性 BaTiO3)

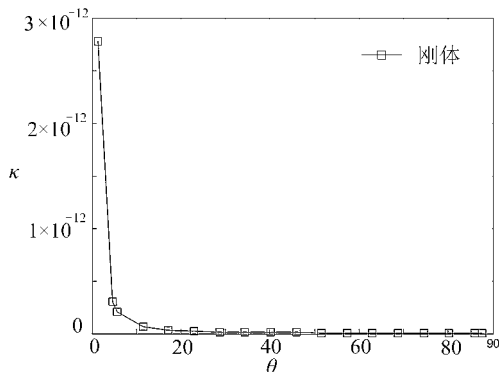


图 4 散射截面 κ 随 θ 的变化曲线(基体与夹杂的材料分别为弹性 PZT-5H 以及弹性 BaTiO3 刚体)

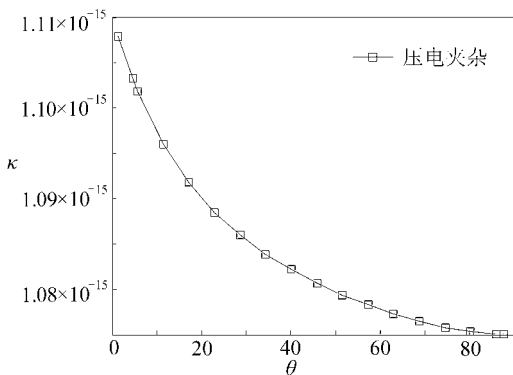


图 5 散射截面 κ 随 θ 的变化曲线(基体与夹杂的材料分别为 PZT-5H 以及 BaTiO3)

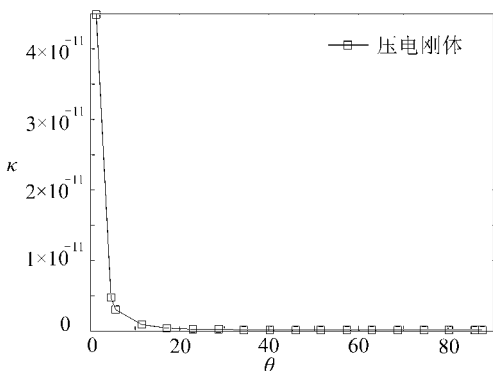


图 6 散射截面 κ 随 θ 的变化曲线(基体与夹杂的材料分别为 PZT-5H 以及 BaTiO3 刚体)

保持不变. 为了研究压电效应对散射截面的影响, 我们首先计算了具有相同弹性常数但不具压电效应的复合材料的散射截面, 其各自的材料常数为:

弹性 BaTiO3- 夹杂:

$$C_{11}^* = 166 \text{ GPa}, C_{22}^* = 162 \text{ GPa}, C_{12}^* = 78 \text{ GPa}, C_{13}^* = 77 \text{ GPa}, C_{44}^* = 43 \text{ GPa},$$

$$e_{21}^* = 0, e_{22}^* = 0, e_{15}^* = 0, \epsilon_{11}^* = 0, \\ \epsilon_{22}^* = 0, \rho^* = 5\,700 \text{ kg/m}^3.$$

弹性 PZT- 5H- 基底:

$$C_{11} = 126 \text{ GPa}, C_{22} = 117 \text{ GPa}, C_{12} = 53 \text{ GPa}, C_{13} = 55 \text{ GPa}, C_{44} = 35.5 \text{ GPa}, \\ e_{21} = 0, e_{22} = 0, e_{15} = 0, \epsilon_{11} = 0, \\ \epsilon_{22} = 0, \rho^* = 7\,500 \text{ kg/m}^3.$$

BaTiO3 刚体也在本例中进行了计算. 结果见于图 3 及图 4 中.

示于图 5 和图 6 中的的是对于压电复合材料计算的结果. 其中材料常数的选取参照方程 (78)、(79).

致谢 本文工作受到中国国家自然科学基金(10732100; 10572155), 广东科学与技术局(2006A11001002), 以及中国教育部博士生基金的支持.

附录 A

考虑在 R^2 中定义的函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 的氢变换定义为

$$\hat{f}(s, n) = R[f(x)] = \int f(x) \delta(s - n \cdot x) d(x), \tag{A1}$$

其中, n 为一单位向量, 而 δ 是二维 Dirac 函数. $f(x)$ 的氢变换是一个在由 $n \cdot x = s$ 定义的所有曲线上的积分. 氢变换的逆变换定义为

$$f(x) = -\frac{i}{4\pi} \oint_{|n|=1} H_s \left[\frac{d}{ds} \hat{f}(s, n) \Big|_{s=n \cdot x} \right] dl(n), \tag{A2}$$

其中, H_s 是针对变量 s 的 Hilbert 变换, 它的定义为

$$H_s[f(s, n)] = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau, n)}{s - \tau} d\tau. \tag{A3}$$

Helgason^[12] 对氢变换进行了详细的推导与研究.

附录 B

利用 Li 和 Wang^[13] 在他们的文章中使用的技术, 方程(72) ~ (74) 有如下解:

$$N_{ijq}^{\infty} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm} E_{mj} n_i}{\rho_m^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} dl(n) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{qi}(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2) \zeta_i}{D(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2)(x_1 + \zeta x_2)} d\zeta, \tag{B1}$$

其中, $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ 而 $[\zeta_1 \ \zeta_2] = [1 \ \zeta]$. 式(B1)对于 dx' 的积分由 Eshelby^[8] 首次完成, 他证明了积分结果与 x 呈线性关系. 因此我们可以知道, $d \left[\int_S N_{ijq}^{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] \Big|_{dx_l}$ 的计算结果为常数, 由下式给出:

$$\int_S (N_x^{\infty})_{ijq} d\mathbf{x}' = \frac{1}{\pi \epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{qi}(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2) \zeta_{il}}{D(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2)(1/\epsilon^2 + \zeta^2)} d\zeta, \tag{B2}$$

其中, $[\zeta_{il}] = \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta & \zeta^2 \end{bmatrix}^T$ 而 $\epsilon = b/a$, a, b 分别为椭圆夹杂在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向的轴长. 在式(B2)的推导中, 我们略去了一些复杂的项, 这是由于在式(67)中, 只有 $\tau_{ij} v_{j,i}$ 的虚部对散射截面有贡献. 在最一般的情况下, 方程 $D(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2) = 0$ 的所有根都不相同, 方程(B2)的解为

$$\int_S (N_x^{\infty})_{ijq} d\mathbf{x}' = -\frac{2}{\epsilon} \text{Im} \left[\sum_{m=1}^6 \frac{A_{qi}(\zeta_m)(\zeta_{il})_m}{a_6(\zeta_m - \zeta_m^*) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^6 (\zeta_m - \zeta_k^*)(\zeta_m - \zeta_k)} \right], \tag{B3}$$

其中, a_6 是 $D(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2)$ 中 ζ^{10} 项的系数, $\zeta_m (m = 1, 2, 3, 4, 5)$ 为方程 $D(\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2) = 0$ 的具有正虚部的根, ζ_6 的值为 $(1/\epsilon)i$, 而 ζ_m^* 为 ζ_m 的复数共轭. 其他的解可以用同样的方法求得, 如下:

$$\int_S (N_x^\infty)_{i4q'} d\mathbf{x}' = -\frac{2}{\varepsilon} \text{Im} \left[\frac{\sum_{m=1}^8 A_{q'}(\zeta_m)(\zeta_{\bar{m}})_m [L_{j4}(\zeta_m)L_{55}(\zeta_m) - L_{54}(\zeta_m)L_{j5}(\zeta_m)]}{a_6 a_4(\zeta_m - \zeta_m^*) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^8 (\zeta_m - \zeta_k^*)(\zeta_m - \zeta_k)} \right], \quad (B4)$$

其中, a_4 是 $L_{45}L_{54} - L_{44}L_{55}$ 中 ζ^4 项的系数, 而 ζ_7, ζ_8 为方程 $(L_{45}L_{54} - L_{44}L_{55}) = 0$ 的具有正虚部的根.

$$\int_S (N_x^\infty)_{i5q'} d\mathbf{x}' = -\frac{2}{\varepsilon} \text{Im} \left[\frac{\sum_{m=1}^8 A_{q'}(\zeta_m)(\zeta_{\bar{m}})_m [L_{45}(\zeta_m)L_{j4}(\zeta_m) - L_{44}(\zeta_m)L_{j5}(\zeta_m)]}{a_6(-a_4)(\zeta_m - \zeta_m^*) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^8 (\zeta_m - \zeta_k^*)(\zeta_m - \zeta_k)} \right]. \quad (B5)$$

剩余的方程与上面的式子具有非常相似的结构, 由于篇幅原因这里无法一一列出.

附录 C

从方程(67)中可以知道方程(59a)~(59f)中只有偶函数的虚部对散射截面结果有贡献, 因此

$$(\Delta N_x)_{\bar{y}q} = \frac{1}{4w^3\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm}E_{mj}n_i n_l}{2\rho c_m^2} \left[\int_{-n_x}^{\infty} \frac{k_m^2 e^{ik_m(n_x \tau)} \tau}{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{n_x} \frac{k_m^2 e^{-ik_m(n_x \tau)} \tau}{\tau} d\tau \right] dl(\mathbf{n}), \quad (C1)$$

这里, k_m 以及 $|x|$ 都被认为是小量, 由此我们可以进行如下变换:

$$(\Delta N_x)_{\bar{y}q} = \frac{1}{4w^3\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{iE_{qm}E_{mj}n_i n_l}{\rho c_m^2} \int_0^{\infty} \frac{k_m^2 \sin k_m \tau}{\tau} d\tau dl(\mathbf{n}), \quad (C2)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin k_m \tau}{\tau} d\tau &= \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) \frac{\sin k_m \tau}{\tau} d\tau = k_m \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \int_1^{\infty} \frac{1}{k_m \tau} d\cos k_m \tau = \\ &k_m \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} + \frac{\cos k_m - 1}{k_m} = \\ &k_m \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (C3)$$

最后得解

$$(\Delta N_x)_{\bar{y}q} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^3 \oint_{|n|=1} \frac{E_{qm}E_{mj}n_i n_l}{\rho c_m^5} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)(2i+1)!} - \frac{1}{2} \right] dl(\mathbf{n}). \quad (C4)$$

其余的方程可用同样的方法求得, 这里就不赘述了.

【参 考 文 献】

- [1] Pao Y H, Mow C - C. *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations* [M]. New York: Russak, Crane, 1973.
- [2] Auld B A. *Acoustic Fields and Waves* [M]. Vols 1 & 2, New York: John & Wiley, 1973.
- [3] Barnett D M. Bulk, surface, and interfacial waves in anisotropic linear elastic solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(1/2): 45- 54.
- [4] Stroh A N. Steady state problems in anisotropic elasticity[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1962, 41(1): 77- 103.
- [5] Wu K C. Extension of Stroh's formalism to self-similar problems in two-dimensional elastodynamics[J]. *Proc R Soc London A*, 2000, 456(1996): 869- 890.
- [6] Willis J R. A polarization approach to the scattering of elastic waves—scattering by a single inclusion[J]. *J Mech Phys Solids*, 1980, 28(5/6): 287- 305.
- [7] Ma H, Wang B. The scattering of electroelastic waves by an ellipsoidal inclusion in piezoelectric medium[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(16/17): 4541- 4554.
- [8] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. *Proc*

- R Soc London A*, 1957, **241**(1226) : 376– 396.
- [9] Bamett D M, Lothe J. Dislocation and line charges in anisotropic piezoelectric insulators[J]. *Phys Status Solids, B*, 1975, **67**(1) : 105– 111.
- [10] Pan E, Tonon F. Three– dimensional Green’ s functions in anisotropic piezoelectric solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(6) : 943– 958.
- [11] Wang C Y, Achenbach J D. Three – dimensional time – hamonic elastodynamic Green’ s functions for anisotropic solids[J]. *Proc R Soc London A*, 1995, **449**(1937) : 441– 458.
- [12] Helgason S. *The Radon Transform*[M]. Boston: Birkhauser, 1980.
- [13] Li X Y, Wang M Z. Three– dimensional Green’ s functions for infinite anisotropic piezoelectric media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(5) : 1680– 1684.

Solution of the Two Dimensional Scattering Problem in Piezoelectric/ Piezomagnetic Media by Polarization Method

HU Yang– fan¹, WANG Biao²

- (1. Department of Applied Mechanics & Engineering, Sun Yat– Sen University,
Guangzhou 510275, P. R. China;
2. School of Physics and Engineering, Sun Yat– Sen University,
Guangzhou 510275, P. R. China)

Abstract: Using the polarization method, the scattering problem for a two dimensional inclusion embedded in infinite piezoelectric/ piezomagnetic matrices is investigated. To achieve the purpose, the polarization method for two– dimensional piezoelectric/ piezomagnetic “ comparison body” was fomulated for the first time. For simple harmonic motion, the kernel of the polarization method reduces to the 2– D time– harmonic Green’ s function, which is deduced using the Radon transform. The fomalism was further simplified under certain conditions (low frequency of the incident wave and small diameter of the inclusion) , where some explicit analytical expressions were obtained. The analytical solutions for generalized piezoelectric/ piezomagnetic anisotropic composites were given first, followed by simplified results for piezoelectric composites. Based on the latter results, two numerical results were provided for an elliptical cylindrical inclusion in a PZT– 5H– matrices, illustrating the effect of different factors (including size effect, shape effect, effect of the material properties, and piezoelectric effect) on the scattering cross– section.

Key words: scattering; piezoelectric/ piezomagnetic material; polarization method; dynamic Green’ s function; two– dimensional problem; radon transform; anisotropic material