

# 夹层圆柱壳在移动内压作用下的 临界速度研究\*

周加喜<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>1,2</sup>, 侯秀慧<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(岳珠峰推荐)

**摘要:** 基于夹层壳理论和三维弹性动力学理论, 研究了无限长夹层圆柱壳在移动内压作用下的临界速度. 首先, 基于夹层壳理论, 考虑夹芯的压缩和剪切变形以及面板的剪切变形, 研究了轴对称简谐波在无限长夹层圆柱壳中的传播问题; 其次, 基于三维弹性动力学理论, 将位移变量用 Legendre 正交多项式系表示, 同时引入位置相关函数, 将求解导波问题化为简单的特征值问题. 利用这两种方法得到了最低模态的频散曲线, 最小相速便是内压移动的临界速度. 最后, 用算例和数值模拟来验证方法的有效性. 结果表明, 两种理论得到临界速度吻合得较好; 当波数较小时, 两种理论得到的频散曲线吻合得很好, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 夹层壳理论和弹性动力学理论得到的极限相速分别趋于面板和夹芯的剪切波波速. 波数较小时, 两种理论分析夹层圆柱壳的导波问题是有效的. 数值模拟预测的临界速度与理论分析的结果吻合得很好.

**关键词:** 夹层圆柱壳; 临界速度; 夹层壳理论; 弹性动力学; Legendre 正交多项式

**中图分类号:** O347.4 **文献标识码:** A

## 引言

圆柱壳在移动内压作用下, 当移动内压的速度趋于轴对称弯曲波波群速度(临界速度)时, 壳体的结构响应理论上趋于无穷大, 实际上是受同等水平静内压的结构响应的数倍<sup>[1]</sup>. 已知内压移动速度, 设计夹芯可以改变夹层圆柱壳的波群速度, 避免共振, 降低结构响应. 首先应该解决的问题是求临界速度. 对于圆柱壳轴对称弯曲波, 波群速度与最小相速相等<sup>[2]</sup>, 故只需得到最低阶频散关系, 便可以求得该临界速度. 圆柱壳是一种重要的结构(如爆震发动机的燃烧室, 枪炮管等), 将轻质夹层结构应用于这类结构, 通过合理设计, 改善其性能是航天, 航空等领域结构设计的迫切需求.

单层均匀各向同性或正交各向异性无限长圆柱壳的导波问题, 已经得到了广泛的研究. 主要有弹性动力学方法、基于板壳理论的近似方法以及数值分析方法(NAM)<sup>[3]</sup>. Gazis<sup>[4]</sup> 将位

\* 收稿日期: 2008-06-23; 修订日期: 2008-10-24

基金项目: 国家基础研究计划 973 资助项目(2006CB601202); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目(GZ0701)

作者简介: 周加喜(1983-), 男, 湖南汉寿人, 博士生(E-mail: jxizhou@gmail.com);

邓子辰, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

移用 Bessel 函数表示,用弹性动力学方法研究了各向同性无限长圆柱壳的导波问题; Mirsky<sup>[5]</sup>, Marku<sup>»</sup>等<sup>[6]</sup>将位移用 Frobenius 级数表示,用弹性动力学方法研究了正交各向异性无限长圆柱壳的导波问题,但这种方法有一定的局限性,当波长较短时方法不收敛;同时 Mirsky<sup>[7]</sup>基于厚壳理论给出了正交各向异性无限长圆柱壳的导波问题的近似解; Elmaimouni 等<sup>[8]</sup>将位移用 Legendre 正交多项式表示,应用弹性动力学方法研究了无限长圆柱壳的导波问题. 这种方法引入了位置相关函数,将边界条件包含在本构关系,将波导问题简化为简单的特征值问题. 对于非均匀材料, Elmaimouni 等<sup>[9]</sup>应用类似于文献[8]的方法研究了功能梯度材料无限长圆柱筒的导波问题. Han 等<sup>[3]</sup>应用数值分析方法(NAM)研究了功能梯度材料无限长圆柱筒的导波问题,作者将轴向和周向位移用三角级数表示,而径向位移场用有限元方法构造. 对于夹层圆柱壳的导波问题的研究成果并不多见, Marku<sup>»</sup>等<sup>[10]</sup>基于 Mirsky<sup>[5]</sup>和 Gazis<sup>[4]</sup>的方法研究了三层复合材料夹层圆柱壳的导波问题,也存在一定局限性,当波长较短时方法是不收敛的. 本文应用基于圆柱壳理论的近似方法和弹性动力学方法<sup>[8]</sup>,分析无限长夹层圆柱筒的轴对称导波问题,求移动内压的临界速度,并用算例和有限元软件模拟验证方法的有效性.

## 1 基于柱壳理论的近似方法

如图 1 所示的圆柱壳,内表面受均布内压. 坐标系如图 1(b)所示,上下面板相对于夹芯

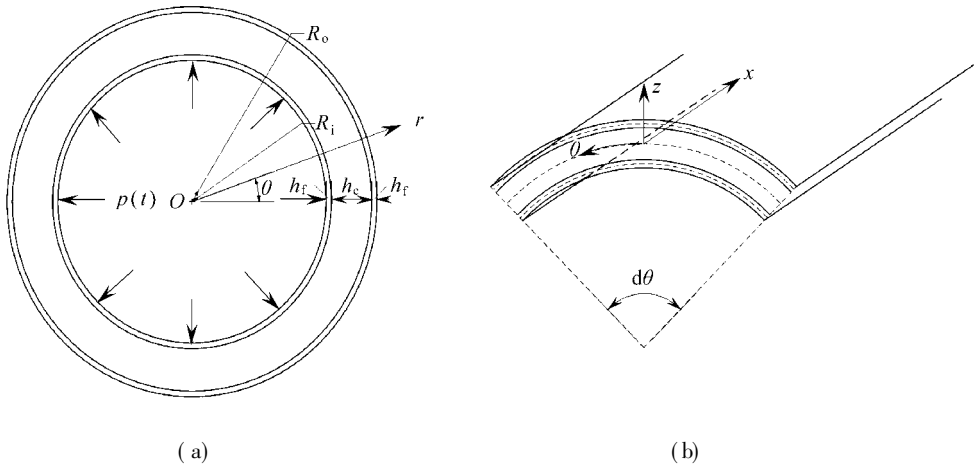


图 1 圆柱壳的示意图

来说很薄,可以视为薄壳,而夹芯为厚壳,上下面板的厚度相同,且材料一致. 每一层定义为  $i$ ,  $i = t, b, c$  分别表示上、下表面和夹芯. 位移分量  $u^i, v^i, w^i$  分别表示各层中面轴向、周向和径向位移;  $\varphi_x^i(x, t)$  ( $i = t, c, b$ ) 表示垂直各层中面的法线绕  $x$  轴的转角;  $\varphi_z^c(x, t)$  表示夹芯沿  $z$  轴的应变. 因为只考虑轴对称振动,故  $v^i = 0$ , 且  $\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$ . 本文考虑的是小变形问题,且只考虑夹芯在径向的变形,不考虑面板的径向变形,故位移场可近似表示为:

上表面

$$\begin{cases} u_x^t = (u^a + u^d) + [z - (h_f + h_c)/2](\varphi_x^a + \varphi_x^d), \\ u_z^t = w^a + w^d; \end{cases} \quad (1)$$

夹芯

$$\begin{cases} u_x^c = (u^a - h_f/2) + z(2u^d/h_c - \varphi_x^a h_f/h_c), \\ u_z^c = w^a + 2w^d_z/h_c; \end{cases} \quad (2)$$

下表面

$$\begin{cases} u_x^b = (u^a - u^d) + [z + (h_f + h_c)/2](\varphi_x^a - \varphi_x^d), \\ u_z^b = w^a - w^d; \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \left\{ u^a \quad w^a \quad \varphi_x^a \right\} = \frac{1}{2} \left\{ u^t + u^b \quad w^t + w^b \quad \varphi_x^t + \varphi_x^b \right\}, \\ \left\{ u^d \quad w^d \quad \varphi_x^d \right\} = \frac{1}{2} \left\{ u^t - u^b \quad w^t - w^b \quad \varphi_x^t - \varphi_x^b \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

应变与位移之间的关系可写为

$$\begin{cases} \varepsilon_x^i = \frac{\partial u_x^i(x, t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^i = \frac{u_z^i(x, t)}{R + z}, \quad \varepsilon_z^i = \frac{\partial u_z^i(x, t)}{\partial z}, \\ \gamma_{xz}^i = \frac{\partial u_x^i(x, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i(x, t)}{\partial x}, \quad \gamma_{x\theta}^i = 0, \quad \gamma_{z\theta}^i = 0. \end{cases} \quad (5)$$

面板与夹芯分别是各向同性材料和正交各向异性材料, 故各层的本构关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{xz}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 \\ \text{对称} & & C_{33} & 0 \\ & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{xz}^i \end{bmatrix}. \quad (6)$$

夹层壳的应变能密度为

$$W^* = \frac{1}{2} \sum_i (\sigma_x^i \varepsilon_x^i + \sigma_\theta^i \varepsilon_\theta^i + \sigma_z^i \varepsilon_z^i + \tau_{xz}^i \gamma_{xz}^i). \quad (7)$$

将(5)式代入(6)式可得应力, 再代入(7)式, 进一步在整个夹层壳区域内积分便可以得到势能  $W$ . 根据线性理论, 动能密度可表示为

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i [(\dot{u}_x^i)^2 + (\dot{u}_z^i)^2], \quad (8)$$

其中,  $\rho_i$  表示各层的密度, 且  $\rho_1 = \rho_b = \rho_t$ . 将(1) ~ (4) 式代入(8)式, 在整个夹层壳区域内积分便可得到动能  $T$ . 均布外力  $f_x, f_z$  作用在边界表面上, 那么外力做功为  $W_e = - \iint_S (f_x u_x + f_z u_z) dS$ . 夹层圆柱壳的运动方程可由 Hamilton 原理得到, 其变分形式为

$$\Pi = W - T - W_e, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = 0. \quad (9)$$

那么, 由 Hamilton 原理得到的运动方程为

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ & & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ & & & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ \text{对称} & & & & L_{55} & L_{56} \\ & & & & & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^a \\ u^d \\ \varphi_x^a \\ \varphi_x^d \\ w^a \\ w^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta p(x, t) \\ -\Delta p(x, t) \end{bmatrix} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u^a \\ u^d \\ \varphi_x^a \\ \varphi_x^d \\ w^a \\ w^d \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中,  $L_{ij}$  为偏微分算子,  $\rho$  为质量矩阵, 其表达式见附录. 另外,  $\Delta = 1 - (h_c + 2h_f)/(2R)$ . 轴对称简谐波沿对称轴自由传播, 位移自由变量可以表示为

$$\mathbf{x} = \left\{ U^a \quad U^d \quad \Phi_x^a \quad \Phi_x^d \quad W^a \quad W^d \right\}^T e^{i(kx - \omega t)}, \quad (11)$$

其中,  $k$  为波数,  $\omega$  为圆频率. 将(11)式代入运动方程的齐次部分, 便可以得到频散方程, 求解频散方程可得最低阶频散关系曲线, 曲线上的最小值便是临界速度.

## 2 弹性动力学方法

为计算方便, 令  $q_1 = kx$ ,  $q_3 = kz$ ,  $k$  是波数. 三层圆柱壳的尺寸、坐标系如图 2 所示. 由于只考虑轴对称运动, 那么周向位移  $v = 0$ , 以及  $\partial/\partial\theta = 0$ .

0. 柱坐标下其动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial q_1} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial q_3} + \frac{\tau_{xz}}{q_3} = \frac{\rho^s}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial q_1} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial q_3} + \frac{\sigma_z - \sigma_0}{q_3} = \frac{\rho^s}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (12)$$

夹芯与面板界面处的边界条件要求: 径向位移与应力连续; 在自由边界上要求: 径向应力以及剪切应力为 0. 通过引入矩形阶跃函数  $J$ , 让边界条件自动包含在如下的本构关系中<sup>[8, 11]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_0 \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & C_{13}^s & 0 \\ & C_{22}^s & C_{23}^s & 0 \\ \text{对称} & & C_{33}^s & 0 \\ & & & C_{44}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} kJ(kR_i, kR_o), \quad (13)$$

其中,  $\varepsilon_x = \partial u/\partial q_1$ ,  $\varepsilon_0 = w/q_3$ ,  $\varepsilon_z = \partial w/\partial q_3$ ,  $\gamma_{xz} = (\partial w/\partial q_1 + \partial u/\partial q_3)$ .  $C_{jk}^s$ 、 $\rho^s$  分别表示有效刚度系数和有效密度:

$$C_{jk}^s = \sum_{i=1}^3 C_{jk}^i J(kr_i, kr_{i+1}), \quad \rho^s = \sum_{i=1}^3 \rho^i J(kr_i, kr_{i+1}), \quad (14)$$

其中

$$J(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq q_3 \leq b, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (15)$$

$C_{jk}^i$ 、 $\rho^i$  分别表示各层的刚度系数和密度. 轴对称简谐波在无限长圆柱筒中, 沿对称轴自由传播, 其位移分量可表示为<sup>[8]</sup>

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\omega t - q_1)} \sum_{m=0}^{\infty} p_m^1 Q_m(q_3), \quad w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\omega t - q_1)} \sum_{m=0}^{\infty} p_m^3 Q_m(q_3), \quad (16)$$

其中

$$Q_m(q_3) = \sqrt{\frac{2m+1}{kH}} L_m \left( \frac{2q_3 - kD}{kH} \right), \quad H = R_o - R_i, \quad D = R_o + R_i, \quad (17)$$

$L_m$  为 Legendre 正交多项式系,  $m$  的取值理应从 0 到  $\infty$ , 实际上  $m$  取值为 0 到  $M$ ,  $M$  的取值取决于结果的收敛情况. 将(16)式代入(13)式, 然后再代入(12)式得

$$\begin{aligned} & \left[ C_{44}^s q_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} - C_{11}^s q_3^2 u + C_{44}^s q_3 \frac{\partial u}{\partial q_3} - i(C_{12}^s + C_{44}^s) q_3 w - \right. \\ & \left. i(C_{13}^s + C_{44}^s) q_3^2 \frac{\partial w}{\partial q_3} \right] J(kR_i, kR_o) + \left[ q_3^2 \frac{\partial u}{\partial q_3} - iq_3^2 w \right] \frac{\partial C_{44}^s}{\partial q_3} J(kR_i, kR_o) + \end{aligned}$$

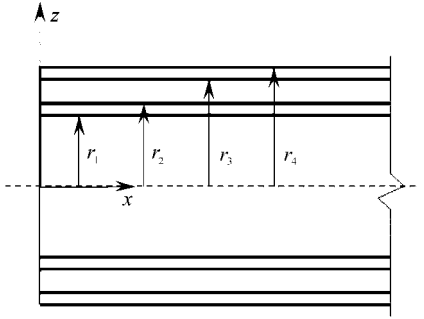


图 2 圆柱壳纵剖面示意图

$$\left[ q_3^2 \frac{\partial u}{\partial q_3} - i q_3^2 w \right] C_{44}^s \frac{\partial J(kR_i, kR_o)}{\partial q_3} = - \rho^s \frac{\omega^2}{k^2} q_3^2 u J(kR_i, kR_o), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & \left[ i(C_{12}^s - C_{13}^s) q_3 u - i(C_{13}^s + C_{44}^s) q_3^2 \frac{\partial u}{\partial q_3} + C_{33}^s q_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial q_3^2} + C_{33}^s q_3 \frac{\partial w}{\partial q_3} - C_{22}^s w - \right. \\ & \left. C_{44}^s q_3^2 w \right] J(kR_i, kR_o) + \left[ - i \frac{\partial C_{13}^s}{\partial q_3} q_3^2 u + \frac{\partial C_{33}^s}{\partial q_3} q_3^2 \frac{\partial w}{\partial q_3} + \frac{\partial C_{23}^s}{\partial q_3} q_3 w \right] J(kR_i, kR_o) + \\ & \left[ - i C_{13}^s q_3^2 u + C_{33}^s q_3^2 \frac{\partial w}{\partial q_3} + C_{23}^s q_3 w \right] \frac{\partial J(kR_i, kR_o)}{\partial q_3} = \\ & - \rho^s \frac{\omega^2}{k^2} q_3^2 w J(kR_i, kR_o). \end{aligned} \tag{19}$$

(18) 式和 (19) 式两边同时乘以  $1/(\sqrt{2\pi}Q_j(q_3))$ ,  $j$  取值从 0 到  $M$ , 并在  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $q_3 \in [kR_i, kR_o]$  区域上积分, 得到如下方程:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{m,j} & A_{13}^{m,j} \\ A_{31}^{m,j} & A_{33}^{m,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m^1 \\ p_m^3 \end{bmatrix} = - \frac{\omega^2}{k^2} \begin{bmatrix} M^{m,j} & 0 \\ 0 & M^{m,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m^1 \\ p_m^3 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

上式对指标  $m$  进行求和. 利用 Matlab<sup>®</sup> 的标准函数 eig 便可以解决上述广义特征值问题, 从而得到相速与波数之间的关系, 即频散关系, 进而可得临界速度.

### 3 算 例

#### 3.1 理论分析

夹层圆柱筒的示意图以及坐标系见图 1 和图 2. 内外面板为同一种各向同性材料, 夹芯为柱坐标下的正交各向异性材料, 夹层圆柱筒的材料参数和几何参数见表 1. 理论分析时, 筒为无限长, 有限元分析时取 1 m.

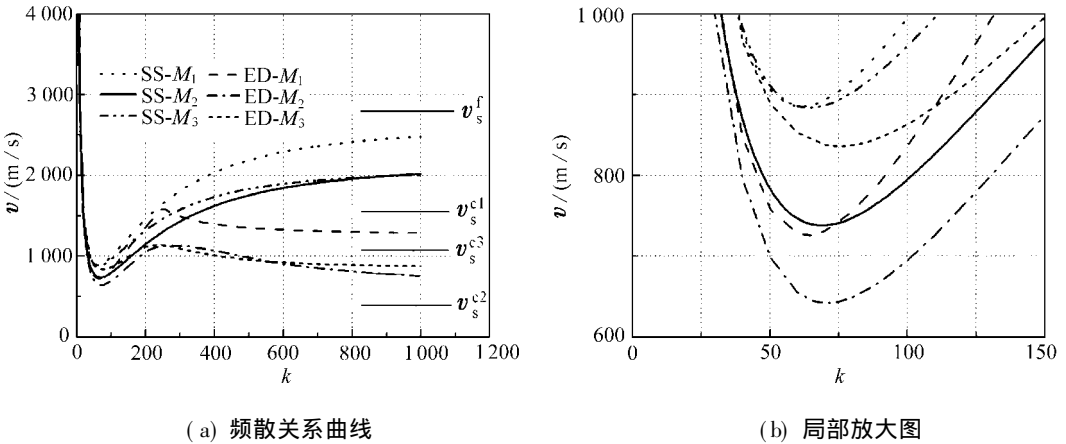


图 3 基于夹层壳理论 (SS) 和弹性动力学理论 (ED) 得到的频散关系曲线

应用夹层壳理论和弹性动力学理论, 分析轴对称谐波沿对称轴在无限长夹层圆筒中传播的问题, 得到频散关系曲线如图 3. 图中  $v_s^f = \sqrt{k^2 C_{44}^f / \rho^f}$  表示面板的剪切波速,  $v_s^{ci} = \sqrt{k^2 C_{44}^{ci} / \rho_{ci}}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示 3 种夹芯的剪切波速 ( $x-z$  平面). 最低阶频散关系曲线上的最小值即为临界速度, 两种理论预测的临界速度见表 2, 二者吻合的较好. 从图 3 可以看出, 当波数  $k \leq K$  ( $K = 250, 290, 240$  分别对应 3 种夹芯材料) 时, 两种理论得到的频散曲线吻合的

很好, 而当  $k > K$  后, 夹层壳理论预测的相速随着  $k$  的增加继续变大且收敛于  $v_{\text{lim}}^{\text{s}}$ ; 而弹性动力学理论预测的相速随着  $k$  的增加而变小且收敛于  $v_{\text{lim}}^{\text{e}}$ . 频散关系方程过于冗长复杂, 故在本文中并没有给出. 当  $k$  趋于无穷大时, 求解频散方程以及求解式 (20) 所示的特征值问题可分别得到  $v_{\text{lim}}^{\text{s}}$  和  $v_{\text{lim}}^{\text{e}}$ , 见表 2.  $v_{\text{lim}}^{\text{s}}$  接近面板的剪切波速  $v_s^{\text{f}} = 2\ 860.8\ \text{m/s}$ , 但比  $v_s^{\text{f}}$  要小;  $v_{\text{lim}}^{\text{e}}$  非常接近夹芯  $x-z$  平面内的剪切波速  $v_s^{\text{c1}} = 1\ 173.7\ \text{m/s}$ ,  $v_s^{\text{c2}} = 603.29\ \text{m/s}$ ,  $v_s^{\text{c3}} = 784.51\ \text{m/s}$ .

表 1 夹层圆柱壳的材料参数和几何参数

材 料 参 数	刚度系数 $C_{ij} / (\text{N/m}^2)$					密度 $\rho / (\text{kg/m}^3)$			
	面板	夹芯			面板 $\rho_{\text{f}}$	夹芯 $\rho_{\text{c}}$			
		$M_1$	$M_2$	$M_3$		$M_1$	$M_2$	$M_3$	
$C_{11}$	$259.8677 \times 10^9$	$12.6450 \times 10^9$	$2.0798 \times 10^9$	$50.9520 \times 10^9$	7 800	460.79	1 600	2 000	
$C_{12}$	$111.3462 \times 10^9$	$1.5292 \times 10^9$	$4.9554 \times 10^9$	$8.2990 \times 10^9$					
$C_{13}$	$111.3462 \times 10^9$	$1.7986 \times 10^9$	$1.6181 \times 10^9$	$3.4200 \times 10^9$					
$C_{22}$	$259.8677 \times 10^9$	$2.8377 \times 10^9$	$28.7650 \times 10^9$	$36.0720 \times 10^9$					
$C_{23}$	$111.3462 \times 10^9$	$3.3255 \times 10^9$	$7.7558 \times 10^9$	$0.0000 \times 10^9$					
$C_{33}$	$259.8677 \times 10^9$	$3.9558 \times 10^9$	$40.5670 \times 10^9$	$14.8700 \times 10^9$					
$C_{44}$	$74.2308 \times 10^9$	$0.7381 \times 10^9$	$0.6771 \times 10^9$	$1.4313 \times 10^9$					
几何 参数	内径 $R_i / \text{mm}$	外径 $R_o / \text{mm}$	面板厚度 $h_i / \text{mm}$	夹芯厚度 $h_c / \text{mm}$					
	140	190	5	40					

注 夹芯材料为二维周期性金属多孔材料, 其弹性常数由均匀化方法得到<sup>[12]</sup>.

表 2 两种理论预测的临界速度

m/s

	临界速度 $v_{\text{cri}}$		极限相速 ( $k \rightarrow \infty$ ) $v_{\text{lim}}$	
	SS	ED	SS	ED
$M_1$	885.72 ( $k = 62$ )	726.17 ( $k = 65$ )	2 620.8	1 265.6
$M_2$	738.31 ( $k = 69$ )	642.47 ( $k = 71$ )	2 152.4	650.55
$M_3$	883.89 ( $k = 64$ )	836.34 ( $k = 75$ )	2 079.8	845.96

### 3.2 数值模拟

用有限元软件 ABAQUS 进行模拟. 建立轴对称模型, 沿对称轴方向取 200 个轴对称实体单元, 沿径向面板取 5 个单元, 夹芯取 20 个单元. 内壁被分为 200 份, 每份上作用均布压力  $p_i$ , 如图 4 所示,  $p_i$  是时间和位置的函数

$$p_i = \begin{cases} 0, & t < (0.0025 + 0.005(i-1))/v_p, \\ 5 \times 10^6 \text{ Pa}, & t \geq (0.0025 + 0.005(i-1))/v_p, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 200, \quad (21)$$

其中,  $v_p$  为内压移动的速度. 将内壁分成更多分数时, 结构响应的改变很小, 说明取 200 份时, 结果已经收敛. 动力荷载作用下, 结构的位移响应的最大值要比同等水平静力荷载作用下的位移响应大得多. 定义动力学放大系数为: 动载作用下结构动响应的最大值与静载作用下的位移响应的比值<sup>[11]</sup>, 即  $\delta = w_{\text{max}}/w_{\text{sta}}$ . 图 5 表示夹芯材料为第一种正交各向异性材料  $M_1$ , 边界条件为固支和周期性边界条件时, 距离边界  $l = 0.5$  处, 即圆柱筒轴向中点处, 外面板、夹芯和内面板各层中面的径向位移的动力学放大系数 ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ). 由于理论分析考虑的是无

限长圆柱筒, 所以进行有限元分析时, 分析位置选在圆柱筒的中点处, 尽量远离边界, 减小边界条件对结构响应的影响. 从图 5 可以看的出边界条件对临界速度的预测影响很小, 预测的临界速度约为 920 m/s, 与应用夹层壳理论分析得到的临界速度吻合的很好, 误差约为 3.8%.

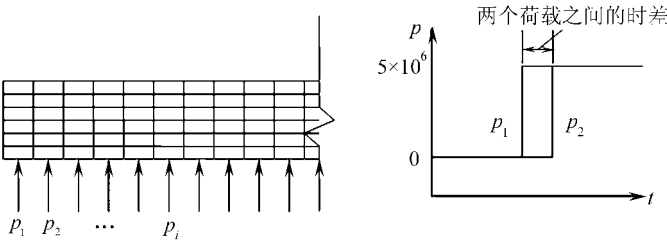


图 4 移动内压示意图

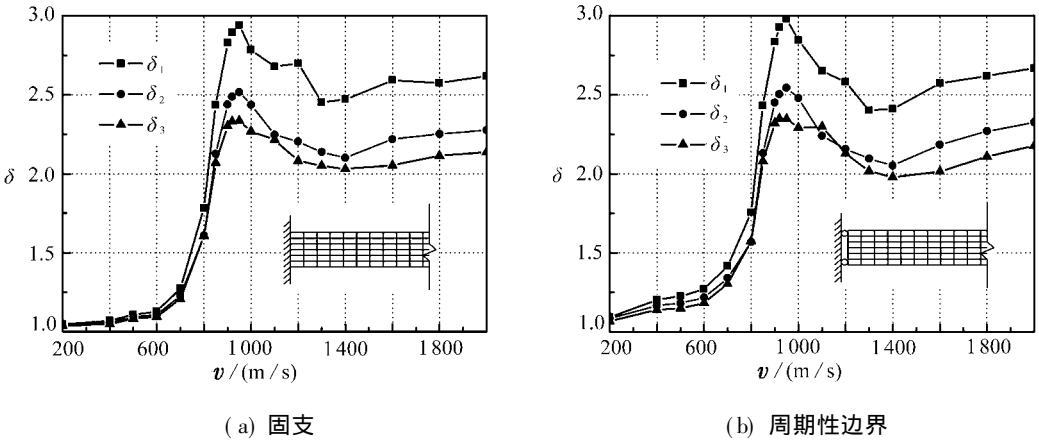


图 5 放大系数

## 4 结 论

基于夹层壳理论和弹性动力学理论, 分析了轴对称谐波在无限长夹层圆柱筒中沿对称轴传播的问题, 得到其频散关系曲线, 进一步得到了移动内压在夹层圆筒中移动的临界速度. 同时, 用有限元软件分析了两种边界条件情况下移动内压的临界值. 由分析的结果可得如下结论:

1) 当波数  $k$  ( $k \leq K$ ) 较小时, 基于夹层壳理论和弹性动力学理论得到频散曲线吻合得较好, 二者预测的临界速度亦吻合得较好, 而当  $k$  较大时二者得到频散曲线相差较大, 前者得到的相速随波数增加而变大, 且收敛于一个接近于面板剪切波速的定值; 后者得到的相速随波数增加而减小, 也收敛于一个定值, 该值非常接近于夹芯  $x-z$  平面内的剪切波速. 当  $k > K$  时, 两种理论得到的频散曲线之间发生分歧的原因还需进一步研究, 但当波长较长, 波数较小时, 两种理论分析夹层圆柱壳的波导问题是有效的.

2) 有限元预测的临界速度与应用夹层壳理论分析得到的临界速度吻合得很好, 与应用弹性动力学理论分析得到的结果吻合较好. 3 种方法都可以用来预测该临界速度.

致谢 作者感谢西北工业大学基础研究基金及博士创新基金(CX200810)的资助.

## 附 录

微分算子  $L_{ij}(\cdot)$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= (2D_{1+} D_2) \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}, L_{12} = \left[ 2\Lambda D_1 + \frac{h_c}{6R} D_2 \right] \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}, L_{13} = L_{24} = (2h_f D_{1-} - h_c D_2) \frac{h_f}{12R} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}, \\
L_{14} &= \left[ -\frac{h_f}{2} D_2 \right] \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}, L_{15} = - (2h_f C_{12+}^f + h_c C_{12}^c) \frac{1}{R} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, L_{16} = - 2C_{13}^c \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \\
L_{22} &= \left[ 2D_{1+} + \frac{1}{3} D_2 \right] \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - \frac{4}{h_c} \kappa^2 C_{44}^c, L_{23} = - \frac{h_f}{6} D_2 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{2h_f}{h_c} \kappa^2 C_{44}^c, L_{25} = - 2\kappa^2 C_{44}^c \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \\
L_{26} &= [6h_f C_{12+}^f + h_c(C_{12+}^f + C_{13}^c - \kappa^2 C_{44}^c)] \frac{1}{3R} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, L_{34} = (4\Lambda R D_1 + h_c D_2) \frac{h_f^2}{24R} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - 2h_f \kappa^2 C_{44}^c, \\
L_{33} &= (2D_{1+} D_2) \frac{h_f^2}{12} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - \frac{h_f}{h_c} (2h_c \kappa^2 C_{44}^c + h_f \kappa^2 C_{44}^c), L_{35} = (-2\kappa^2 C_{44}^c + \kappa^2 C_{44}^c) h_f \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \\
L_{36} &= [-12\Lambda R \kappa^2 C_{44}^c + h_c(\kappa^2 C_{44}^c - C_{12-}^c - C_{13}^c)] \frac{h_f}{6R} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, L_{45} = - (4\Lambda R \kappa^2 C_{44}^c + h_c C_{12}^c) \frac{h_f}{2R} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \\
L_{44} &= (2D_{1+} + 3D_2) \frac{h_f^2}{12} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - 2h_f \kappa^2 C_{44}^c, L_{46} = - (2\kappa^2 C_{44}^c + C_{13}^c) h_f \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \\
L_{55} &= (2h_f \kappa^2 C_{44}^c + h_c \kappa^2 C_{44}^c) \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - \frac{1}{R} [(a^+ + a^-) C_{22}^f + a^c C_{22}^c], \\
L_{56} &= \left[ 2\Lambda h_f \kappa^2 C_{44}^c + \frac{h_c}{6R} \kappa^2 C_{44}^c \right] \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \left[ (a^+ - a^-) C_{22}^f + 2\frac{b^c}{h_c} C_{22}^c + 2C_{23}^c \right], \\
L_{66} &= \left[ 2h_f \kappa^2 C_{44}^c + \frac{h_c}{3} \kappa^2 C_{44}^c \right] \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \left[ (a^+ + a^-) C_{22}^f + 4\frac{\eta^c}{h_c} C_{22}^c + 4\frac{R}{h_c} C_{33}^c \right].
\end{aligned}$$

质量矩阵

$$\rho = \begin{bmatrix} 2\rho_f h_f + \rho_c h_c & 2\Lambda \rho_f h_f + \rho_c \frac{h_c}{6R} & \rho_f \frac{h_f^3}{6R} - \rho_c \frac{h_c^2 h_f}{12R} & -\rho_c \frac{h_c h_f}{2} & 0 & 0 \\ & 2\rho_f h_f + \rho_c \frac{h_c}{3} & -\rho_c \frac{h_c h_f}{6} & \rho_f \frac{h_f^3}{6R} - \rho_c \frac{h_c^2 h_f}{12R} & 0 & 0 \\ & & \rho_f \frac{h_f^3}{6} + \rho_c \frac{h_c h_f^2}{12} & \Lambda \rho_f \frac{h_f^3}{6} + \rho_c \frac{h_c^2 h_f^2}{24R} & 0 & 0 \\ & & & \rho_f \frac{h_f^3}{6} + \rho_c \frac{h_c h_f^2}{4} & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & & 2\rho_f h_f + \rho_c h_c & 2\Lambda \rho_f h_f + \rho_c \frac{h_c}{6R} \\ & & & & & 2\rho_f h_f + \rho_c \frac{h_c}{3} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
a^+ &= \ln \left[ \frac{1 + (h_c + 2h_f)/(2R)}{1 + h_f/(2R)} \right], a^- = \ln \left[ \frac{1 - h_f/(2R)}{1 - (h_c + 2h_f)/(2R)} \right], a^c = \ln \left[ \frac{1 + h_f/(2R)}{1 - h_f/(2R)} \right], \\
b^c &= h_c - R a^c, \eta^c = R^2 a^c - R h_c, \Lambda = (h_f + h_c)/(2R), D_1 = h_f C_{11}^f, D_2 = h_c C_{11}^c, \kappa^2 = 0.86
\end{aligned}$$

为截面修正系数。

## [参 考 文 献]

- [1] Beltman W M, Shepherd J E. Linear elastic response of tubes to internal detonation loading[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **252**(4): 617- 655.
- [2] Simkins T E. Amplification of flexural waves in gun tubes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **172**(2): 145- 154.
- [3] Han X, Liu G R, Xi Z C, et al. Characteristics of waves in a functionally graded cylinder[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(3): 653- 676.
- [4] Gazis D C. Three- dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinder I : analytical foundation[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1959, **31**(5): 568- 573.
- [5] Mirsky I. Axisymmetric vibrations of orthotropic cylinders[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*,



- 1964, **36**(11) : 2106– 2112.
- [6] Markus S, Mead D J. Axisymmetric and asymmetric wave motion in orthotropic cylinders[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **181**(1) : 127– 147.
- [7] Mirsky I. Vibration of orthotropic, thick, cylindrical shells[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, **36**(1) : 41– 51.
- [8] Elmaimouni L, Lefebvre J E, Zhang V, et al. A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length[J]. *Wave Motion*, 2005, **42**(2) : 177– 189.
- [9] Elmaimouni L, Lefebvre J E, Zhang V, et al. Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach [J]. *NDT & E International*, 2005, **38**(5) : 344– 353.
- [10] Markus S, Mead D J. Wave motion in a three– layered, orthotropic isotropic orthotropic, composite shell[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **181**(1) : 149– 167.
- [11] Kim Y, Hunt W D. Acoustic fields and velocities for surface– acoustic– wave propagation in multilayered structures: an extension of the laguerre polynomial approach[J]. *Journal of Applied Physics*, 1990, **68**(10) : 4993– 4997.
- [12] 周加喜, 邓子辰. 类桁架夹层板的等效弹性常数研究[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(2) : 187– 192.

## On the Critical Velocity of the Sandwich Cylindrical Shell to Moving Internal Pressure

ZHOU Jia-xi<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,2</sup>, HOU Xiu-hui<sup>1</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,

Xi'an 710072, P. R. China;

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

**Abstract:** The critical velocity of the infinite long sandwich shell to moving internal pressure is studied using sandwich shell theory and elastodynamics theory. Firstly the propagation of axisymmetric free harmonic waves in the sandwich shell was studied using sandwich shell theory considering the compressibility of core and the transverse shear deformation of core and face sheets. Secondly on the basis of elastodynamics theory, the displacement components expanded by Legendre polynomials, as well as position– dependent elastic constants and densities were introduced into the equations of motion. The critical velocity is the minimum phase velocity on the dispersion relation curve obtained using the two methods. Finally the numerical examples and FE simulations were executed. Results show that the two critical velocities agree well with each other, and two dispersion relation curves agree well with each other when wave number  $k$  is relatively small; however two limit phase velocities approach the shear wave velocities of the face sheet and the core respectively when  $k$  limits to infinite. The two methods are efficient to investigate wave propagation in the sandwich cylindrical shell, when  $k$  is relatively small. The critical velocity predicted by FE simulations agrees well with that predicted by theoretical analysis.

**Key words:** sandwich cylindrical shell; critical velocity; sandwich shell theory; elastodynamics; Legendre polynomial