

被动约束层阻尼圆柱壳振动和阻尼分析 的一种新矩阵方法*

向 宇¹, 黄玉盈², 陆 静¹, 袁丽芸^{1,2}, 邹时智²

(1. 广西工学院 汽车工程系, 广西 柳州 545006;

2. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074)

(傅衣铭推荐)

摘要: 基于线弹性薄壳理论和线粘弹性理论, 考虑粘弹性层的剪切耗能作用和各层间的相互作用力, 导出了被动约束层阻尼层合圆柱壳在谐激励作用下的一阶常微分矩阵控制方程. 然后, 借助作者提出的齐次扩容精细积分技术建立了一种新的矩阵方法, 并利用该方法研究了层合圆柱壳的振动特性和阻尼特性. 该方法与已提出的以位移及其导数作为状态向量的传统传递矩阵法的根本区别在于, 控制方程中的状态向量中包含了层合壳的全部位移和整合内力变量, 因此, 可以方便地适用于各种位移和内力边界条件以及部分环状覆盖约束层阻尼圆柱壳的动态分析. 数值算例与解析解和有限元解的结果比较有力说明了该方法的正确性和有效性.

关键词: 约束层阻尼; 一阶矩阵微分方程; 圆柱壳; 精细积分法

中图分类号: TU311 **文献标识码:** A

引 言

约束层阻尼(constrained layer damping, CLD)分为主动约束层(压电材料制成)阻尼(active constrained layer damping, ACLD)和被动约束层(普通弹性材料制成)阻尼(passive constrained layer damping, PCLD)两种,这两种结构都是通过约束粘弹层的剪切变形达到大量耗散振动能量的目的,它们对抑制和减少结构的振动和噪声有很好的效果. 近几年关于 ACLD 和 PCLD 壳的研究,包括建模、分析方法与减振性能等,已受到国内外学者的广泛重视^[1-5]. 关于这类结构的分析方法,从目前已发表的文献来看,主要以有限元法居多^[6-8],印度学者 Ramesh 和 Ganesan 自上世纪 90 年代以来采用有限元法研究了多种 CLD 结构的动力学问题,发表了一系列文章^[9-11],我国学者章艺、申智春、田晓耕和王淼等也采用有限元法或谱有限元法对 PCLD、ACLD 梁、板和壳的动力学问题进行了研究^[12-15],取得了很多的成果,因此基于有限元法分析 PCLD 和 ACLD 的主、被动振动控制问题在理论上已基本成熟. 有限元法虽然具有适应范围广、对结构形状没有特殊要求的优点,但却存在离散变量和自由度过多而导致太费时,且由于其采用

* 收稿日期: 2008-04-23; 修订日期: 2008-10-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10662003); 教育部博士点专项基金资助项目(20040787013)

作者简介: 向宇(1963-),男,重庆人,教授,博士(联系人. Tel/Fax: +86-772-2686519; E-mail: xiang_yu@126.com).

低阶形函数离散插值, 高频响应精度差, 故仅适用于中、低频范围. 传递矩阵或传递函数法是一种比较适合于分析板、壳结构问题的半解析方法, 尤其通过与高精度的精细积分法相结合, 具有更好的效果^[16]. 最近, 王森、方之楚用谱传递矩阵法^[17], 计算和分析了 ACLD 部分覆盖圆柱壳的振动控制问题, 在减少自由度数目和计算工作量方面, 收到了一定效果, 但他们只限于讨论轴对称模型, 研究对象比较简单. 李恩奇和雷勇军等人^[18-19]基于 Hamilton 原理提出了一种分析 CLD 梁和 CLD 圆柱壳动力学问题的传递函数法, 导出了以位移及其高阶导数为状态向量的一阶常微分矩阵方程, 这对拓展传递矩阵法或传递函数法的应用范围起到了积极的作用. 但由于该模型是以位移及其高阶导数为状态向量, 其中不含轴力、剪力和弯矩等内力量, 因而对于给出的力学边界条件, 需要用位移及其导数形式去间接描述内力之后才能使用, 应用起来较不方便; 另外, 也是由于该模型的状态向量不包含内力量, 如将其推广用于分析 ACLD 多层圆柱壳的振动控制问题, 压电效应引起的控制力较难直接加入, 应用范围受到了一定的限制.

本文试图从圆柱壳的基本方程出发, 计及粘性层剪切耗能的影响, 导出 CLD 圆柱层合壳在最一般情况下的整合一阶常微分矩阵方程, 方程中的 12 个状态变量包含了全部独立的位移变量和内力变量, 可以很方便地直接用于几乎所有的边界支承条件以及全覆盖或部分覆盖 CLD 壳的各种情况, 这是本文研究成果的最大亮点, 该模型的建立, 为采用我们提出的齐次扩容精细积分法^[16]进一步求解 PCLD 圆柱层合壳问题奠定了基础, 同时也为拓宽研究 ACLD 结构的动力学控制问题提供了有力手段.

1 PCLD 圆柱层合壳的控制方程

图 1 所示为一 PCLD 圆柱层合壳, 它由基壳层、粘弹阻尼层和约束层 3 部分组成. 基壳(最里层)的半径和厚度分别用 R_1 、 h_1 表示; 粘弹阻尼层(VEM)的半径和厚度分别为 R_2 、 h_2 ; 约束层(CL)的半径和厚度用 R_3 、 h_3 表示.

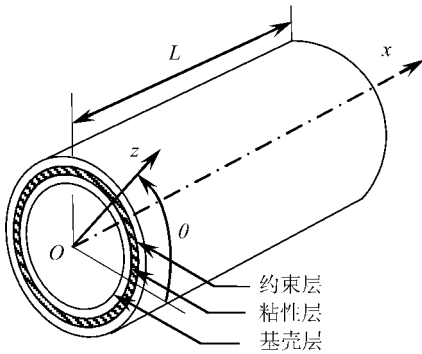


图 1 PCLD 圆柱层合壳的几何表示

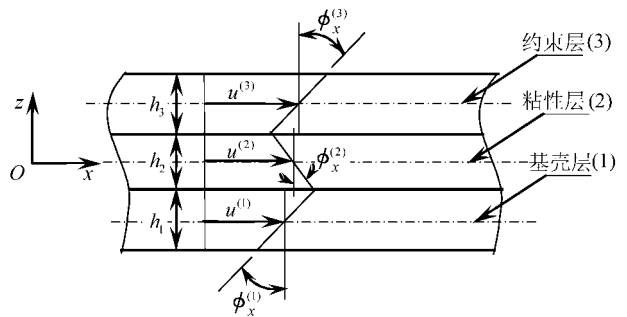


图 2 层合壳变形协调关系

为了简化, 和以往有关文献一样作以下假设: (a) 不计 PCLD 壳厚度方向的挤压线应变, 3 层材料沿径向的位移相同; (b) 各层之间粘结完好没有滑移, 层间位移连续; (c) 粘弹阻尼层只考虑主要的剪切变形, 略去其抗拉、弯刚度; (d) 基壳和约束层的弯曲变形符合 Kirchhoff 平面假定; (e) 截面转动惯量与线加速度惯性相比可以忽略; (f) 在粘弹阻尼层中只考虑横(径)向振动惯量, 面内惯性忽略不计.

1.1 粘弹阻尼层的剪切变形与剪力

设 $(u^{(1)}, v^{(1)}, w)$ 和 $(u^{(3)}, v^{(3)}, w)$ 分别表示基壳和约束层中面沿 x 、 θ 、 z (柱坐标)3 个方向

的位移幅值; $\phi_x = \gamma_{zx}$ 和 $\phi_\theta = \gamma_{z\theta}$ 分别表示粘弹阻尼层的剪切变形幅值. 由图 2 的变形协调关系容易得到粘弹阻尼层在 x 方向的中面位移和绕中轴的转角幅值

$$\begin{cases} u^{(2)}(x, \theta) = \frac{1}{2} \left[\left(u^{(3)} - \frac{h_3}{2} \phi_x^{(3)} \right) + \left(u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \phi_x^{(1)} \right) \right], \\ \phi_x^{(2)}(x, \theta) = \frac{1}{h_2} \left[\left(u^{(3)} - \frac{h_3}{2} \phi_x^{(3)} \right) - \left(u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \phi_x^{(1)} \right) \right], \end{cases} \quad (1)$$

同理, 在 θ 方向有

$$\begin{cases} v^{(2)}(x, \theta) = \frac{1}{2} \left[\left(v^{(3)} - \frac{h_3}{2} \phi_\theta^{(3)} \right) + \left(v^{(1)} + \frac{h_1}{2} \phi_\theta^{(1)} \right) \right], \\ \phi_\theta^{(2)}(x, \theta) = \frac{1}{h_2} \left[\left(v^{(3)} - \frac{h_3}{2} \phi_\theta^{(3)} \right) - \left(v^{(1)} + \frac{h_1}{2} \phi_\theta^{(1)} \right) \right], \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\phi_x^{(i)}$ 和 $\phi_\theta^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别表示第 1、2、3 层横截面沿 x 方向和 θ 方向的转角. 对于基壳和约束壳, 由 Kirchhoff 平面假定与柱壳理论, 有

$$\phi_x^{(i)} = -\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x, \quad \phi_\theta^{(i)} = \frac{1}{R_i} \left(v^{(i)} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad i = 1, 3, \quad (3)$$

其中, R_i 表示第 i 层中面周向的曲率半径. 对于粘性层内任意点的位移, 采用一阶剪切变形理论, 有

$$\begin{cases} u(x, \theta, z) = u^{(2)}(x, \theta) + z \phi_x^{(2)}(x, \theta), \\ v(x, \theta, z) = v^{(2)}(x, \theta) + z \phi_\theta^{(2)}(x, \theta), \\ w(x, \theta, z) = w(x, \theta). \end{cases} \quad (4)$$

将(4)式代入正交曲线坐标下的应变-位移关系^[20], 可得粘性层剪切应变^[21]

$$\phi_x = \gamma_{zx} = \phi_x^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x^{(2)} - \phi_x, \quad \phi_\theta = \gamma_{z\theta} = \phi_\theta^{(2)} - \frac{v^{(2)}}{R_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (5)$$

将(1)、(2)和(3)式代入(5)式, 并由虎克定律可求出粘性层内沿 x 和 θ 方向的剪应力幅值

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G_2 \gamma_{zx} = G_2 \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\left(u^{(3)} - u^{(1)} \right) - \left(h_2 + \frac{h_1 + h_3}{2} \right) \phi_x \right] \right\}, \\ \tau_{z\theta} = G_2 \gamma_{z\theta} = \\ G_2 \left\{ \left[\frac{2R_3 - h_3}{2h_2R_3} - \frac{2R_3 - h_3}{4R_2R_3} \right] v^{(3)} - \left[\frac{2R_1 + h_1}{2h_2R_1} + \frac{2R_1 + h_1}{4R_1R_2} \right] v^{(1)} + \right. \\ \left. \left[\frac{h_1}{2h_2R_1} + \frac{h_3}{2h_2R_3} - \frac{h_3}{4R_2R_3} + \frac{h_1}{4R_2R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\}, \end{cases} \quad (6)$$

这里 G_2 为粘性层的复剪切模量. 以上剪应力在讨论基壳与约束壳的平衡方程时必须考虑.

(6)式说明粘性层的剪切变形并未增加新的未知量, 它们的值依赖于上、下两层的线位移和转角幅值.

1.2 基壳的一阶状态向量常微分矩阵方程

设基壳上单位长度的膜内力和弯曲内力幅值分别为 $N_x^{(1)}$ 、 $N_\theta^{(1)}$ 、 $N_{\theta x}^{(1)}$ 和 $M_x^{(1)}$ 、 $M_\theta^{(1)}$ 、 $M_{\theta x}^{(1)}$ 、 $Q_x^{(1)}$ 、 $Q_\theta^{(1)}$; 材料质量密度为 ρ_1 ; 在谐激励作用下, 设作用在基壳中面上面力幅值分别为 $p_x^{(1)}$ 、 $p_\theta^{(1)}$ 和 $p_z^{(1)}$, 这里需要强调的是, 在这 3 个面力中除了外激励力外, 还包含基壳与粘性层的相互作用力, 具体处理我们后面讨论. 在谐激励作用下, 基壳的平衡方程可写成^[20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta k}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \rho_1 h_1 \omega^2 u^{(1)} + p_x^{(1)} = 0, \\ \frac{\partial N_{x\theta}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \frac{Q_{\theta}^{(1)}}{R} + \rho_1 h_1 \omega^2 v^{(1)} + p_{\theta}^{(1)} = 0, \\ \frac{\partial Q_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} - \frac{N_{\theta}^{(1)}}{R_1} + \rho_1 h_1 \omega^2 w + p_z^{(1)} = 0, \\ \frac{\partial M_{x\theta}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} - Q_{\theta}^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta k}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} - Q_x^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

式中, 上标(1)表示基壳物理量; ω 表示外谐激励圆频率(或固有圆频率). Kelvin-Kirchhoff等效面内剪力和等效横向剪力幅值为

$$S_x^{(1)} = N_{x\theta}^{(1)} + \frac{1}{R_1} M_{x\theta}^{(1)}, \quad V_x^{(1)} = Q_x^{(1)} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_{x\theta}^{(1)}}{\partial \theta}. \quad (8)$$

基壳的内力和位移关系采用 Reissner 模型, 可写成^[20]

$$\begin{cases} N_x^{(1)} = K^{(1)} \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \mu_1 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \frac{w}{R_1} \right) \right], \\ N_{\theta}^{(1)} = K^{(1)} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \frac{w}{R_1} + \mu_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right], \\ N_{x\theta}^{(1)} = N_{\theta k}^{(1)} = K^{(1)} \left[\frac{1 - \mu_1}{2} \right] \left(\frac{\partial u^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right), \\ M_x^{(1)} = D^{(1)} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial \phi_{\theta}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} \right), \quad M_{\theta}^{(1)} = D^{(1)} \left(\frac{\partial \phi_{\theta}^{(1)}}{R_1 \partial \theta} + \mu_1 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right), \\ M_{x\theta}^{(1)} = M_{\theta k}^{(1)} = D^{(1)} (1 - \mu_1) \frac{\partial \phi_{\theta}^{(1)}}{\partial x} = D^{(1)} (1 - \mu_1) \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} \right), \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{R_1} \left(v^{(1)} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad K^{(1)} = \frac{E_1 h_1}{1 - \mu_1^2}, \quad D^{(1)} = \frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \mu_1^2)},$$

E_1 为基壳弹性模量, μ_1 为基壳 Poisson 比.

根据封闭圆周的几何特点, 基壳中面位移和内力幅值沿 θ 方向的变化可展开为

$$(u^{(1)}, w) = L \sum_n u_n^{(1)}, w_n \cos(n\theta),$$

$$v^{(1)} = L \sum_n v_n^{(1)} \sin(n\theta),$$

$$\phi_x = \sum_n \phi_{xn} \cos(n\theta),$$

$$(N_x^{(1)}, N_{\theta}^{(1)}, Q_x^{(1)}, V_x^{(1)}) = K^{(1)} \sum_n (N_{xn}^{(1)}, N_{\theta n}^{(1)}, Q_{xn}^{(1)}, V_{xn}^{(1)}) \cos(n\theta),$$

$$(N_{x\theta}^{(1)}, N_{\theta k}^{(1)}, Q_{\theta}^{(1)}, S_x^{(1)}) = K^{(1)} \sum_n (N_{x\theta n}^{(1)}, N_{\theta k n}^{(1)}, Q_{\theta n}^{(1)}, S_{xn}^{(1)}) \sin(n\theta),$$

$$(M_x^{(1)}, M_{\theta}^{(1)}) = (LK^{(1)}) \sum_n (M_{xn}^{(1)}, M_{\theta n}^{(1)}) \cos(n\theta),$$

$$(M_{x\theta}^{(1)}, M_{\theta k}^{(1)}) = (LK^{(1)}) \sum_n (M_{x\theta n}^{(1)}, M_{\theta k n}^{(1)}) \sin(n\theta),$$

$$(p_x^{(1)}, p_z^{(1)}) = \sum_n (p_{xn}^{(1)}, p_{zn}^{(1)}) \cos(n\theta), \quad p_{\theta}^{(1)} = \sum_n \rho_{\theta n}^{(1)} \sin(n\theta),$$

式中,带帽“—”的量为待求的无量纲状态量,它们仅仅是无量纲坐标 $\xi = x/L$ 的函数; L 为 PCLD 圆柱壳的长度(见图 1). 为了书写方便,在下面的公式推导中我们省略掉求和下标 n .

联立(7)~(9)式,从方程中消掉 $N_{\theta}^{(1)}$ 、 $N_{\theta x}^{(1)}$ 、 $N_{x\theta}^{(1)}$ 、 $M_{\theta}^{(1)}$ 、 $M_{\theta x}^{(1)}$ 、 $M_{x\theta}^{(1)}$ 、 $Q_x^{(1)}$ 、 $Q_{\theta}^{(1)}$ 变量,可得基壳的 8 个一阶状态微分方程,写成矩阵形式

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ w \\ \phi_x \\ N_x^{(1)} \\ S_x^{(1)} \\ V_x^{(1)} \\ M_x^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12}^{(1)} & g_{13}^{(1)} & 0 & g_{15}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ g_{21}^{(1)} & 0 & 0 & g_{24}^{(1)} & 0 & g_{26}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{42}^{(1)} & g_{43}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{48}^{(1)} \\ g_{51}^{(1)} & 0 & 0 & g_{54}^{(1)} & 0 & g_{56}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{62}^{(1)} & g_{63}^{(1)} & 0 & g_{65}^{(1)} & 0 & 0 & g_{68}^{(1)} \\ 0 & g_{72}^{(1)} & g_{73}^{(1)} & 0 & g_{75}^{(1)} & 0 & 0 & g_{78}^{(1)} \\ g_{81}^{(1)} & 0 & 0 & g_{84}^{(1)} & 0 & g_{86}^{(1)} & g_{87}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ w \\ \phi_x \\ N_x^{(1)} \\ S_x^{(1)} \\ V_x^{(1)} \\ M_x^{(1)} \end{pmatrix} - \left(\frac{L}{K^{(1)}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_x^{(1)} \\ p_{\theta}^{(1)} \\ p_z^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

系数矩阵 $g_j^{(1)}$ 中的非 0 元素如下:

$$\begin{aligned} g_{12}^{(1)} &= - \left(\frac{\mu_1 n L}{R_1} \right), \quad g_{13}^{(1)} = - \left(\frac{\mu_1 L}{R_1} \right), \quad g_{15}^{(1)} = 1, \\ g_{21}^{(1)} &= \left(\frac{n L}{R_1} \right) A_1, \quad g_{24}^{(1)} = \left(\frac{h_1^2 n}{6 R_1^2} \right) A_1, \quad g_{26}^{(1)} = \left(\frac{2 A_1}{1 - \mu_1} \right), \quad g_{34}^{(1)} = -1, \\ g_{42}^{(1)} &= - \left(\frac{\mu_1 n L^2}{R_1^2} \right), \quad g_{43}^{(1)} = - \left(\frac{\mu_1 n^2 L^2}{R_1^2} \right), \quad g_{48}^{(1)} = \left(\frac{12 L^2}{h_1^2} \right), \\ g_{51}^{(1)} &= \left[\left(\frac{n^2 L^2}{2 R_1^2} \right) (1 - \mu_1)(1 - A_1) - \lambda_1^2 \right], \quad g_{54}^{(1)} = - \left(\frac{n^2 h_1^2 L}{12 R_1^3} \right) (1 - \mu_1) A_1, \\ g_{56}^{(1)} &= - \left(\frac{n L}{R_1} \right) A_1, \quad g_{62}^{(1)} = \left[n^2 L^2 (1 - \mu_1^2) \left(\frac{h_1^2 + 12 R_1^2}{12 R_1^4} \right) - \lambda_1^2 \right], \\ g_{63}^{(1)} &= (1 - \mu_1^2) L^2 \left(\frac{h_1^2 n^3 + 12 R_1^2 n}{12 R_1^4} \right), \quad g_{65}^{(1)} = \left(\frac{\mu_1 n L}{R_1} \right), \quad g_{68}^{(1)} = \left(\frac{\mu_1 n L^2}{R_1^2} \right), \\ g_{72}^{(1)} &= (1 - \mu_1^2) L^2 \left(\frac{n^3 h_1^2 + 12 n R_1^2}{12 R_1^4} \right), \\ g_{73}^{(1)} &= \left[(1 - \mu_1^2) L^2 \left(\frac{n^4 h_1^2 + 12 R_1^2}{12 R_1^4} \right) - \lambda_1^2 \right], \\ g_{75}^{(1)} &= \left(\frac{\mu_1 L}{R_1} \right), \quad g_{78}^{(1)} = \left(\frac{\mu_1 n^2 L^2}{R_1^2} \right), \quad g_{81}^{(1)} = - (1 - \mu_1) \left(\frac{n^2 h_1^2 L}{6 R_1^3} \right) A_1, \\ g_{84}^{(1)} &= (1 - \mu_1) \left(\frac{n^2 h_1^2}{6 R_1^2} \right) \left(1 - \frac{h_1^2}{6 R_1^2} A_1 \right), \quad g_{86}^{(1)} = - \left(\frac{n h_1^2}{3 R_1^2} \right) A_1, \quad g_{87}^{(1)} = 1, \end{aligned}$$

其中, $A_1 = \left(\frac{6 R_1^2}{6 R_1^2 + h_1^2} \right)$, 频率参数: $\lambda_1^2 = \frac{\rho_1 h_1 \omega^2 L^2}{K^{(1)}}$.

1.3 约束壳的一阶状态向量常微分矩阵方程

同理可得到约束壳的 8 个一阶状态微分方程(物理量用上标(3)表示)

$$\frac{d}{d\xi} \begin{Bmatrix} u^{(3)} \\ v^{(3)} \\ w \\ \phi_x \\ N_x^{(3)} \\ S_x^{(3)} \\ V_x^{(3)} \\ M_x^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12}^{(3)} & g_{13}^{(3)} & 0 & g_{15}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ g_{21}^{(3)} & 0 & 0 & g_{24}^{(3)} & 0 & g_{26}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{34}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{42}^{(3)} & g_{43}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{48}^{(3)} \\ g_{51}^{(3)} & 0 & 0 & g_{54}^{(3)} & 0 & g_{56}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & g_{62}^{(3)} & g_{63}^{(3)} & 0 & g_{65}^{(3)} & 0 & 0 & g_{68}^{(3)} \\ 0 & g_{72}^{(3)} & g_{73}^{(3)} & 0 & g_{75}^{(3)} & 0 & 0 & g_{78}^{(3)} \\ g_{81}^{(3)} & 0 & 0 & g_{84}^{(3)} & 0 & g_{86}^{(3)} & g_{87}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(3)} \\ v^{(3)} \\ w \\ \phi_x \\ N_x^{(3)} \\ S_x^{(3)} \\ V_x^{(3)} \\ M_x^{(3)} \end{Bmatrix} - \left(\frac{L}{K^{(3)}} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_x^{(3)} \\ p_\theta^{(3)} \\ p_z^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

系数矩阵元素 $g_{ij}^{(3)}$ 仅需将基壳方程中对应元素的几何和物理量换为约束壳的几何和物理量即可。

1.4 粘弹阻尼层的法向平衡方程

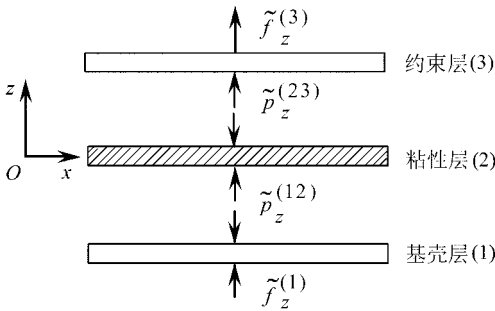


图3 层合壳之间的法向相互作用力

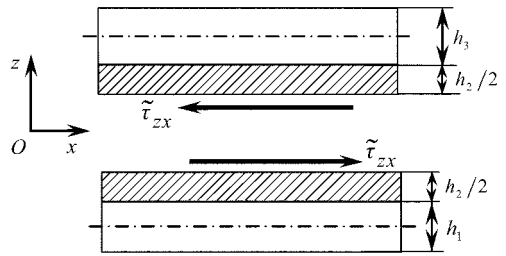


图4 粘性层壳中的剪切力

对于粘性层, 根据前面的假设, 不计其抗拉、抗弯刚度, 计及纵向惯性, 忽略面内惯性. 因此由图3的受力图, 容易写出在频域内的法向平衡方程

$$p_z^{(12)} - p_z^{(23)} + \rho_2 h_2 \omega^2 w = 0, \quad (12)$$

式中, $p_z^{(12)}$ 表示基壳与粘性层之间的法向相互作用力; $p_z^{(23)}$ 表示约束壳与粘性层之间的法向相互作用力。

1.5 基壳和约束壳的中面作用力

在基壳状态方程(10)式和约束壳状态方程(11)式中, 中面作用力 $p_x^{(1)}$ 、 $p_\theta^{(1)}$ 、 $p_z^{(1)}$ 以及 $p_x^{(3)}$ 、 $p_\theta^{(3)}$ 、 $p_z^{(3)}$ 包含了外激励力和各层之间的相互作用内力. 我们从粘性层的中面截开, 图4是粘性层剪切力的作用示意图, 其表达式已由(6)式给出. 将(6)式沿周向用 Fourier 级数展开, 并引入无量纲变量后, 得

$$\begin{cases} \tau_x = G_2 \gamma_{zx} = T_1 u^{(1)} + T_2 \phi_x + T_3 u^{(3)}, \\ \tau_\theta = G_2 \gamma_{z\theta} = T_4 w^{(1)} + T_5 w + T_6 v^{(3)}, \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$T_1 = -\frac{G_2 L}{h_2}, \quad T_2 = -G_2 \left(1 + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} \right), \quad T_3 = \frac{G_2 L}{h_2},$$

$$T_4 = -G_2 L \left[\frac{2R_1 + h_1}{2h_2 R_1} + \frac{2R_1 + h_1}{4R_1 R_2} \right],$$

$$T_5 = - (G_2Ln) \left[\frac{h_1}{2h_2R_1} + \frac{h_3}{2h_2R_3} - \frac{h_3}{4R_2R_3} + \frac{h_1}{4R_2R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

$$T_6 = G_2L \left[\frac{2R_3 - h_3}{2h_2R_3} - \frac{2R_3 - h_3}{4R_2R_3} \right].$$

综合上述各层间的法向和切向相互作用力(图 3、图 4 所示), 基壳和约束壳的中面作用力 $p_x^{(1)}$ 、 $p_\theta^{(1)}$ 、 $p_z^{(1)}$ 和 $p_x^{(3)}$ 、 $p_\theta^{(3)}$ 、 $p_z^{(3)}$ 可以写成:

$$\begin{cases} p_x^{(1)} = f_x^{(1)} + \tau_{zx}, & p_\theta^{(1)} = f_\theta^{(1)} + \tau_{z\theta}, \\ p_z^{(1)} = f_z^{(1)} - p_z^{(12)} + \left[\frac{e_1}{L} \right] \frac{d\tau_{zx}}{d\xi} + n \left[\frac{e_1}{R_1} \right] \tau_{z\theta}, \end{cases} \quad (14a)$$

$$\begin{cases} p_x^{(3)} = f_x^{(3)} - \tau_{zx}, & p_\theta^{(3)} = f_\theta^{(3)} - \tau_{z\theta}, \\ p_z^{(3)} = f_z^{(3)} + p_z^{(23)} + \left[\frac{e_3}{L} \right] \frac{d\tau_{zx}}{d\xi} + n \left[\frac{e_3}{R_3} \right] \tau_{z\theta}, \end{cases} \quad (14b)$$

其中, $e_1 = (h_1 + h_2)/2$, $e_3 = (h_2 + h_3)/2$, $f_x^{(1)}$ 、 $f_\theta^{(1)}$ 、 $f_z^{(1)}$ 以及 $f_x^{(3)}$ 、 $f_\theta^{(3)}$ 、 $f_z^{(3)}$ 分别表示作用在基壳和约束壳中面上各方向的外激励力幅值, 自由振动分析时它们全部为 0. 从(14)式可以看出, 在法向作用力中已考虑了剪切力偏心的影响.

2 PCLD 圆柱层合壳的整合一阶常微分矩阵方程

(14) 式中不仅包含有可以用其它变量表示的剪切力 τ_{zx} 和 $\tau_{z\theta}$ ((13) 式), 同时还包含有未知的法向相互作用力 $p_z^{(12)}$ 和 $p_z^{(23)}$. 正是因为这两个未知的内力, 使得矩阵微分方程(10)、(11)式无法直接求解, 需要利用(12)式将它们从基壳和约束壳的控制方程中消掉才能建立可求解的控制方程.

将(14)式分别代入(10)和(11)相应式中, 并利用粘性层的法向平衡方程(12)式, 消去未知的法向内力 $p_z^{(12)}$ 、 $p_z^{(23)}$ 和一些非独立变量后, 经归并整理后可得 PCLD 圆柱壳的整合一阶常微分矩阵方程(推导过程详见附录)

$$A \frac{d}{d\xi} \mathbf{Z} = \mathbf{BZ} + \mathbf{F}, \quad (15)$$

式中 $\mathbf{Z} = \left\{ u^{(1)}, v^{(1)}, w, \phi_x, N_x^{(1)}, S_x^{(1)}, \left[V_x^{(1)} + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} V_x^{(3)} \right], M_x^{(1)}, u^{(3)}, v^{(3)}, N_x^{(3)}, S_x^{(3)} \right\}^T$

称为 PCLD 层合壳壳元的整合状态向量, 从中可以看出它的每个状态变量元素都有明确的物理意义, 因此无论是位移边界条件或力学边界条件都可以用状态变量直接表达, 非常方便; $\mathbf{F} = \left\{ 0, 0, 0, 0, p_x^{(1)}, p_\theta^{(1)}, p_z^{(1+3)}, 0, 0, 0, p_x^{(3)}, p_\theta^{(3)} \right\}^T$ 是无量纲外谐激励载荷向量幅值, 其具体形式是

$$\begin{cases} p_x^{(1)} = - \left[\frac{L}{K^{(1)}} \right] f_x^{(1)}, & p_\theta^{(1)} = - \left[\frac{L}{K^{(1)}} \right] f_\theta^{(1)}, \\ p_x^{(3)} = - \left[\frac{L}{K^{(3)}} \right] f_x^{(3)}, & p_\theta^{(3)} = - \left[\frac{L}{K^{(3)}} \right] f_\theta^{(3)}, & p_z^{(1+3)} = - \left[\frac{L}{K^{(1)}} \right] (f_z^{(1)} + f_z^{(3)}). \end{cases} \quad (16)$$

(15) 式的系数矩阵 A 和 B 为 12×12 阶方阵, 其值详见附录.

3 齐次扩容精细积分法求解方程与边界条件

一阶常微分矩阵方程(15)式可以方便地用我们提出的齐次扩容精细积分法进行高精度求

解^[16],对于全覆盖 PCLD 层合壳(关于部分覆盖的 PCLD 层合壳,因篇幅原因将另文讨论)的自由振动分析,这时可令外激励力全为 0,因此, $x = 0$ 和 $x = L$ 处的状态向量有下列关系:

$$\mathbf{Z}(L) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}(0), \quad (17)$$

式中, \mathbf{T} 为传递矩阵; $\mathbf{Z}(L)$ 、 $\mathbf{Z}(0)$ 分别表示 $x = 0$ 和 $x = L$ 处层合壳的整合状态向量.

一般情况下在 $x = 0$ 处有 6 个给定的边界条件和 6 个未知待求的状态量,同样在 $x = L$ 处也有 6 个给定的边界条件和 6 个待求的状态量,将这些已知的边界条件代入(17)式进行移项整理后即可得到求解方程.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

其中, $\mathbf{Z}(0)$ 为 $x = 0$ 处的 6 个未知状态量. (18) 式的系数行列式为 0,即为特征方程

$$\det(\mathbf{T}) = 0. \quad (19)$$

由于粘性层的弹性模量 G_2 为一复数,因此上述特征方程是一复特征值问题. 根据文献[11]中的定义,将(19)式的复特征根写成

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + i\eta), \quad (20)$$

式中, $i = \sqrt{-1}$; ω_0 为固有圆频率; η 为损耗因子.

4 数值算例与结果比较

算例 1 两端简支 PCLD 壳的轴对称问题——本文方法与解析解计算结果比较

为了考查本文方法的正确性和有效性,现考查一两端简支全覆盖 CLD 圆柱壳,几何、物理参数如下:

$$\begin{aligned} L &= 100 \text{ mm}, \quad h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{3} \text{ mm}, \\ R_1 &= 100 \text{ mm}, \quad R_2 = \left[100 + \frac{h_1 + h_2}{2} \right] \text{ mm}, \\ R_3 &= \left[100 + \frac{h_1 + 2h_2 + h_3}{2} \right] \text{ mm}, \\ E_1 &= E_3 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad \mu_1 = \mu_3 = 0.3, \\ \rho_1 &= \rho_3 = 7850 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 1340 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

文献[22]给出了 CLD 圆柱壳轴对称问题 ($n = 0$) 的解析解,我们根据该文的方法编制了两端简支情况下的计算程序,并且将计算结果与本文方法计算结果进行了比较,表 1 是复常量模型的计算结果比较,即: $G_2 = (8.582 + 2.985i) \text{ MPa}$. 表 2 是复变量模型计算结果比较,即: $G_2 = 0.142(\omega/(2\pi))^{0.494}(1 + 1.46i) \text{ MPa}$. 从表中可以看出,两种方法除在纵向波数 $m = 1$ 时损耗因子误差较大外,其余各点都吻合很好. 这里需要指出,文献[22]虽然给出的是 CLD 壳轴对称问题的解析解,但采用的是比较简单的 Donnell 模型,并忽略了面内惯性力,因此其计算结果的精度比较粗糙.

算例 2 两端不同支承 PCLD 壳的非轴对称问题——本文方法与有限元方法的计算结果比较

采用算例 1 相同的几何和物理参数,图 5、图 6 分别给出了用本文方法计算的两端简支(SS)和一端固支、一端自由(CF) CLD 圆柱壳自由振动圆频率和损耗因子随周向波数 ($n = 0 \sim 12$) 变化的计算结果图,图中无量纲频率参数定义为: $\Omega = \rho_1 h_1 R_2 \omega_0^2 / E_1$,约束层采用与基壳

层相同的支承条件. 本文方法的计算结果图形与文献[11]中用有限元方法的计算结果图形相一致, 这里限于篇幅我们不列出该文献的结果图形, 但要指出, 该文献的结果图形在标识上存在错误.

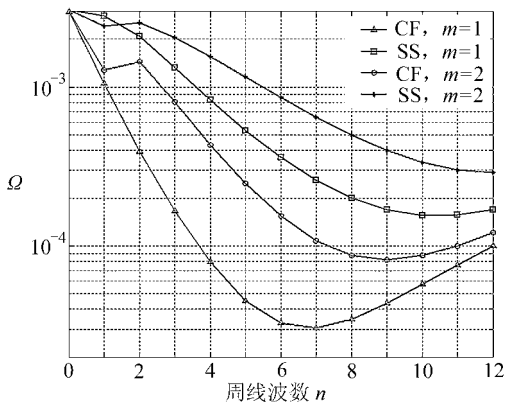


图5 SS和CF壳的无量纲频率参数

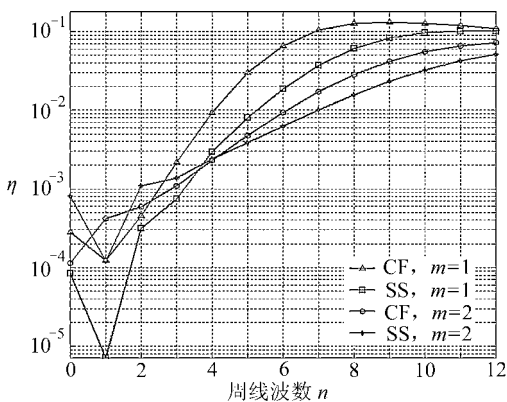


图6 SS和CF壳的损耗因子

5 结 论

本文从圆柱壳的基本方程出发, 计及粘性层剪切耗能的影响, 首次导出了在最一般情况下CLD圆柱壳谐激励下的整合一阶常微分矩阵方程, 这种方程形式非常适合采用我们提出的齐次扩容精细积分法进行高精度求解, 甚至可以获得计算机的满精度解. 方程中状态向量的12个整合变量既包含了位移又包含了内力, 故可以很方便地直接用于几乎所有的边界支承条件和全覆盖或部分覆盖CLD壳的各种情况. 本文提出的方法与前人提出的某些解析方法(适用范围很局限)以及有限元方法(自由度维数高)相比, 具有适用范围较广、编程简单、计算效率和精度较高的特点, 是分析被动约束层阻尼圆柱壳动力学问题的又一种全新的半解析、半数值方法. 它的优势是可以直接加入压电效应引起的控制力, 很方便地将其推广用于主动约束层阻尼(ACL D)圆柱壳的动力学分析. 关于ACL D圆柱壳的振动控制问题, 将另文讨论.

表1 复常量模型的计算结果比较 ($\omega^2 = \omega_0^2(1 + i\eta)$)

纵向波数 m	文献[22]解析解(轴对称)	本文方法数值解
1	2.466 3 E+ 009+ 2.407 9 E+ 005i	2.443 8 E+ 009+ 2.057 0 E+ 005i
2	2.475 6 E+ 009+ 2.017 2 E+ 006i	2.470 3 E+ 009+ 1.968 3 E+ 006i
3	2.501 3 E+ 009+ 5.379 2 E+ 006i	2.498 9 E+ 009+ 5.330 5 E+ 006i
4	2.558 0 E+ 009+ 1.018 2 E+ 007i	2.556 6 E+ 009+ 1.013 4 E+ 007i
5	2.666 0 E+ 009+ 1.638 7 E+ 007i	2.665 1 E+ 009+ 1.633 8 E+ 007i
6	2.851 8 E+ 009+ 2.398 4 E+ 007i	2.851 1 E+ 009+ 2.393 5 E+ 007i
7	3.147 6 E+ 009+ 3.296 8 E+ 007i	3.147 0 E+ 009+ 3.291 9 E+ 007i
8	3.591 5 E+ 009+ 4.333 7 E+ 007i	3.591 0 E+ 009+ 4.328 9 E+ 007i
9	4.227 5 E+ 009+ 5.5091 E+ 007i	4.227 0 E+ 009+ 5.505 4 E+ 007i
10	5.105 4 E+ 009+ 6.8229 E+ 007i	5.105 0 E+ 009+ 6.830 0 E+ 007i

表 2

复变量模型的计算结果比较 ($\omega^2 = \omega_0^2(1 + i\eta)$)

纵向波数 m	文献[22]解析解(轴对称)	本文方法数值解
1	2.467 0E+ 009+ 7.112 1 E+ 005i	2.444 4 E+ 009+ 5.853 6 E+ 005i
2	2.480 4 E+ 009+ 9.841 0 E+ 006i	2.475 0 E+ 009+ 9.560 1 E+ 006i
3	2.511 3 E+ 009+ 2.944 0 E+ 007i	2.508 8 E+ 009+ 2.914 2 E+ 007i
4	2.574 1 E+ 009+ 5.814 5 E+ 007i	2.572 6 E+ 009+ 5.784 4 E+ 007i
5	2.690 0 E+ 009+ 9.620 1 E+ 007i	2.689 1 E+ 009+ 9.589 6 E+ 007i
6	2.886 3 E+ 009+ 1.446 6 E+ 008i	2.885 5 E+ 009+ 1.443 5 E+ 008i
7	3.196 2 E+ 009+ 2.052 3 E+ 008i	3.195 5 E+ 009+ 2.049 1 E+ 008i
8	3.659 3 E+ 009+ 2.802 1 E+ 008i	3.658 8 E+ 009+ 2.798 8 E+ 008i
9	4.321 7 E+ 009+ 3.723 1 E+ 008i	4.321 2 E+ 009+ 3.719 7 E+ 008i
10	5.235 2 E+ 009+ 4.844 4 E+ 008i	5.237 1 E+ 009+ 4.845 0 E+ 008i

附 录

1 基壳的状态向量常微分方程

$$\frac{du^{(1)}}{d\xi} = g_{12}^{(1)}v^{(1)} + g_{13}^{(1)}w + g_{15}^{(1)}N_x^{(1)}, \quad (\text{A1a})$$

$$\frac{dw^{(1)}}{d\xi} = g_{21}^{(1)}u^{(1)} + g_{24}^{(1)}\phi_x + g_{26}^{(1)}S_x^{(1)}, \quad (\text{A1b})$$

$$\frac{dw}{d\xi} = g_{34}^{(1)}\phi_x, \quad (\text{A1c})$$

$$\frac{d\phi_x}{d\xi} = g_{42}^{(1)}v^{(1)} + g_{43}^{(1)}w + g_{48}^{(1)}M_x^{(1)}, \quad (\text{A1d})$$

$$\frac{dN_x^{(1)}}{d\xi} = g_{51}^{(1)}u^{(1)} + g_{54}^{(1)}\phi_x + g_{56}^{(1)}S_x^{(1)} - \left(\frac{L}{K^{(1)}}\right)p_x^{(1)}, \quad (\text{A1e})$$

$$\frac{dS_x^{(1)}}{d\xi} = g_{62}^{(1)}v^{(1)} + g_{63}^{(1)}w + g_{65}^{(1)}N_x^{(1)} + g_{68}^{(1)}M_x^{(1)} - \left(\frac{L}{K^{(1)}}\right)p_{\theta}^{(1)}, \quad (\text{A1f})$$

$$\frac{dV_x^{(1)}}{d\xi} = g_{72}^{(1)}v^{(1)} + g_{73}^{(1)}w + g_{75}^{(1)}N_x^{(1)} + g_{78}^{(1)}M_x^{(1)} - \left(\frac{L}{K^{(1)}}\right)(\dot{p}_z^{(1)} - p_z^{(2)}), \quad (\text{A1g})$$

$$\frac{dM_x^{(1)}}{d\xi} = g_{81}^{(1)}u^{(1)} + g_{84}^{(1)}\phi_x + g_{86}^{(1)}S_x^{(1)} + g_{87}^{(1)}V_x^{(1)}. \quad (\text{A1h})$$

在(A1g)式中 $p_z^{(2)}$ 表示基壳与粘性层之间的法向相互作用力, $\dot{p}_z^{(1)}$ 表示作用在基壳上的力, 包括法向外激励力和粘性层剪切力因偏心引起的附加法向作用力的合力, 有

$$\dot{p}_z^{(1)} = f_z^{(1)} + \left(\frac{e_1}{L}\right)\frac{dT_{zx}}{d\xi} + n\left(\frac{e_1}{R_1}\right)\tau_{z0}. \quad (\text{A1i})$$

2 约束壳的状态向量常微分方程

$$\frac{du^{(3)}}{d\xi} = g_{12}^{(3)}v^{(3)} + g_{13}^{(3)}w + g_{15}^{(3)}N_x^{(3)}, \quad (\text{A2a})$$

$$\frac{dw^{(3)}}{d\xi} = g_{21}^{(3)}u^{(3)} + g_{24}^{(3)}\phi_x + g_{26}^{(3)}S_x^{(3)}, \quad (\text{A2b})$$

$$\frac{dw}{d\xi} = g_{34}^{(3)}\phi_x, \quad (\text{A2c})$$

$$\frac{d\phi_x}{d\xi} = g_{42}^{(3)}v^{(3)} + g_{43}^{(3)}w + g_{48}^{(3)}M_x^{(3)}, \quad (\text{A2d})$$

$$\frac{dN_x^{(3)}}{d\xi} = g_{51}^{(3)}u^{(3)} + g_{54}^{(3)}\phi_x + g_{56}^{(3)}S_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(3)}}\right)p_x^{(3)}, \quad (\text{A2e})$$

$$\frac{dS_x^{(3)}}{d\xi} = g_{62}^{(3)} v^{(3)} + g_{68}^{(3)} w + g_{65}^{(3)} N_x^{(3)} + g_{68}^{(3)} M_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(3)}} \right) p_0^{(3)}, \quad (A2f)$$

$$\frac{dV_x^{(3)}}{d\xi} = g_{72}^{(3)} v^{(3)} + g_{73}^{(3)} w + g_{75}^{(3)} N_x^{(3)} + g_{78}^{(3)} M_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(3)}} \right) (\hat{p}_z^{(3)} + p_z^{(23)}), \quad (A2g)$$

$$\frac{dM_x^{(3)}}{d\xi} = g_{81}^{(3)} u^{(3)} + g_{84}^{(3)} \phi_x + g_{86}^{(3)} S_x^{(3)} + g_{87}^{(3)} V_x^{(3)}. \quad (A2h)$$

同样,在(A2g)式中 $p_z^{(23)}$ 表示约束壳与粘性层之间的法向相互作用力, $\hat{p}_z^{(3)}$ 表示作用在约束壳上的力,包括法向外激励力和粘性层剪切力因偏心引起的附加法向作用力的合力,有

$$\hat{p}_z^{(3)} = f_z^{(3)} + \left(\frac{e_3}{L} \right) \frac{d\tau_{zx}}{d\xi} + n \left(\frac{e_3}{R_3} \right) \tau_{z0}. \quad (A2i)$$

3 PCLD 圆柱层合壳的整合一阶常微分矩阵方程的推导

将(A2g)式乘上 $K^{(3)}/K^{(1)}$ 与(A1g)式相加,同时结合(12)式消掉未知作用力 $p_z^{(12)} - p_z^{(23)}$,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[V_x^{(1)} + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} V_x^{(3)} \right] &= g_{72}^{(1)} v^{(1)} + \left\{ g_{73}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{73}^{(3)} - \lambda_2^2 \right\} w + g_{75}^{(1)} N_x^{(1)} + g_{78}^{(1)} M_x^{(1)} + \\ &\left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{72}^{(3)} v^{(3)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{75}^{(3)} N_x^{(3)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{78}^{(3)} M_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(1)}} \right) (\hat{p}_z^{(1)} + \hat{p}_z^{(3)}), \end{aligned} \quad (A3)$$

其中,频率参数为 $\lambda_2^2 = \rho_2 h_2 \omega^2 L^2 / K^{(1)}$. 将(A2h)式乘以 $(K^{(3)}/K^{(1)}) (g_{87}^{(1)}/g_{87}^{(3)})$ 后与(A1h)式相加后,得

$$\begin{aligned} \frac{dM_x^{(1)}}{d\xi} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \frac{dM_x^{(3)}}{d\xi} &= g_{81}^{(1)} u^{(1)} + \left\{ g_{84}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{84}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \right\} \phi_x + \\ &g_{86}^{(1)} S_x^{(1)} + g_{87}^{(1)} \left[V_x^{(1)} + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} V_x^{(3)} \right] + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{81}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) u^{(3)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{86}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) S_x^{(3)}, \end{aligned} \quad (A4)$$

由于(A1d)和(A2d)两式相等,因此可从中解出非独立变量 $M_x^{(3)}$

$$M_x^{(3)} = \left(\frac{g_{42}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) v^{(1)} + \left(\frac{g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) w + \left(\frac{g_{48}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) M_x^{(1)} - \left(\frac{g_{42}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) v^{(3)}. \quad (A5)$$

将(A5)式分别代入(A3)、(A4)和(A2f)式中消掉 $M_x^{(3)}$,整理后,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[V_x^{(1)} + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} V_x^{(3)} \right] &= \left\{ g_{72}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{78}^{(3)} g_{42}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} v^{(1)} + \left\{ g_{73}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{73}^{(3)} - \right. \\ &\lambda_2^2 + \left. \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{78}^{(3)} \left(\frac{g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} w + g_{75}^{(1)} N_x^{(1)} + \left\{ g_{78}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{78}^{(3)} g_{48}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} M_x^{(1)} + \\ &\left\{ \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{72}^{(3)} - \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{78}^{(3)} g_{42}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} v^{(3)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) g_{75}^{(3)} N_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(1)}} \right) (\hat{p}_z^{(1)} + \hat{p}_z^{(3)}), \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \left(\frac{g_{42}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \frac{dv^{(1)}}{d\xi} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \left(\frac{g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \frac{dw}{d\xi} + \\ &\left\{ 1 + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \left(\frac{g_{48}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} \frac{dM_x^{(1)}}{d\xi} - \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \left(\frac{g_{42}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \frac{dv^{(3)}}{d\xi} = \\ &g_{81}^{(1)} u^{(1)} + \left\{ g_{84}^{(1)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{84}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) \right\} \phi_x + g_{86}^{(1)} S_x^{(1)} + \\ &g_{87}^{(1)} \left[V_x^{(1)} + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} V_x^{(3)} \right] + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{81}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) u^{(3)} + \left(\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right) \left(\frac{g_{87}^{(1)} g_{86}^{(3)}}{g_{87}^{(3)}} \right) S_x^{(3)}, \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_x^{(3)}}{d\xi} &= \left(\frac{g_{68}^{(3)} g_{42}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) v^{(1)} + \left\{ g_{68}^{(3)} + g_{68}^{(3)} \left(\frac{g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} w + \left(\frac{g_{68}^{(3)} g_{48}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right) M_x^{(1)} + \\ &\left\{ g_{62}^{(3)} - \left(\frac{g_{68}^{(3)} g_{42}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right) \right\} v^{(3)} + g_{66}^{(3)} N_x^{(3)} - \left(\frac{L}{K^{(3)}} \right) p_0^{(3)}. \end{aligned} \quad (A8)$$

由(13)、(14)、(A1i)和(A2i)式,将基壳和约束壳的中面作用力写成

$$p_x^{(1)} = f_x^{(1)} + (T_{1u}^{(1)} + T_2 \phi_x + T_3 u^{(3)}), \quad p_0^{(1)} = f_0^{(1)} + (T_4 v^{(1)} + T_5 w + T_6 v^{(3)}), \quad (A9a)$$

$$p_x^{(3)} = f_x^{(3)} - (T_{1u}^{(1)} + T_2 \phi_x + T_3 u^{(3)}), \quad p_0^{(3)} = f_0^{(3)} - (T_4 v^{(1)} + T_5 w + T_6 v^{(3)}), \quad (A9b)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_z^{(1)} + \hat{p}_z^{(3)} = & f_z^{(1)} + f_z^{(3)} + \left(\frac{e}{L} \right) \frac{d}{d\xi} (T_1 u^{(1)} + T_2 \phi_x + T_3 u^{(3)}) + \\ & n \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_3}{R_3} \right) (T_4 v^{(1)} + T_5 w + T_6 v^{(3)}), \end{aligned} \quad (\text{A9c})$$

式中, $e = e_1 + e_3$. 将上述中面作用力分别代入(A1e)、(A1f)、(A6)、(A2e)和(A8)式中归并整理,同时联合(A1a)~(A1d)、(A2a)、(A2b)以及(A7)式,最终可得到PCLD圆柱壳的整合一阶常微分矩阵方程如下:

$$A \frac{d}{d\xi} \mathbf{Z} = \mathbf{BZ} + \mathbf{F}. \quad (\text{A10})$$

系数矩阵 A 中的非 0 元素为:

$$\begin{aligned} A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = A_{4,4} = A_{5,5} = A_{6,6} = A_{7,7} = A_{9,9} = A_{10,10} = A_{11,11} = A_{12,12} = 1, \\ A_{7,1} = \left\{ \frac{eT_1}{K^{(1)}} \right\}, A_{7,4} = \left\{ \frac{eT_2}{K^{(1)}} \right\}, A_{7,9} = \left\{ \frac{eT_3}{K^{(1)}} \right\}, \\ A_{8,2} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{42}^{(1)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix}, A_{8,3} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix}, \\ A_{8,8} = \left\{ 1 + \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{48}^{(1)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix}, A_{8,10} = - \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{42}^{(3)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

系数矩阵 B 中的非 0 元素为:

$$\begin{aligned} B_{1,2} = g_{12}^{(1)}, B_{1,3} = g_{13}^{(1)}, B_{1,5} = g_{15}^{(1)}, \\ B_{2,1} = g_{21}^{(1)}, B_{2,4} = g_{24}^{(1)}, B_{2,6} = g_{26}^{(1)}, B_{3,4} = -1, \\ B_{4,2} = g_{42}^{(1)}, B_{4,3} = g_{43}^{(1)}, B_{4,8} = g_{48}^{(1)}, \\ B_{5,1} = g_{51}^{(1)} - \left\{ \frac{T_1 L}{K^{(1)}} \right\}, B_{5,4} = g_{54}^{(1)} - \left\{ \frac{T_2 L}{K^{(1)}} \right\}, B_{5,6} = g_{56}^{(1)}, B_{5,9} = - \left\{ \frac{T_3 L}{K^{(1)}} \right\}, \\ B_{6,2} = g_{62}^{(1)} - \left\{ \frac{T_4 L}{K^{(1)}} \right\}, B_{6,3} = g_{63}^{(1)} - \left\{ \frac{T_5 L}{K^{(1)}} \right\}, B_{6,5} = g_{65}^{(1)}, B_{6,8} = g_{68}^{(1)}, B_{6,10} = - \left\{ \frac{T_6 L}{K^{(1)}} \right\}, \\ B_{7,2} = g_{72}^{(1)} + \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{78}^{(3)} g_{42}^{(1)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix} - \left\{ \frac{nT_4 L}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} e_1 \\ R_1 + \frac{e_3}{R_3} \end{pmatrix}, \\ B_{7,3} = g_{73}^{(1)} + \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} (g_{73}^{(3)} - \lambda_2^2 + \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} g_{78}^{(3)} \begin{pmatrix} g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix} - \left\{ \frac{nT_5 L}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} e_1 \\ R_1 + \frac{e_3}{R_3} \end{pmatrix}), \\ B_{7,5} = g_{75}^{(1)}, B_{7,8} = g_{78}^{(1)} + \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{78}^{(3)} g_{48}^{(1)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix}, \\ B_{7,10} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} g_{72}^{(3)} - \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{78}^{(3)} g_{42}^{(3)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix} - \left\{ \frac{nT_6 L}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} e_1 \\ R_1 + \frac{e_3}{R_3} \end{pmatrix}, \\ B_{7,11} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} g_{75}^{(3)}, \\ B_{8,1} = g_{81}^{(1)}, B_{8,4} = g_{84}^{(1)} + \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} g_{84}^{(3)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix}, B_{8,6} = g_{86}^{(1)}, B_{8,7} = g_{87}^{(1)}, \\ B_{8,9} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} g_{81}^{(3)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix}, B_{8,12} = \left\{ \frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right\} \begin{pmatrix} g_{87}^{(1)} g_{86}^{(3)} \\ g_{87}^{(3)} \end{pmatrix}, \\ B_{9,3} = g_{13}^{(3)}, B_{9,10} = g_{12}^{(3)}, B_{9,11} = g_{15}^{(3)}, \\ B_{10,4} = g_{24}^{(3)}, B_{10,9} = g_{21}^{(3)}, B_{10,12} = g_{26}^{(3)}, \\ B_{11,1} = \left\{ \frac{T_1 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{11,4} = g_{54}^{(3)} + \left\{ \frac{T_2 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{11,9} = g_{51}^{(3)} + \left\{ \frac{T_3 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{11,12} = g_{56}^{(3)}, \\ B_{12,2} = \frac{g_{68}^{(3)} g_{42}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} + \left\{ \frac{T_4 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{12,3} = g_{63}^{(3)} + g_{68}^{(3)} \begin{pmatrix} g_{43}^{(1)} - g_{43}^{(3)} \\ g_{48}^{(3)} \end{pmatrix} + \left\{ \frac{T_5 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{12,8} = \left\{ \frac{g_{68}^{(3)} g_{48}^{(1)}}{g_{48}^{(3)}} \right\}, \\ B_{12,10} = g_{62}^{(3)} - \left\{ \frac{g_{68}^{(3)} g_{42}^{(3)}}{g_{48}^{(3)}} \right\} + \left\{ \frac{T_6 L}{K^{(3)}} \right\}, B_{12,11} = g_{65}^{(3)}. \end{aligned}$$

由矩阵 A 可看出,它基本上是一一对角矩阵,其行列式

$$\det(A) = A_{8,8} = 1 + \left[\frac{K^{(3)}}{K^{(1)}} \right] \left[\frac{g_{87}^{(1)}}{g_{87}^{(3)}} \right] \left[\frac{g_{88}^{(1)}}{g_{88}^{(3)}} \right] > 1,$$

因而逆矩阵 A^{-1} 存在, 矩阵微分方程(A10)式可解.

[参 考 文 献]

- [1] Ray M C, Oh J, Baz A. Active constrained layer damping of thin cylindrical shell[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **240**(5): 921– 935.
- [2] Masti R S, Sainsbury M G. Vibration damping of cylindrical shells partially coated with a constrained viscoelastic treatment having a standoff layer[J]. *Thin-Walled Structures*, 2005, **43**(9): 1355– 1379.
- [3] Zheng H, Tan X M, Cai C. Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, **48**(12): 1371– 1383.
- [4] Krishna B V, Ganesan N. Studies on fluid-filled and submerged cylindrical shells with constrained viscoelastic layer[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **303**(3/5): 575– 595.
- [5] 高亚新, 沈亚鹏. 主被动阻尼层合板结构的自由振动和阻尼特性分析[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(10): 1004– 1014.
- [6] Wang Horngjoi, Chen Lienwen. Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, **40**(7): 737– 755.
- [7] Vasques C M A, Mace B R, Gardonio P, et al. Arbitrary active constrained layer damping treatments on beams: Finite element modelling and experimental validation[J]. *Computers and Structures*, 2006, **84**(22/23): 1384– 1401.
- [8] Park C H, Baz A. Comparison between finite element formulations of active constrained layer damping using classical and layer-wise laminate theory[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2001, **37**(1): 35– 56.
- [9] Ramesh T C, Ganesan N. Finite element analysis of conical shells with a constrained viscoelastic layer[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **171**(5): 577– 601.
- [10] Ramesh T C, Ganesan N. Orthotropic cylindrical shells with viscoelastic core: a vibration and damping analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **175**(4): 535– 555.
- [11] Ramesh T C, Ganesan N. Finite element analysis of cylindrical shells with a constrained viscoelastic layer[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **172**(3): 359– 370.
- [12] 章艺, 童宗鹏, 张志谊, 等. 充液压电阻尼圆柱壳的有限元建模[J]. *振动工程学报*, 2006, **19**(1): 24– 30.
- [13] 申智春 郑钢铁. 附加约束阻尼层的复合材料梁单元建模分析[J]. *振动工程学报*, 2006, **19**(4): 481– 487.
- [14] 田晓耕, 沈亚鹏, 张元冲. 主动约束层阻尼结构的数值分析方法[J]. *计算力学学报*, 1998, **15**(4): 421– 428.
- [15] 王森, 方之楚. 主动约束层阻尼梁结构复杂耦合振动的多层谱有限元法[J]. *上海交通大学学报*, 2005, **39**(1): 87– 90.
- [16] XIANG Yu, HUANG Yu-ying. A semi-analytical and semi-numerical method for solving 2-D sound-structure interaction problems[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, **16**(2): 116– 126.
- [17] 王森, 方之楚. 主动约束层阻尼部分覆盖圆柱壳耦合振动控制[J]. *应用力学学报*, 2005, **22**(4): 545– 549.

- [18] 李恩奇, 雷勇军, 唐国金, 等. 基于传递函数方法的约束层阻尼梁动力学分析[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(2): 75– 78.
- [19] 李恩奇, 李道奎, 唐国金, 等. 基于传递函数方法的局部覆盖环状 CLD 圆柱壳动力学分析[J]. 航空学报, 2007, **28**(6): 1487– 1493.
- [20] 徐芝纶. 弹性力学(下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982.
- [21] CHEN Lin- hung, HUANG Shyhchin. Vibrations of a cylindrical shell with partially constrained layer damping (CLD) treatment[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, **41**(12): 1485– 1498.
- [22] Pan H H. Axisymmetrical vibrations of a circular sandwich shell with a viscoelastic core layer[J], *J Sound and Vibration*, 1969, **9**(2): 338– 348.

A New Matrix Method for Analyzing Vibration and Damping Effect of a Sandwich Circular Cylindrical Shell With a Viscoelastic Core

XIANG Yu¹, HUANG Yu- ying², LU Jing¹, YUAN Li- yun^{1,2}, ZOU Shi- zhi²

(1. Department of Automotive Engineering, Guangxi University of Technology,

Liuzhou, Guangxi 545006, P. R. China;

2. College of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science

and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: Based on the linear theories of thin cylindrical shells and viscoelastic materials, the governing equation describing vibration of a sandwich circular cylindrical shell with a viscoelastic core under harmonic excitation, which can be written in a matrix differential equation of first order, was derived by considering the energy dissipation due to the shear deformation of the viscoelastic core layer and the interaction between all layers. After that a new matrix method for solving this governing equation was established by means of the extended homogeneous capacity precision integration approach presented by authors. With these, the vibration characteristics and damping effect of the sandwich cylindrical shell can be studied. Its difference from the existing transfer matrix method is that the state vector in governing equation is composed of the displacements and internal forces of the sandwich shell rather than of the displacements and their derivatives. So the present method can be applied to solve the dynamic problems of the kind of sandwich shell with various boundary conditions and partially constrained layer damping. Numerical examples show that the proposed approach is very effective and reliable.

Key words: constrained layer damping; matrix differential equation of first order; circular cylindrical shell; high precision direct integration