应用数学和力学, 第 30 卷 第 1 期
2009 年 1 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 1, Jan. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 01-0001-14

Banach 空间内涉及 H-η 单调算子的集值混合拟似变分包含组*

丁协平, 王中宝

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在没有光滑性的一般 Banach 空间内引入和研究了涉及 H-η- 单调算子的集值混合拟似变分包含组(SSMQVLI). 利用与 H-η- 单调算子相联系的预解算子技巧, 建议和分析了一类寻求 SSMQVLI 的近似解的新的迭代算法. 在适当假设下, 证明了由算法生成的迭代序列强收敛于 SSMQVLI 的精确解. 这些结果是新的, 改进和推广了这一领域的相应结果.

关 键 词: H-η- 单调算子; 预解算子技巧; 集值混合拟似变分包含组; 迭代算法; Banach 空间

中图分类号: 225; 189.11 文献标识码: A

引 言

非线性变分不等式和变分包含对产生自优化与控制、经济和工程科学的某些问题提供了数学模型, 参见文献[1-2]和其中的参考文献. 解变分不等式和变分包含的迭代算法已经被许多作者用不同的方法所研究, 例如文献[3-34]. 预解算子方法是研究这些非线性变分不等式和变分包含近似可解性的重要和有效工具. 为了研究各种变分不等式和变分包含, Ding 和 Luo[3]、Huang 和 Fang[4]、Fang 和 Huang[5]、Fang 等[6]、Verma[7-8]、Zhang[9] 在 Hilbert 空间内已分别引入了 η- 次微分算子、极大 η- 单调算子、H- 单调算子、(H, η)- 单调算子、A- 单调算子、(A, η)- 单调算子、G-η- 单调算子和它们的预解算子等概念. Lou 等[10]、Feng 和 Ding[11] 已分别在 Banach 空间内引入了 H-η- 单调算子和 A- 单调算子和它们的预解算子概念, 推广了上面提到的各种单调型算子的相应概念. 此外, H-η- 单调算子和 A- 单调算子完全不同与在文献[12-13] 中引入的 (A, η)- 增生算子概念. 由使用预解算子技巧, 很多作者对求解各种非线性变分不等式和变分包含构造了不同的迭代算法, 例如见文献[3-34]. 但是上述大多数结果是在 Hilbert 空间或 q 一致光滑 Banach 空间内得到的.

另一方面, Kazmi 和 Khan[23] 为求解实 Banach 空间内的多值似变分包含, 引入了 P-η- 近似

* 收稿日期: 2008-08-18; 修订日期: 2008-12-02
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(07ZA092; SZD0406)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授(联系人. Tel: + 86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com);
王中宝(1982—), 男, 绵阳人, 硕士.

点映射,构造了一迭代算法和讨论了该迭代算法的收敛分析. Peng 和 Zhu[16] 在 Hilbert 空间内引入和研究了一类新的涉及 (H,η)- 单调算子的广义混合拟变分包含组,这类变分包含组包含了文献[6, 17, 19, 22] 中的数学模型作为特殊情形.

由上述结果的激发和启示,本文目的是要在没有一致光滑性的一般 Banach 空间内引入和研究一类新的涉及 H-η- 单调算子的集值混合拟似变分包含组. 我们的数学模型包含了文献[6, 11, 17-22, 27] 中的数学模型作为特殊情形. 由使用 H-η- 单调算子的预解算子技巧,我们构造了一类寻求 SSMQVLI 近似解的迭代算法. 我们也在适当假设下证明了由此算法生成的迭代序列强收敛于 SSMQVLI 的精确解. 这些结果改进和推广了文献[6, 11, 17-22, 27] 中的相应结果.

1 预备知识

设 E 是一具有对偶空间 E^* 实的 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表 E 的范数和 E 与 E^* 之间的对偶对. $CB(E)$ 表 E 的一切有界闭子集的族. $CB(E)$ 上的 Hausdorff 度量定义为

$$H(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|,\ \sup_{y\in C}\inf_{x\in A}\|x-y\|\right\},\qquad \forall A,B\in CB(E).$$

E 上的正规对偶映射 $J:E\to 2^{E^*}$ 由下式定义:

$$J(x)=\left\{f^*\in E^*:\langle x,f^*\rangle=\|f^*\|\,\|x\|,\ \|f^*\|=\|x\|\right\},\qquad \forall x\in E.$$

如果 $E=H$ 是一 Hilbert 空间,则 J 是 H 上的恒等映射.

引理 1.1[35] 设 E 是一实 Banach 空间和 $J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映射. 则对每一 $x,y\in E$,

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\qquad \forall j(x+y)\in J(x+y).$$

定义 1.1[10] 设 $T:E\to E^*$ 是一单值映射. 称 T 是

1) 单调的,如果 $\langle T(x)-T(y),x-y\rangle\geqslant 0,\ \forall x,y\in E;$

2) 严格单调的,如果 T 是单调的且 $\langle T(x)-T(y),x-y\rangle=0,\ \forall x,y\in E$ 当且仅当 $x=y;$

3) r- 强单调的,如果存在常数 $r>0$ 使得

$$\langle T(x)-T(y),x-y\rangle\geqslant r\|x-y\|^2,\qquad \forall x,y\in E;$$

4) s-Lipschitz 连续的,如果存在常数 $s>0$ 使得

$$\|T(x)-T(y)\|\leqslant s\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in E.$$

定义 1.2[10] 设 $M:E\to 2^{E^*}$ 是一多值映射, $H:E\to E^*$ 和 $\eta:E\times E\to E$ 是单值映射. 称 M 是

1) 单调的,如果 $\langle x-y,u-v\rangle\geqslant 0,\ \forall u,v\in E,x\in M(u),y\in M(v);$

2) η- 单调的,如果 $\langle x-y,\eta(u,v)\rangle\geqslant 0,\ \forall u,v\in E,\ x\in M(u),y\in M(v);$

3) (r,η)- 强单调的,如果存在常数 $r>0$ 使得

$$\langle x-y,\eta(u,v)\rangle\geqslant r\|u-v\|^2,\qquad \forall u,v\in E,x\in M(u),y\in M(v);$$

4) m-η- 松弛单调的,如果存在常数 $m>0$ 使得

$$\langle x-y,\eta(u,v)\rangle\geqslant -m\|u-v\|^2,\qquad \forall u,v\in E,x\in M(u),y\in M(v);$$

5) 极大单调的,如果 M 是单调的且在 E 内没有真的单调扩张,即对一切 $u,v_0\in E,x\in$

$M(u)$ 和 $\langle x-y_0, u-v_0\rangle \geqslant 0$ 蕴含 $y_0 \in M(v_0)$;

当 E 是自反 Banach 空间时, M 是极大单调的当且仅当 M 是单调的且 $(J+\lambda M)E=E^*$ 对一切 $\lambda>0$ 成立;

6) 极大 η- 单调的, 如果 M 是 η- 单调的且在 E 内没有真的 η- 单调扩张; 当 E 是自反 Banach 空间时, M 是极大 η- 单调的当且仅当 M 是 η- 单调的且 $(J+\lambda M)E=E^*$ 对一切 $\lambda>0$ 成立;

7) H- 单调的, 如果 M 是单调的且 $(H+\lambda M)E=E^*$ 对一切 $\lambda>0$ 成立;

8) (H,η)- 单调的, 如果 M 是 η- 单调的且 $(H+\lambda M)E=E^*$ 对一切 $\lambda>0$ 成立;

9) H-η- 单调的, 如果 M 是 m-η- 松弛单调的且 $(H+\lambda M)E=E^*$ 对一切 $\lambda>0$ 成立.

注 1.1 如果 E 是一 Hilbert 空间, 则 H-η- 单调算子退化为文献[9] 中的 G-η- 单调算子和文献[8] 中的 (A,η)- 单调算子. 因此, 对 Hilbert 空间内的 η- 次微分算子、极大单调算子、极大 η- 单调算子、H- 单调算子、(H,η)- 单调算子、G-η- 单调算子和 Banach 空间中的 (A,η)- 单调算子等类, Banach 空间内的 H-η- 单调算子类提供了一个统一的框架, 详见文献[3-11, 15-19]. 我们强调 Banach 空间内的 H-η- 单调算子完全不同于在文献[12-14] 中引入的 (A,η)- 增生算子.

定义 1.3[10] 设 $\eta: E\times E\to E$ 和 $H: E\to E^*$ 是单值映射. $M: E\to 2^{E^*}$ 是一 H-η- 单调算子. M 的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}: E^*\to 2^E$ 由下式定义:

$$R_{M,\lambda}^{H,\eta}(u)=(H+\lambda M)^{-1}(u),\qquad \forall u\in E^*,$$

其中, $\lambda>0$ 是一常数.

引理 1.2[10] 设 E 是实 Banach 空间且 $\eta: E\times E\to E$ 是具有 Lipschitz 常数的 $\tau>0$ 的 Lipschitz 连续算子. 设 $H: E\to E^*$ 是 (r,η)- 强单调算子, $M: E\to 2^{E^*}$ 是具有常数 $m>0$ 的 H-η- 单调算子. 则, 对 $0<\lambda<r/m$, M 的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}: E^*\to 2^E$ 是 Lipschitz 连续的, 其 Lipschitz 常数为 $\tau/(r-m\lambda)$, 即有

$$\| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(u)-R_{M,\lambda}^{H,\eta}(v)\| \leqslant \frac{\tau}{r-m\lambda}\|u-v\|,\qquad \forall u,v\in E^*.$$

定义 1.4 设 $T: E\to E$ 是一单值映射. 称 T 是 δ- 强增生的, 如果存在常数 $\delta>0$ 和 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得

$$\langle T(x)-T(y), j(x-y)\rangle \geqslant \delta\|x-y\|^2,\qquad \forall x,y\in E.$$

定义 1.5 设 $g: E\to E$ 和 $H: E\to E^*$ 是单值映射.

1) 称 g 是 s-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $s>0$ 使得

$$\|g(x)-g(y)\| \leqslant s\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in E;$$

2) 称 H 是 ε-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\epsilon>0$ 使得

$$\|H(x)-H(y)\| \leqslant \epsilon\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in E.$$

定义 1.6 称集值映射 $A: E\to 2^E$ 是 H-Lipschitz 连续的如果存在常数 $L>0$ 使得

$$H(A(x),A(y)) \leqslant L\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in E.$$

2 集值混合拟似变分包含组

在本节中, 我们将在一般实 Banach 空间内引入一类涉及 H-η- 单调算子的集值混合拟似

变分包含组. 除非另外陈述, 本文的余下部分将假设对每一 $i=1,2$, E_i 是具有对偶空间 E_i^* 和范数 $\|\cdot\|_i$ 的实 Banach 空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ 是 E_i 和 E_i^* 之间的对偶对, $CB(E_i)$ 是 E_i 的一切有界闭子集的族, $J_i: E_i\to 2^{E_i^*}$ 是由下式定义的 E_i 上的正规对偶映射:

$$J_i(x)=\left\{f^*\in E_i^*: \langle x,f^*\rangle_i=\|f^*\|_i\|x\|_i,\ \|f^*\|_i=\|x\|_i\right\},\qquad \forall x\in E_i$$

和 $J_i^*: E_i^*\to E_i^{**}$ 是由下式定义的 E_i^* 上的正规对偶映射:

$$J_i^*(y)=\left\{f\in E_i^{**}: \langle f,y\rangle_i=\|y\|_i\|f\|_i,\ \|f\|_i=\|y\|_i\right\},\qquad \forall y\in E_i^*,$$

其中, E_i^{**} 是 E_i^* 的对偶空间.

我们观察到如果对每一 $i\in\{1,2\}$, $E_i=H_i$ 是 Hilbert 空间, 则 J_i 和 J_i^* 是 H_i 上的恒等映射. 此后, j_i 和 j_i^* 分别表 J_i 和 J_i^* 的一个选择.

对每一 $i=1,2$, 令 $G_i: E_i\to CB(E_i)$, $S_i: E_1\to CB(E_1)$ 和 $T_i: E_2\to CB(E_2)$ 是集值映射. 令 $N_i: E_1\times E_2\to E_i^*$, $p_i, g_i: E_i\to E_i$, $H_i: E_i\to E_i^*$, $\eta_i: E_i\times E_i\to E_i$ 和 $F_i: E_1\times E_2\times E_i\to E_i^*$ 是单值映射. 令 $M_i: E_i\times E_i\to 2^{E_i^*}$ 是集值映射使得对每一固定的 $z_i\in G_i(E_i)$, $M_i(\cdot,z_i): E_i\to 2^{E_i^*}$ 是一 H_i-η_i- 单调映射且 $(g_i-p_i)(E_i)\cap \mathrm{dom}(M_i(\cdot,z_i))\neq\emptyset$. 我们考虑下面集值混合拟似变分包含组(SSMQVLI): 对给定的 $(\omega_1,\omega_2)\in E_1^*\times E_2^*$, 求 $(u,v)\in E_1\times E_2$, $x_1\in S_1(u)$, $y_1\in T_1(v)$, $z_1\in G_1(u)$, $x_2\in S_2(u)$, $y_2\in T_2(v)$ 和 $z_2\in G_2(v)$ 使得

$$\begin{cases}\omega_1\in F_1(u,v,z_1)+N_1(x_1,y_1)+M_1((g_1-p_1)(u),z_1),\\ \omega_2\in F_2(u,v,z_2)+N_2(x_2,y_2)+M_2((g_2-p_2)(v),z_2).\end{cases}\tag{1}$$

特殊情形

(Ⅰ) 如果对 $i=1,2$, $E_i=E$, $\omega_i=\omega$, $F_i=F$, $N_i=N$, $T_i=T$, $S_i=S$, $p_i-g_i=p-g$, $H_i=H$, $\eta_i=\eta$, $G_i=G$ 和 $M_i=M$, 则 SSMQVLI(1) 化归 Banach 空间内具有 H-η- 单调算子的集值混合拟似变分包含(SMQVLI): 求 $(u,v)\in E\times E$, $x\in S(u)$, $y\in T(u)$ 和 $z\in G(u)$ 使得

$$\omega\in F(u,v,z)+N(x,y)+M((g-p)(u),z).\tag{2}$$

问题(2)是新的.

(Ⅱ) 如果 $F=p=\omega=0$ 和 $E=H$ 是 Hilbert 空间, 则 SMQVLI(2) 退化为 Hilbert 空间内具有 (A,η)- 单调算子的集值混合拟似变分包含: 求 $u\in E$, $x\in S(u)$, $y\in T(u)$ 和 $z\in G(u)$ 使得

$$0\in N(x,y)+M(g(u),z).\tag{3}$$

如果 M 在第一自变量是 H- 单调的, 则问题(3) 由 Zeng[28] 引入和研究.

(Ⅲ) 如果对 $i=1,2$, $E_i=H_i$ 是 Hilbert 空间, $\omega_i=0$, 和对一切 $(u,v)\in H_1\times H_2$ 和 $z_i\in H_i$, $F_i(u,v,z_i)=F_i(u,v)$, $M_i(u,v)=M_i(u)$, 则 SSMQVLI(1) 退化为具有 (A_i,η_i)- 单调映射的集值混合拟似变分包含组: 求 $(u,v)\in H_1\times H_2$, $x_1\in S_1(u)$, $x_2\in S_2(u)$, $y_1\in T_1(v)$ 和 $y_2\in T_2(v)$ 使得

$$\begin{cases}0\in F_1(u,v)+N_1(x_1,y_1)+M_1(g_1(u)),\\ 0\in F_2(u,v)+N_2(x_2,y_2)+M_2(g_2(v)).\end{cases}\tag{4}$$

有 M_i 是 (H_i,η_i)- 单调映射的 SSMQVLI(4) 由 Peng 和 Zhu[16] 引入和研究且包含了在文献[6,

17, 19, 22] 中的数学模型作为特殊情形.

引理 2.1 设 E_i, ω_i, F_i, N_i, T_i, S_i, p_i - g_i, H_i, η_i, G_i 和 M_i $(i = 1, 2)$ 与在 SSMQVLI(1) 内的假设相同. 则 $(u, x_1, y_1, z_1, v, x_2, y_2, z_2)$ 是 SSMQVLI(1) 的一解当且仅当 $(u, x_1, y_1, z_1, v, x_2, y_2, z_2)$ 满足下面关系:

$$\begin{cases} (g_1 - p_1)(u) = R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u)) + \\ \qquad \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1, y_1) - \rho_1 F_1(u, v, z_1)), \\ (g_2 - p_2)(v) = R^{H_2, \eta_2}_{M_2(\cdot, z_2), \rho_2}(H_2((g_2 - p_2)(v)) + \\ \qquad \rho_2 \omega_2 - \rho_2 N_2(x_2, y_2) - \rho_2 F_2(u, v, z_2)). \end{cases} \tag{5}$$

其中, $(u, v) \in E_1 \times E_2$, $x_1 \in S_1(u)$, $y_1 \in T_1(v)$, $z_1 \in G_1(u)$, $x_2 \in S_2(u)$, $y_2 \in T_2(v)$, $z_2 \in G_2(v)$, $R^{H_i, \eta_i}_{M_i(\cdot, z_i), \rho_i} = (H_i + \rho_i M_i(\cdot, z_i))^{-1}$ 和 $\rho_i > 0$ 是常数$(i = 1, 2)$.

证明 结论直接从定义 1.3 推得.

由关系式(5) 和 Nadler 的定理[36], 我们能建议下面的迭代算法.

算法 2.1 第 1 步. 对给定的 $\rho_1, \rho_2 > 0$, 选取 $(u_0, v_0) \in E_1 \times E_2$, $x_1^0 \in S_1(u_0)$, $y_1^0 \in T_1(v_0)$, $z_1^0 \in G_1(u_0)$, $x_2^0 \in S_2(u_0)$, $y_2^0 \in T_2(v_0)$ 和 $z_2^0 \in S_2(v_0)$.

第 2 步. 令

$$\begin{cases} (g_1 - p_1)(u_{n+1}) = R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^n), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_n)) + \\ \qquad \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^n, y_1^n) - \rho_1 F_1(u_n, v_n, z_1^n)) + e_n, \\ (g_2 - p_2)(v_{n+1}) = R^{H_2, \eta_2}_{M_2(\cdot, z_2^n), \rho_2}(H_2((g_2 - p_2)(v_n)) + \\ \qquad \rho_2 \omega_2 - \rho_2 N_2(x_2^n, y_2^n) - \rho_2 F_2(u_n, v_n, z_2^n)) + e_n'. \end{cases} \tag{6}$$

第 3 步. 选取 $x_1^{n+1} \in S_1(u_{n+1})$, $y_1^{n+1} \in T_1(v_{n+1})$, $z_1^{n+1} \in G_1(u_{n+1})$, $x_2^{n+1} \in S_2(u_{n+1})$, $y_2^{n+1} \in T_2(v_{n+1})$ 和 $z_2^{n+1} \in G_2(v_{n+1})$ 使得

$$\begin{cases} \| x_1^{n+1} - x_1^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(S_1(u_{n+1}), S_1(u_n)), \\ \| y_1^{n+1} - y_1^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(T_1(v_{n+1}), T_1(v_n)), \\ \| z_1^{n+1} - z_1^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(G_1(u_{n+1}), G_1(u_n)), \\ \| x_2^{n+1} - x_2^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(S_2(u_{n+1}), S_2(u_n)), \\ \| y_2^{n+1} - y_2^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(T_2(v_{n+1}), T_2(v_n)), \\ \| z_2^{n+1} - z_2^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(G_2(v_{n+1}), G_2(v_n)), \end{cases} \tag{7}$$

其中, 对 $i \in \{1, 2\}$, H_i 为 $CB(E_i)$ 上的 Hausdorff 度量.

第 4 步. 考虑到可能的不精确的计算, 选取误差 $\{e_n\} \subset E_1$ 和 $\{e_n'\} \subset E_2$ 使得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \| e_j - e_{j-1} \|_1 \tilde{\omega}^{-j} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \| e_j' - e_{j-1}' \|_2 \tilde{\omega}^{-j} < \infty, \qquad \forall \tilde{\omega} \in (0, 1), \\ \lim_{n \to \infty} e_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} e_n' = 0. \end{cases} \tag{8}$$

第5步. 如果 $x_1^{n+1}\in S_1(u_{n+1})$, $y_1^{n+1}\in T_1(v_{n+1})$, $z_1^{n+1}\in G_1(u_{n+1})$, $x_2^{n+1}\in S_2(u_{n+1})$, $y_2^{n+1}\in T_2(v_{n+1})$ 和 $z_2^{n+1}\in G_2(v_{n+1})$ 充分精确地满足式(5), 则停止, 否则设 $n:=n+1$ 并返回第2步.

定义 2.1 对 $i\in\{1,2\}$, 设 $N_i: E_1\times E_2\to E_i^*$ 是一单值映射. 称 N_i

1) 在第一自变量是 α_i-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\alpha_i>0$ 使得

$$\|N_i(u_1,v')-N_i(u_2,v')\|_i\leqslant\alpha_i\|u_1-u_2\|_1,\qquad\forall u_1,u_2\in E_1, v'\in E_2;$$

2) 在第二自变量是 β_i-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\beta_i>0$ 使得

$$\|N_i(u',v_1)-N_i(u',v_2)\|_i\leqslant\beta_i\|v_1-v_2\|_2,\qquad\forall v_1,v_2\in E_2, u'\in E_1.$$

定义 2.2 对 $i\in\{1,2\}$, 令 $F_i: E_1\times E_2\times E_i\to E_i^*$ 是一单值映射. 称 F_i

1) 在第一自变量是 ξ_{i1}-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\xi_{i1}>0$ 使得

$$\|F_i(u_1,\cdot,\cdot)-F_i(v_1,\cdot,\cdot)\|_i\leqslant\xi_{i1}\|u_1-v_1\|_1,\qquad\forall u_1,v_1\in E_1;$$

2) 在第二自变量是 ξ_{i2}-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\xi_{i2}>0$ 使得

$$\|F_i(\cdot,u_2,\cdot)-F_i(\cdot,v_2,\cdot)\|_i\leqslant\xi_{i2}\|u_2-v_2\|_2,\qquad\forall u_2,v_2\in E_2;$$

3) 在第三自变量是 ξ_{i3}-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\xi_{i3}>0$ 使得

$$\|F_i(\cdot,\cdot,u_3)-F_i(\cdot,\cdot,v_3)\|_i\leqslant\xi_{i3}\|u_3-v_3\|_i,\qquad\forall u_3,v_3\in E_i.$$

定理 2.1 对每一 $i\in\{1,2\}$, 令 $G_i: E_i\to CB(E_i)$, $S_i: E_1\to CB(E_1)$ 和 $T_i: E_2\to CB(E_2)$ 是集值映射. 令 $N_i: E_1\times E_2\to E_i^*$, $p_i, g_i: E_i\to E_i$, $H_i: E_i\to E_i^*$, $\eta_i: E_i\times E_i\to E_i$ 和 $F_i: E_1\times E_2\times E_i\to E_i^*$ 是单值映射. 对 $i\in\{1,2\}$, 令 $M_i: E_i\times E_i\to 2^{E_i^*}$ 是集值映射使得对每一固定的 $z_i\in G_i(E_i)$, $M_i(\cdot,z_i): E_i\to 2^{E_i^*}$ 是一 H_i-η_i-单调映射且 $(g_i-p_i)(E_i)\cap\mathrm{dom}(M_i(\cdot,z_i))\neq\varnothing$. 对每一 $i\in\{1,2\}$, 假设下列条件被满足:

(i) H_i 是 (r_i,η_i)-强单调和 ϵ_i-Lipschitz 连续的;

(ii) S_i 和 G_1 分别是 H_1-Lipschitz 连续的, 具有 Lipschtiz 常数 $l_{1i}>0$ 和 $l_{31}>0$, T_i 和 G_2 是 H_2-Lipschitz 连续的, 具有 Lipschitz 常数 $l_{2i}>0$ 和 $l_{32}>0$;

(iii) $\eta_i: E_i\times E_i\to E_i$ 是 τ_i-Lipschitz 连续的和 N_i 在第一自变量是 α_i-Lipschitz 连续的和在第二变量是 β_i-Lipschitz 连续的;

(iv) g_i-p_i 是 s_i-Lipschitz 连续的, 和 $g_i-p_i-I_i$ 是 ζ_i-强增生的其中 I_i 是 E_i 上的恒等映射;

(v) 对 $j=1,2,3$, F_i 在第 j 自变量是 ξ_{ij}-Lipschitz 连续的.

此外, 如果存在常数 $\mu_1,\mu_2>0$ 使得

$$\begin{cases}\|R^{H_1,\eta_1}_{M_1(\cdot,z_1),\rho_1}(u)-R^{H_1,\eta_1}_{M_1(\cdot,z_1),\rho_1}(u)\|_1\leqslant\\ \qquad\mu_1\|z_1-z_1\|_1,\qquad\forall(z_1,z_1)\in E_1\times E_1, u\in E_1^*,\\ \|R^{H_2,\eta_2}_{M_2(\cdot,z_2),\rho_2}(v)-R^{H_2,\eta_2}_{M_2(\cdot,z_2),\rho_2}(v)\|_2\leqslant\\ \qquad\mu_2\|z_2-z_2\|_2,\qquad\forall(z_2,z_2)\in E_2\times E_2, v\in E_2^*\end{cases}\tag{9}$$

和存在常数 $0<\rho_i<r_i/m_i$, $i=1,2$ 使得

$$\begin{cases} \Lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2\zeta_1 + 1}}\left[\dfrac{\tau_1}{r_1 - \rho_1 m_1}\sqrt{\epsilon_1^2 s_1^2 + 2\rho_1 \alpha_1 l_{11}(\epsilon_1 s_1 + \rho_1 \alpha_1 l_{11})} + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{\tau_1 \rho_1}{r_1 - \rho_1 m_1}(\xi_{11} + \xi_{13} l_{31}) + \mu_1 l_{31}\right], \\ \Theta = \dfrac{\tau_1 \rho_1}{\sqrt{2\zeta_1 + 1}(r_1 - \rho_1 m_1)}(\xi_{12} + \beta_1 l_{21}), \\ \kappa = \dfrac{\tau_2 \rho_2}{\sqrt{2\zeta_2 + 1}(r_2 - \rho_2 m_2)}(\xi_{21} + \alpha_2 l_{12}), \\ \vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2\zeta_2 + 1}}\left[\dfrac{\tau_2}{r_2 - \rho_2 m_2}\sqrt{\epsilon_2^2 s_2^2 + 2\rho_2 \beta_2 l_{22}(\epsilon_2 s_2 + \rho_2 \beta_2 l_{22})} + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{\tau_2 \rho_2}{r_2 - \rho_2 m_2}(\xi_{22} + \xi_{23} l_{32}) + \mu_2 l_{32}\right], \\ 0 < \chi = \max\{\Lambda + \kappa, \Theta + \vartheta\} < 1, \end{cases} \tag{10}$$

则由算法 2.1 生成的迭代序列$\{u_n\}$, $\{x_1^n\}$, $\{y_1^n\}$, $\{z_1^n\}$, $\{v_n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{y_2^n\}$和$\{z_2^n\}$分别强收敛于$u^*, x_1^*, y_1^*, z_1^*, v^*, x_2^*, y_2^*$ 和z_2^*, 并且$(u^*, x_1^*, y_1^*, z_1^*, v^*, x_2^*, y_2^*, z_2^*)$是SSMQVLI(1)的一解.

证明　因为 $g_1 - p_1 - I_1$ 是 ζ_1- 强单调的, 由引理 1.1, 我们有下列估计:

$$\begin{aligned} &\| u_{n+2} - u_{n+1} \|_1^2 = \\ &\quad \| (g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1}) + u_{n+2} - u_{n+1} - \\ &\quad ((g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1})) \|_1^2 \leqslant \\ &\quad \| (g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1}) \|_1^2 - \\ &\quad 2\langle (g_1 - p_1 - I_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1 - I_1)(u_{n+1}), j_1(u_{n+2} - u_{n+1})\rangle_1 \leqslant \\ &\quad \| (g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1}) \|_1^2 - 2\zeta_1 \| u_{n+2} - u_{n+1} \|_1^2, \end{aligned} \tag{11}$$

上式蕴含

$$\| u_{n+2} - u_{n+1} \|_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\zeta_1 + 1}} \| (g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1}) \|_1. \tag{12}$$

现在, 由使用式(6)、(9) 和引理 1.2, 有

$$\begin{aligned} &\| (g_1 - p_1)(u_{n+2}) - (g_1 - p_1)(u_{n+1}) \|_1 = \\ &\quad \| R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^{n+1}), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_{n+1})) + \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^{n+1}, y_1^{n+1}) - \\ &\quad \rho_1 F_1(u_{n+1}, v_{n+1}, z_1^{n+1})) + e_{n+1} - (R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^n), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_n)) + \\ &\quad \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^n, y_1^n) - \rho_1 F_1(u_n, v_n, z_1^n)) + e_n) \|_1 \leqslant \\ &\quad \| R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^{n+1}), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_{n+1})) + \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^{n+1}, y_1^{n+1}) - \\ &\quad \rho_1 F_1(u_{n+1}, v_{n+1}, z_1^{n+1})) - R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^n), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_n)) + \\ &\quad \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^n, y_1^n) - \rho_1 F_1(u_n, v_n, z_1^n)) \|_1 + \| e_{n+1} - e_n \|_1 \leqslant \\ &\quad \| R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^{n+1}), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_{n+1})) + \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^{n+1}, y_1^{n+1}) - \\ &\quad \rho_1 F_1(u_{n+1}, v_{n+1}, z_1^{n+1})) - R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1^{n+1}), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u_n)) + \\ &\quad \rho_1 \omega_1 - \rho_1 N_1(x_1^n, y_1^n) - \rho_1 F_1(u_n, v_n, z_1^n)) \|_1 + \end{aligned}$$

$$\| R^{H_1,\eta_1}_{M_1(\cdot,z_1^{n+1}),\rho_1}(H_1((g_1-p_1)(u_n))+\rho_1\omega_1-\rho_1 N_1(x_1^n,y_1^n)-\rho_1 F_1(u_n,v_n,z_1^n))-R^{H_1,\eta_1}_{M_1(\cdot,z_1^n),\rho_1}(H_1((g_1-p_1)(u_n))+\rho_1\omega_1-\rho_1 N_1(x_1^n,y_1^n)-\rho_1 F_1(u_n,v_n,z_1^n))\|_1+\|e_{n+1}-e_n\|_1\leqslant$$

$$\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}[\|(H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n)))-\rho_1(N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}))\|_1+\rho_1\|F_1(u_{n+1},v_{n+1},z_1^{n+1})-F_1(u_n,v_n,z_1^n)\|_1+\rho_1\|N_1(x_1^n,y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^n)\|_1]+\|e_{n+1}-e_n\|_1+\mu_1\|z_1^{n+1}-z_1^n\|_1. \tag{13}$$

因为 g_1-p_1 和 H_1 是 Lipschitz 连续的, 由使用引理 1.1, 我们得到

$$\|H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))-\rho_1(N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}))\|_1^2\leqslant$$
$$\|H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))\|_1^2-2\rho_1\langle N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}),j_1^*(H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))-\rho_1(N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}))))\rangle_1\leqslant$$
$$\|H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))\|_1^2+2\rho_1\|N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1})\|_1[\|H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))\|_1+\rho_1\|N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1})\|_1]\leqslant$$
$$\epsilon_1^2 s_1^2\|u_{n+1}-u_n\|_1^2+2\rho_1\|N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1})\|_1[\epsilon_1 s_1\|u_{n+1}-u_n\|_1+\rho_1\|N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1})\|_1]. \tag{14}$$

现在, 由算法 2.1, 条件(ii)~(iii)和(v), 得到

$$\|N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1})\|_1\leqslant\alpha_1\|x_1^{n+1}-x_1^n\|_1\leqslant\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)H_1(S_1(u_{n+1}),S_1(u_n))\leqslant\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\|u_{n+1}-u_n\|_1, \tag{15}$$

$$\|N_1(x_1^n,y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^n)\|_1\leqslant\beta_1\|y_1^{n+1}-y_1^n\|_1\leqslant\beta_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)H_2(T_1(v_{n+1}),T_1(v_n))\leqslant\beta_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{21}\|v_{n+1}-v_n\|_2, \tag{16}$$

$$\|z_1^{n+1}-z_1^n\|_1\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)H_1(G_1(u_{n+1}),G_1(u_n))\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{31}\|u_{n+1}-u_n\|_1, \tag{17}$$

$$\|F_1(u_{n+1},v_{n+1},z_1^{n+1})-F_1(u_n,v_n,z_1^n)\|_1\leqslant\xi_{11}\|u_{n+1}-u_n\|_1+\xi_{12}\|v_{n+1}-v_n\|_2+\xi_{13}\|z_1^{n+1}-z_1^n\|_1\leqslant\left(\xi_{11}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{13}l_{31}\right)\|u_{n+1}-u_n\|_1+\xi_{12}\|v_{n+1}-v_n\|_2. \tag{18}$$

从式(14)和(15), 得到

$$\|H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n))-\rho_1(N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}))\|_1^2\leqslant$$

$$\left[\epsilon_1^2 s_1^2+2\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\left(\epsilon_1 s_1+\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\right)\right]\|u_{n+1}-u_n\|_1^2. \tag{19}$$

由式(13)~(19),得到

$$\begin{aligned}
&\|(g_1-p_1)(u_{n+2})-(g_1-p_1)(u_{n+1})\|_1\leqslant\\
&\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}[\|(H_1((g_1-p_1)(u_{n+1}))-H_1((g_1-p_1)(u_n)))-\\
&\rho_1(N_1(x_1^{n+1},y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^{n+1}))\|_1+\\
&\rho_1\|F_1(u_{n+1},v_{n+1},z_1^{n+1})-F_1(u_n,v_n,z_1^n)\|_1+\\
&\rho_1\|N_1(x_1^n,y_1^{n+1})-N_1(x_1^n,y_1^n)\|_1]+\|e_{n+1}-e_n\|_1+\mu_1\|z_1^{n+1}-z_1^n\|_1\leqslant\\
&\left[\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}\sqrt{\epsilon_1^2 s_1^2+2\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\left(\epsilon_1 s_1+\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\right)}+\right.\\
&\left.\frac{\tau_1\rho_1}{r_1-\rho_1 m_1}\left(\xi_{11}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{13}l_{31}\right)+\mu_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{31}\right]\|u_{n+1}-u_n\|_1+\\
&\frac{\tau_1\rho_1}{r_1-\rho_1 m_1}\left(\xi_{12}+\beta_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{21}\right)\|v_{n+1}-v_n\|_2+\|e_{n+1}-e_n\|_1.
\end{aligned}\tag{20}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+2}-u_{n+1}\|_1\leqslant\\
&\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\|(g_1-p_1)(u_{n+2})-(g_1-p_1)(u_{n+1})\|_1\leqslant\\
&\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\left[\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}\sqrt{\epsilon_1^2 s_1^2+2\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\left(\epsilon_1 s_1+\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\right)}+\right.\\
&\left.\frac{\tau_1\rho_1}{r_1-\rho_1 m_1}\left(\xi_{11}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{13}l_{31}\right)+\mu_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{31}\right]\|u_{n+1}-u_n\|_1+\\
&\frac{\tau_1\rho_1}{\sqrt{2\zeta_1+1}(r_1-\rho_1 m_1)}\left(\xi_{12}+\beta_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{21}\right)\|v_{n+1}-v_n\|_2+\\
&\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\|e_{n+1}-e_n\|_1\leqslant\\
&\Lambda_n\|u_{n+1}-u_n\|_1+\Theta_n\|v_{n+1}-v_n\|_2+\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\|e_{n+1}-e_n\|_1,
\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Lambda_n=&\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\left[\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}\sqrt{\epsilon_1^2 s_1^2+2\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\left(\epsilon_1 s_1+\rho_1\alpha_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{11}\right)}+\right.\\
&\left.\frac{\tau_1\rho_1}{r_1-\rho_1 m_1}\left(\xi_{11}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{13}l_{31}\right)+\mu_1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{31}\right]
\end{aligned}$$

和 $\Theta_n=\dfrac{\tau_1\rho_1}{\sqrt{2\zeta_1+1}(r_1-\rho_1 m_1)}\left(\xi_{12}+\beta_1\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)l_{21}\right)$.

类似地,我们能证明下面不等式

$$\begin{aligned}
&\|v_{n+2}-v_{n+1}\|_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\|(g_2-p_2)(v_{n+2})-(g_2-p_2)(v_{n+1})\|_2\leqslant\\
&\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\left[\frac{\tau_2}{r_2-\rho_2 m_2}\sqrt{\epsilon_2^2 s_2^2+2\rho_2\beta_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{22}\left(\epsilon_2 s_2+\rho_2\beta_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{22}\right)}+\right.
\end{aligned}$$

$$\frac{\tau_2\rho_2}{r_2-\rho_2 m_2}\left(\xi_{22}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{23}l_{32}\right)+\mu_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{32}\Bigg]\|v_{n+1}-v_n\|_2+$$
$$\frac{\tau_2\rho_2}{\sqrt{2\zeta_2+1}(r_2-\rho_2 m_2)}\left(\xi_{21}+\alpha_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{12}\right)\|u_{n+1}-u_n\|_1+$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\|e'_{n+1}-e'_n\|_2\leqslant$$
$$\vartheta_n\|v_{n+1}-v_n\|_2+\kappa_n\|u_{n+1}-u_n\|_1+\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\|e'_{n+1}-e'_n\|_2, \tag{22}$$

其中

$$\vartheta_n=\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\Bigg[\frac{\tau_2}{r_2-\rho_2 m_2}\sqrt{\epsilon_2^2 s_2^2+2\rho_2\beta_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{22}\left(\epsilon_2 s_2+\rho_2\beta_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{22}\right)}+$$
$$\frac{\tau_2\rho_2}{r_2-\rho_2 m_2}\left(\xi_{22}+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\xi_{23}l_{32}\right)+\mu_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{32}\Bigg],$$
$$\kappa_n=\frac{\tau_2\rho_2}{\sqrt{2\zeta_2+1}(r_2-\rho_2 m_2)}\left(\xi_{21}+\alpha_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)l_{12}\right).$$

现在,在 $E_1\times E_2$ 上定义范数如下

$$\|(x,y)\|_*=\|x\|_1+\|y\|_2,\qquad\forall(x,y)\in E_1\times E_2.$$

则 $(E_1\times E_2,\|\cdot\|_*)$ 是一Banach空间. 假设 $c_{n+2}=(u_{n+2},v_{n+2})$, $d_{n+1}=(e_{n+1},e'_{n+1})$. 式(21)和(22)式蕴含

$$\|c_{n+2}-c_{n+1}\|_*=\|u_{n+2}-u_{n+1}\|_1+\|v_{n+2}-v_{n+1}\|_2\leqslant$$
$$(\Lambda_n+\kappa_n)\|u_{n+1}-u_n\|_1+(\Theta_n+\vartheta_n)\|v_{n+1}-v_n\|_2+$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\|e'_{n+1}-e'_n\|_2+\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\|e_{n+1}-e_n\|_1\leqslant$$
$$\chi_{n+1}\|c_{n+1}-c_n\|_*+\gamma\|d_{n+1}-d_n\|_*, \tag{23}$$

其中, $\chi_{n+1}=\max\{\Lambda_n+\kappa_n,\Theta_n+\vartheta_n\}$ 和 $\gamma=\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}},\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\right\}$.

令

$$\Lambda=\frac{1}{\sqrt{2\zeta_1+1}}\Bigg[\frac{\tau_1}{r_1-\rho_1 m_1}\sqrt{\epsilon_1^2 s_1^2+2\rho_1\alpha_1 l_{11}(\epsilon_1 s_1+\rho_1\alpha_1 l_{11})}+$$
$$\frac{\tau_1\rho_1}{r_1-\rho_1 m_1}(\xi_{11}+\xi_{13}l_{31})+\mu_1 l_{31}\Bigg],$$
$$\Theta=\frac{\tau_1\rho_1}{\sqrt{2\zeta_1+1}(r_1-\rho_1 m_1)}(\xi_{12}+\beta_1 l_{21}),$$
$$\kappa=\frac{\tau_2\rho_2}{\sqrt{2\zeta_2+1}(r_2-\rho_2 m_2)}(\xi_{21}+\alpha_2 l_{12}),$$
$$\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2\zeta_2+1}}\Bigg[\frac{\tau_2}{r_2-\rho_2 m_2}\sqrt{\epsilon_2^2 s_2^2+2\rho_2\beta_2 l_{22}(\epsilon_2 s_2+\rho_2\beta_2 l_{22})}+$$
$$\frac{\tau_2\rho_2}{r_2-\rho_2 m_2}(\xi_{22}+\xi_{23}l_{32})+\mu_2 l_{32}\Bigg].$$

于是,我们知道当 $n\to\infty$ 时, $\Lambda_n\to\Lambda$, $\Theta_n\to\Theta$, $\kappa_n\to\kappa$, $\vartheta_n\to\vartheta$ 和

$$\chi_{n+1}=\max\{\Lambda_n+\kappa_n,\Theta_n+\vartheta_n\}\to\chi=\max\{\Lambda+\kappa,\Theta+\vartheta\}.$$

由式(10)知, $0 < \chi < 1$ 且因此存在 $n_0 > 0$ 和 $\chi_0 \in (0, 1)$ 使得 $\chi_{n+1} \leqslant \chi_0$ 对一切 $n \geqslant n_0$ 成立. 所以, 由式(23), 有

$$\| c_{n+2} - c_{n+1} \|_* \leqslant \chi_0 \| c_{n+1} - c_n \|_* + \gamma \| d_{n+1} - d_n \|_*, \qquad \forall n \geqslant n_0. \tag{24}$$

式(24)蕴含

$$\| c_{n+1} - c_n \|_* \leqslant \chi_0^{n-n_0} \| c_{n_0+1} - c_{n_0} \|_* + \gamma \sum_{j=1}^{n-n_0} \chi_0^{j-1} t_{n-(j-1)}, \tag{25}$$

其中, $t_{n+1} = \| d_{n+1} - d_n \|_*$, $\forall n \geqslant n_0$. 因此, 对任何 $m \geqslant n > n_0$,

$$\| u_m - u_n \|_1 \leqslant \| c_m - c_n \|_* \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \| c_{k+1} - c_k \|_* \leqslant$$

$$\sum_{k=n}^{m-1} \chi_0^{k-n_0} \| c_{n_0+1} - c_{n_0} \|_* + \gamma \sum_{k=n}^{m-1} \chi_0^k \left[\sum_{j=1}^{k-n_0} \frac{t_{k-(j-1)}}{\chi_0^{k-(j-1)}} \right].$$

因为 $\sum_{j=1}^{\infty} \| e_j - e_{j-1} \|_1 \tilde{\omega}^{-j} < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} \| e'_j - e'_{j-1} \|_1 \tilde{\omega}^{-j} < \infty$, $\forall \tilde{\omega} \in (0, 1)$ 和 $0 < \chi_0 < 1$, 由此推得当 $n \to \infty$ 时, $\| u_m - u_n \|_1 \to 0$, 且因此 u_n 是 E_1 内的一 Cauchy 序列. 类似地, 我们能证明 v_n 是 E_2 内的一 Cauchy 序列. 因此, 存在 $u \in E_1$ 和 $v \in E_2$ 使得 $u_n \to u$ 和 $v_n \to v$. 由算法 2.1 和 $S_1, T_1, G_1, S_2, T_2, G_2$ 的 Lipschitz 连续性, 我们得到

$$\begin{cases} \| x_1^{n+1} - x_1^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(S_1(u_{n+1}), S_1(u_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{11} \| u_{n+1} - u_n \|_1, \\ \| y_1^{n+1} - y_1^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(T_1(v_{n+1}), T_1(v_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{21} \| v_{n+1} - v_n \|_2, \\ \| z_1^{n+1} - z_1^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(G_1(u_{n+1}), G_1(u_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{31} \| u_{n+1} - u_n \|_1, \\ \| x_2^{n+1} - x_2^n \|_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_1(S_2(u_{n+1}), S_2(u_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{12} \| u_{n+1} - u_n \|_1, \\ \| y_2^{n+1} - y_2^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(T_2(v_{n+1}), T_2(v_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{22} \| v_{n+1} - v_n \|_2, \\ \| z_2^{n+1} - z_2^n \|_2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) H_2(G_2(v_{n+1}), G_2(v_n)) \leqslant \\ \quad \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) l_{32} \| v_{n+1} - v_n \|_2. \end{cases} \tag{26}$$

由此推得 $\{x_1^n\}$, $\{y_1^n\}$, $\{z_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{y_2^n\}$ 和 $\{z_2^n\}$ 都是 Cauchy 序列. 因此, 存在 x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 和 z_2 使得当 $n \to \infty$ 时, $x_1^n \to x_1$, $y_1^n \to y_1$, $z_1^n \to z_1$, $x_2^n \to x_2$, $y_2^n \to y_2$ 和 $z_2^n \to z_2$. 下面我们将证明 $x_1 \in S_1(u)$. 注意到 $x_1^n \in S_1(u_n)$, 有

$$
\begin{aligned}
d(x_1, S_1(u)) &\leqslant \|x_1 - x_1^n\|_1 + d(x_1^n, S(u)) \leqslant \\
&\|x - x_1^n\|_1 + H(S_1(u_n), S_1(u)) \leqslant \\
&\|x_1 - x_1^n\|_1 + l_{11}\|x_1^n - x_1\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

因为 $S_1(u)$ 是闭的, 故 $x_1 \in S_1(u)$. 类似地, 容易证明 $y_1 \in T_1(v)$, $z_1 \in G_1(u)$, $x_2 \in S_2(u)$, $y_2 \in T_2(v)$ 和 $z_2 \in G_2(v)$.

由条件(9), 引理 1.2 和所有映射的连续性, 在式(6) 中, 令 $n \to \infty$, 得到

$$
\begin{cases}
(g_1 - p_1)(u) = R^{H_1, \eta_1}_{M_1(\cdot, z_1), \rho_1}(H_1((g_1 - p_1)(u)) + \rho_1\omega_1 - \\
\qquad \rho_1 N_1(x_1, y_1) - \rho_1 F_1(u, v, z_1)), \\
(g_2 - p_2)(v) = R^{H_2, \eta_2}_{M_2(\cdot, z_2), \rho_2}(H_2((g_2 - p_2)(v)) + \rho_2\omega_2 - \\
\qquad \rho_2 N_2(x_2, y_2) - \rho_2 F_2(u, v, z_2)),
\end{cases} \tag{27}
$$

其中, $R^{H_i, \eta_i}_{M_i(\cdot, z_i), \rho_i} = (H_i + \rho_i M_i(\cdot, z_i))^{-1} (i = 1, 2)$, $\rho_1, \rho_2 > 0$ 是常数. 由引理 2.1, $(u, x_1, y_1, z_1, v, x_2, y_2, z_2)$ 是SSMQVLI(1) 的一解. 证毕.

注 2.1 1) 显然对 $i = 1, 2$, $\zeta_i \leqslant s_i + 1$ 和 $r_i \leqslant \epsilon_i$. 于是对某些适当的常数, 例如, 对 $i = 1, 2$, 令 $\zeta_i = 0.22$, $r_i = \epsilon_i = 101$, $s_i = 1/101$, $\tau_i = 6$, $\mu_i = 1/10$, $\rho_i = m_i = \alpha_i = \beta_i = l_{1i} = l_{2i} = l_{3i} = \xi_{i1} = \xi_{i2} = \xi_{i3} = 1$, 则定理 2.1 中的条件(10) 成立.

2) 利用本文中的方法, 我们能推广算法 2.1 和定理 2.1 到 $n-$ 集值混合拟似变分包含问题组.

3) 在定理 2.1 和算法 2.1 中, 由适当选取 $e_n, e_n', H_1, H_2, g_1, g_2, p_1, p_2, \eta_1, \eta_2, F_1, F_2, N_1, N_2, M_1, M_2, S_1, S_2, T_1, T_2, G_1, G_2, E_1$ 和 E_2, 我们能得到许多新结果和文献[4-11, 16-19, 26-28] 中某些已知结果的推广. 我们强调SSMQVLI(1) 的解的存在性结果和算法是在没有光滑性的一般 Banach 空间内给出的, 并且集值映射可以不是单调或增生的.

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. Fixed point theory and Nonlinear problems[A]. In: Browder F E Ed. Proc Symp Pure Math [C]. **39**. Providence, Rhode Island: American Math Soc, 1980, 49-87.

[2] Gorniewicz L. Topoligical Fixed Point Theory of Multivalued Mapping[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[3] Ding X P, Lou C L. Perturbed proximal point algorithm for generalized quasi-variational-like inclusions[J]. J Comput Appl Math, 2000, **113**(1/2): 153-165.

[4] Huang N J, Fang Y P. A new class of generalized variational inclusions involving maximal $\eta-$ monotone mappings[J]. Publ Math Debrecen, 2003, **62**(1/2): 83-98.

[5] Fang Y P, Huang N J. H-monotone operator and resolvent operator technique for variational inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, **145**(2/3): 795-803.

[6] Fang Y P, Huang N J, Thompson H B. A new system of variational inclusions with (H, η)-monotone operators in Hilbert spaces[J]. Comput Math Appl, 2005, **49**(2/3): 365-374.

[7] Verma R U. Generalized nonlinear variational inclusion problems involving A-monotone mappings [J]. Appl Math Lett, 2006, **19**(9): 960-963.

[8] Verma R U. Sensitivity analysis for generalized strongly monotone variational inclusions based on the (A, η)-resolvent operator technique[J]. Appl Math Lett, 2006, **19**(12): 1409-1413.

[9] Zhang Q B. Generalized implicit variational-like inclusion problems involving $G-\eta-$monotone mappings[J]. Appl Math Lett, 2007, **20**(2): 216-221.

[10] Lou J, He X F, He Z. Iterative methods for solving a system of variational inclusions involving H-η-monotone operators in Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 2008, **55**(7): 1532-1541.

[11] Feng H R, Ding X P. A new system of generalized nonlinear quasi-variational-like inclusions with A-monotone operators in Banach spaces[J]. J Comput Appl Math. DOI: 10.1016/j.cam.2008.07.048.

[12] Lan H Y, Cho Y J, Verma R U. Nonlinear relaxed cocoercive variational inclusions involving (A, η)-accretive mappings in Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 2006, **51**(9/10): 1529-1538.

[13] Lan H Y. (A, η)-accretive mappings and set-valued variational inclusions with relaxed cocoercive mappings in Banach spaces[J]. Appl Math Lett, 2007, **20**(5): 571-577.

[14] Peng J W. On a new system of generalized mixed quasi-variational-like inclusions with (H, η)-accretive operators in real q-uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2008, **68**(4): 981-993.

[15] Peng J W. Set-valued variational inclusions with T-accretive operators in Banach spaces[J]. Appl Math Lett, 2006, **19**(3): 273-282.

[16] Peng J W, Zhu D L. A new system of generalized mixed quasi-vatiational inclusions with (H, η)-monotone operators[J]. J Math Anal Appl, 2007, **327**(10): 175-187.

[17] Fang Y P, Huang N J. H-monotone operators and system of variational inclusions[J]. Common Appl Nonlinear Anal, 2004, **11**(1): 93-101.

[18] Lan H Y, Kim J H, Cho Y J. On a new system of nonlinear A-monotone multivalued variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 2007, **327**(1): 481-493.

[19] Verma R U. General system of (A, η)-monotone variational inclusion problems based on generalized hybrid iterative algorithm[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2007, **1**(3): 326-335.

[20] Lan H Y. New Proximal algorithms for a class of (A, η)-accretive variational inclusion problems with non-accretive set-valued mapping[J]. J Appl Math Comput, 2007, **25**(1/2) 255-267.

[21] Yan W Y, Fang Y P, Huang N J. A new system of set-valued variational inclusions with H-monotone operators[J]. Math Inequal Appl, 2005, **8**(3): 537-546.

[22] Cho Y J, Fang Y P, Huang N J. Algorithms for systems of nonlinear variational inequalities[J]. J Korean Math Soc, 2004, **41**(2): 489-499.

[23] Kazmi K R, Khan F A. Iterative approximation of a solution of multi-valued variational-like inclusion in Banach spaces: A P-η-proximal-point mapping approach[J]. J Math Anal Appl, 2007, **325**(1): 665-674.

[24] Ding X P. Perturbed Ishikawa type iterative algorithm for generalized quasivariational inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, **141**(2/3): 359-373.

[25] Ding X P, Feng H R. The p-step iterative algorithm for a system of generalized mixed quasi-variational inclusions with (A, η)-accretive operators in q-uniformly smooth banach spaces[J]. J Comput Appl Math, 2008, **220**(1/2): 163-174.

[26] Kazmi K P, Khan F A. Iterative approximation of a unique solution of a system of vatiational-like inclusions in real q-uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2007, **67**(3): 917-929.

[27] Peng J W, Zhu D L. Three-step iterative algorithm for a system of set-valued variational inclusions with (H, η)-monotone operators[J]. Nonlinear Anal, 2008, **68**(1): 139-153.

[28] Zeng L C. An iterative method for generalized nonlinear set-valued mixed quasi-variational inequalities with H-monotone mappings[J]. Comput Math Appl, 2007, **54**(4): 476-483.

[29] Ding X P, Yao J C, Existence and algorithm of solutions for mixed quasi-variationallike inclusions in Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 2005, **49**(5/6): 857-869.

[30] Schaible S, Yao J C, Zeng L C. A proximal method for pseudomonotone type variational-like inequalities[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, **10**(2): 497-513.

[31] Zeng L C, Guu S M, Yao J C. Three-step iterative algorithms for solving the system of generalized mixed quasi-variational-like inclusions[J]. Comput Math Appl, 2007, **53**(10): 1572-1581.

[32] Zeng L C, Wu S Y, Yao J C. New accuracy criteria for modified approximate proximal point algorithms in Hilbert space[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2008, **12**(4): 1691-1705.

[33] Zeng L C, Yao J C. Mixed projection methods for systems of variational inequalities[J]. Journal of Global Optimization, 2008, **41**(3): 465-478.

[34] Ding X P, Yao J C, Zeng L C. Existence and algorithm of solutions for generalized strongly nonlinear mixed variational-like inequalities in Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 2008, **55**(4): 669-679.

[35] Petryshyn W V. A characterization of strict convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings[J]. J Funct Anal, 1970, **6**(2): 282-291.

[36] Nadler S B. Multivalued contraction mapping[J]. Pacific J Math, 1969, **30**(2): 475-488.

System of Set-Valued Mixed Quasi-Variational-Like Inclusions Involving *H*-eta-Monotone Operators in Banach Spaces

DING Xie-ping, WANG Zhong-bao

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: A new system of set-valued mixed quasi-variational-like inclusions (SSMQVLI) involving H-eta-monotone operators is introduced and studied in general Banach spaces without uniform smoothness. By using the resolvent operator technique of H-eta-monotone operators, a new iterative algorithm for finding the approximation solutions of the SSMQVLI was suggested and analyzed. It was also proved that the iterative sequences generated by the algorithm converge strongly to the exact solution of the SSMQVLI under suitable assumptions. These results are new, and extend and improve the corresponding results in this field.

Key words: *H*-eta-monotone operators; resolvent operator technique; system of set-valued mixed quasi-variational-like inclusions; iterative algorithm; Banach spaces