文章编号: 1000-0887(2009) 01-0030-10

广义 KdV 方程 Fourier 谱逼近的最优误差估计*

邓镇国[1,2], 马和平[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 广西大学 数学与信息科学学院, 南宁 530004)

(周哲玮推荐)

摘要: 分析了一类带周期边界条件的广义 KdV 方程 Fourier 谱方法, 得到了 L^2 范数下最优误差估计, 改进了由 Maday 和 Quarteroni 给出的结果. 还提出了一种修改 Fourier 拟谱方法, 并且证明它享有与 Fourier 谱方法同样的收敛性.

关 键 词: Fourier 谱方法; 修改 Fourier 拟谱方法; 广义 KdV 方程; 误差估计
中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

本文讨论了对下面一类带周期边界条件的广义 KdV(gKdV) 方程 Fourier 谱方法逼近:

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) + \partial_x F(U)(x, t) + \partial_x^3 U(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R},\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x + 2\pi, t) = U(x, t), & x \in \mathbf{R},\ 0 < t \leqslant T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

其中, U_0 在空间方向以 2π 为周期和 $F(U) = (1/m)U^m$, 这里 $2 \leqslant m \leqslant 4$ 并且 m 是整数. 广义 KdV 方程在物理领域有着广泛的应用, 比如水波、等离子体物理和非谐晶体等. 特殊地, $m = 2, 3$ 的情形分别是 KdV 和 mKdV. 无论是理论方面还是计算方面, 这些方程的 Fourier 谱或拟谱方法已经被许多学者研究过[1-7].

1988 年, Maday 和 Quarteroni[5] 分析了 KdV 方程的一类 Fourier 谱和拟谱方法的收敛性. 他们证明, 在 L^2 范数意义下, 当解析解属于 Sobolev 空间 H^r 时半离散 Fourier 谱方法的误差仅是 $O(N^{1-r})$. 相同条件下, 半离散 Fourier 拟谱方法的误差在 H^1 范数意义下仅是 $O(N^{2-r})$. 直到现在, 这些结果仍没有被改进, 特别是后者.

本文的目的是给出问题(1) Fourier 谱(FS) 方法的最优误差估计. 还提出了一种修改 Fourier 拟谱(MFP) 方法, 并且证明它享有与 Fourier 谱方法同样的收敛性.

在第 1 节, 本文对问题(1) 给出 FS 方法和 MFP 方法. 在第 2 节, 对 Fourier 谱逼近和插值

* 收稿日期: 2008-03-05; 修订日期: 2008-11-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874039); 上海市重点学科建设资助项目(J50101)
作者简介: 邓镇国(1978—) , 男, 广东人, 博士(E-mail: zhgdeng@ gmail. com) ;
马和平, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: hpma@ shu. edu. cn) .

提供了严格的误差分析．在第3节和第4节，分析了FS和MFP方法的稳定性和收敛性．本文不打算给出全离散格式的分析过程，更愿意在第5节提出一些关于mKdV方程和gKdV方程的数值结果来表明这些格式在时空方向的精度．

1　格　　式

设 $I=(-\pi,\pi)$．$L^2(I)$ 的内积和范数分别用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 来表示．对任意实数 $r\geqslant 0$，$H^r(I):=W^{r,2}(I)$ 表示通常的Sobolev空间，相应的范数和半范数分别用 $\|\cdot\|_r$ 和 $|\cdot|_r$ 来表示．令 $H_p^r(I)$ 表示 $H^r(I)$ 中所有以 2π 为周期的函数构成的子空间，相应的等价范数和半范数如下：

$$\|u\|_r=\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}(1+|l|^2)^r|a_l|^2\right\}^{1/2},\quad |u|_r=\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}|l|^{2r}|a_l|^2\right\}^{1/2},$$

其中

$$u(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l e^{ilx},\quad a_l=\frac{1}{2\pi}\int_I u(x)e^{-ilx}dx.$$

对正整数 N，逼近空间 V_N 表示 N 阶实值三角多项式全体，它由下式定义：

$$V_N=\left\{u(x)=\sum_{|l|\leqslant N}a_l e^{ilx}:\ a_l=a_{-l},\ |l|\leqslant N\right\}.$$

令 $P_N:L^2(I)\to V_N$ 表示 L^2 正交投影算子，即

$$(P_Nu-u,v)=0,\qquad v\in V_N.$$

问题(1)的半离散FS方法是找 $u_N(t)\in V_N$，使得对任何 $v\in V_N$，成立

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t)+\partial_x P_N F(u_N)(t)+\partial_x^3 u_N(t),v)=0, & 0<t\leqslant T,\\ (u_N(0),v)=(P_N U_0,v).\end{cases}\tag{2}$$

对时间的离散，我们采用二阶leapfrog-Crank-Nicolson格式．令 τ 为时间方向步长和 $t_k=k\tau(k=0,1,\cdots,n_T;T=n_T\tau)$．由 u^k 和

$$u_{\hat t}^k=\frac{1}{2\tau}(u^{k+1}-u^{k-1}),\quad \hat u^k=\frac{1}{2}(u^{k+1}+u^{k-1}),$$

记 $u^k(x):=u(x,t_k)$．问题(1)的全离散FS方法是找 $u_N^k\in V_N$，使得对任何 $v\in V_N$，成立

$$\begin{cases}(u_{N\hat t}^k+\partial_x P_NF(u_N^k)+\partial_x^3\hat u_N^k,v)=0, & 1\leqslant k\leqslant n_T-1,\\ (u_N^1,v)=(P_N[U_0+\tau\partial_tU(0)],v),\\ (u_N^0,v)=(P_NU_0,v).\end{cases}\tag{3}$$

设 $h=2\pi/(2N+1)$，$x_j=jh-\pi(j=0,\cdots,2N)$．定义 $\mathscr{I}_N:C(I)\to V_N$ 是插值算子，使得

$$\mathscr{I}_N u(x_j)=u(x_j),\qquad j=0,\cdots,2N.$$

相应的离散内积和范数定义如下：

$$(u,v)_N=h\sum_{j=0}^{2N}u(x_j)\overline{v(x_j)},\quad \|u\|_N=(u,u)_N^{1/2}.$$

问题(1)的半离散MFP方法是找 $u_C(t)\in V_N$，使得对任何 $v\in V_N$，成立

$$\begin{cases}(\partial_t u_C(t)+\mathscr{I}_N F'(u_C(t))\partial_x u_C(t)+\partial_x^3u_C(t),v)=0, & 0<t\leqslant T,\\ (u_C(0),v)=(\mathscr{I}_N U_0,v).\end{cases}\tag{4}$$

问题(1)的全离散MFP方法是找 $u_C^k\in V_N$，使得对任何 $v\in V_N$，成立

$$\begin{cases}(u_{C\hat{t}}^k + \mathscr{I}_N F'(u_C^k)\partial_x u_C^k + \partial_x^3 \hat{u}_C^k, v) = 0, & 1 \leqslant k \leqslant n_T - 1,\\ (u_C^1, v) = (\mathscr{I}_N[U_0 + \tau\partial_t U(0)], v), \\ (u_C^0, v) = (\mathscr{I}_N U_0, v).\end{cases} \tag{5}$$

2 基本引理

贯穿全文, C 表示一个通常的正常数. 本节对 Fourier 谱逼近和插值给出严格的误差分析.

引理 2.1[8-9] 设 $0 \leqslant \mu \leqslant r$, $u \in H_p^r(I)$, 则有

$$\| P_N u - u \|_\mu \leqslant C N^{\mu - r} | u |_r, \tag{6}$$

$$\| u \|_\mu \leqslant C \| u \|_r^\theta \| u \|^{1-\theta}, \qquad \theta = \mu/r, \tag{7}$$

若再设 $r > 1/2$, 则有

$$\| \mathscr{I}_N u - u \|_\mu \leqslant C N^{\mu - r} | u |_r. \tag{8}$$

引理 2.2[8] 设 $u, v \in C(I)$, 则有

$$(u, v)_N = (\mathscr{I}_N u, \mathscr{I}_N v)_N = (\mathscr{I}_N u, \mathscr{I}_N v), \tag{9}$$

若再设 $u \in V_N$, 则有

$$| u |_r \leqslant N^{r-\mu} | u |_\mu, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant r, \tag{10}$$

$$\| u \|_{L^\infty(I)} \leqslant C N^{1/2} \| u \|. \tag{11}$$

引理 2.3[10] 假设以下条件成立:

(i) $E(t)$、$\rho(t)$ 是 $[0, T]$ 上的非负连续函数, $\rho(t)$ 单调增加, 并且 M、C 是正常数;

(ii) 对任何 $t \in (0, T]$; 若 $\max_{0 \leqslant s \leqslant t} E(s) \leqslant M$, 则 $E(t) \leqslant \rho(t) + C\int_0^t E(s)\mathrm{d}s$;

(iii) $E(0) \leqslant \rho(0)$ 并且 $\rho(T)\mathrm{e}^{CT} \leqslant M$.

则对任何 $t \in (0, T]$, 有 $E(t) \leqslant \rho(t)\mathrm{e}^{Ct}$.

引理 2.4 假设 $F(z) \in C^2(\mathbf{R})$ 和 $U \in C^1(I)$. 则存在依赖 U 的常数 $\mathscr{K}$ 和 N_0, 使得对任何 $N \geqslant N_0$, 投影算子 $P_N^*: H_p^1(I) \to V_N$ 由下式定义:

$$\begin{aligned}&\mathscr{K}(u - P_N^* u, v) + (\partial_x(u - P_N^* u), \partial_x^2 v) + \\ &\quad (F'(U)\partial_x(u - P_N^* u), v) = 0, \qquad v \in V_N.\end{aligned} \tag{12}$$

进一步假设 $r \geqslant 0$, $0 \leqslant l \leqslant \min\{3, r\}$. 若 $u \in H_p^r(I)$, 则

$$\| P_N^* u - u \|_l \leqslant C N^{l-r} | u |_r. \tag{13}$$

若 $F(z) \in C^3(\mathbf{R})$, $U \in C^1(0, T; C^l(I))$ 和 $u \in C^1(0, T; H_p^r(I))$, 则

$$\| P_N^* u - u \|_{C^1(0,T;H_p^l(I))} \leqslant C N^{l-r} \| u \|_{C^1(0,T;H_p^r(I))}. \tag{14}$$

证明 设 $w = P_N^* u$ 和 $\eta = u - w$. 式(12)可以写成

$$b_N(w, v) = (h, v), \qquad v \in V_N, \tag{15}$$

其中

$$b_N(w, v) = \mathscr{K}(w, v) + (\partial_x w, \partial_x^2 v) + (F'(U)\partial_x w, v), \qquad w, v \in V_N,$$

$$h = \mathscr{K}u + \partial_x^3 u + F'(U)\partial_x u, \qquad u \in H_p^3(I).$$

易证 w 在 V_N 中是存在且唯一的.

现在开始估计 $\| \eta \|$. 这里采用 Wahlbin 方法[11]. 首先, 考虑下面方程

$$\mathscr{K}(\eta, v + N^{-3}\partial_x^3 v) + (\partial_x^3\eta + F'(U)\partial_x\eta, v + N^{-3}\partial_x^3 v) = 0, \qquad v \in V_N. \tag{16}$$

令

$$\mathscr{K} \geqslant \frac{1}{2}\|F''(U)\partial_x U\|_{C(I)} + N^{-3}\|F'(U)\|_{C(I)}^4,$$

并利用式(16)推出，对任何 $\varphi \in H_p^3(I)$ 成立

$$\mathscr{K}(\varphi, \varphi + N^{-3}\partial_x^3\varphi) + (\partial_x^3\varphi + F'(U)\partial_x\varphi, \varphi + N^{-3}\partial_x^3\varphi) \geqslant \frac{1}{C}(N^{-3}\|\partial_x^3\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2), \tag{17}$$

其中

$$\frac{1}{C} = \min\left(\frac{1}{2}, \mathscr{K} - \frac{1}{2}\|F''(U)\partial_x U\|_{C(I)} - N^{-3}\|F'(U)\|_{C(I)}^4\right).$$

利用式(16)和式(17)推出对充分大的 N，成立

$$\begin{aligned}N^{-3}\|\partial_x^3\eta\|^2 + \|\eta\|^2 \leqslant\ & C(\mathscr{K}(\eta, \eta + N^{-3}\partial_x^3\eta) + (\partial_x^3\eta + F'(U)\partial_x\eta, \eta + N^{-3}\partial_x^3\eta)) = \\ & C(\mathscr{K}(\eta, u - P_N u + N^{-3}\partial_x^3(u - P_N u)) + \\ & (\partial_x^3\eta + F'(U)\partial_x\eta, u - P_N u + N^{-3}\partial_x^3(u - P_N u))).\end{aligned}$$

从而根据式(7)得

$$\|\partial_x^3\eta\| + N\|\partial_x\eta\| + N^{3/2}\|\eta\| \leqslant CN^{3-r}|u|_r. \tag{18}$$

接着为了导出 $\|\eta\|$ 的最优误差估计，要考虑式(16)的对偶方程．给定 η，找 $\phi \in H_p^3(I)$ 使得

$$(\phi + N^{-3}\partial_x^3\phi, \mathscr{K}\psi + F'(U)\partial_x\psi + \partial_x^3\psi) = (\eta, \psi), \qquad \psi \in H_p^3(I). \tag{19}$$

易证存在一个常数 C 使得对充分大的 N，成立

$$\|\phi\|_3 \leqslant C\|\eta\|. \tag{20}$$

在式(19)中取 $\psi = \eta$，并利用式(16)推出

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2 = & (\mathscr{K}\eta + \partial_x^3\eta + F'(U)\partial_x\eta, \phi - P_N\phi + N^{-3}\partial_x^3(\phi - P_N\phi)) \leqslant \\ & C\|\eta\|_3(N^{-3}\|\partial_x^3(\phi - P_N\phi)\| + \|\phi - P_N\phi\|).\end{aligned}$$

从而利用式(7)、(20)和(18)得

$$\|\eta\| \leqslant CN^{-r}|u|_r, \tag{21}$$

从式(7)、(18)和(21)直接得到式(13)．

接着证明式(14)．此处 u 和 U 都与 t 有关．因此假设

$$\mathscr{K} \geqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\|F''(U)\partial_x U(t)\|_{C(I)} + N^{-3}\|F'(U)\|_{C(I)}^4\right). \tag{22}$$

对方程式(16)关于 t 微分，并令 $G = F''(U)\partial_t U$ 得到对任何 $v \in V_N$，成立

$$\mathscr{K}(\partial_t\eta + \partial_x^3\partial_t\eta + F'(U)\partial_x\partial_t\eta, v + N^{-3}\partial_x^3 v) = (G\partial_x\eta, v + N^{-3}\partial_x^3 v). \tag{23}$$

利用式(7)、(13)、(22)和(23)，通过类似于式(18)的推导，得到

$$\|\partial_x^3\partial_t\eta(t)\| + N\|\partial_x\partial_t\eta(t)\| + N^{3/2}\|\partial_t\eta(t)\| \leqslant CN^{3-r}(|u(t)|_r + |\partial_t u(t)|_r). \tag{24}$$

接着在式(19)的右端用 $\partial_t\eta$ 替换 η，然后找 $\phi \in H_p^3(I)$，使得

$$(\phi + N^{-3}\partial_x^3\phi, \mathscr{K}\psi + F'(U)\partial_x\psi + \partial_x^3\psi) = (\partial_t\eta, \psi), \qquad \psi \in H_p^3(I). \tag{25}$$

在式(25)中取 $\psi = \partial_t \eta$, 通过类似于式(21)的推导, 得到

$$\|\partial_t \eta(t)\| \leqslant CN^{-r}(|u(t)|_r + |\partial_t u(t)|_r). \tag{26}$$

从式(7)、(24)和(26)直接得到式(14). 这就完成了引理 2.4 的证明.

3 FS 法的稳定性和收敛性

本节考虑半离散 FS 方法的稳定性和收敛性. 假设格式(2)的解 $u_N(t)$ 和右端项分别产生误差 $u(t)$ 和 $f(t) \in V_N$. 根据式(2)得下面误差方程:

$$\begin{cases} (\partial_t u(t) + \partial_x P_N F(t) + \partial_x^3 u(t) - f(t), v) = 0, & 0 < t \leqslant T, \\ (u(0), v) = (u_0, v), \end{cases} \tag{27}$$

其中 $F = F(u_N + u) - F(u_N)$.

借助引理 2.3, 可能得到稳定性. 对给定 $t \in (0, T]$, 假设

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|u(s)\| \leqslant N^{-1/2}, \quad C_F := \max_{2 \leqslant k \leqslant m-1} \max_{|z| \leqslant \|u_N\|_{C(0,T;L^\infty(I))} + C_1} |F^{(k)}(z)|, \tag{28}$$

其中, C_1 是式(11)的常数, 使得

$$\|u(s)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_1 N^{1/2} \|u(s)\| \leqslant C_1, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{29}$$

在式(27)中取 $v = u(t)$, 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2 = (f(t) - \partial_x F(t), u(t)). \tag{30}$$

考虑 $0 \leqslant s \leqslant t$. 估计式(30)中各项. 由简单计算先得

$$\begin{aligned} (\partial_x F, u) = {} & (F'(u_N + u)\partial_x(u_N + u) - F'(u_N)\partial_x u_N, u) = \\ & \left(\int_0^1 F^{(2)}(u_N + \theta u)\,\mathrm{d}\theta \partial_x u_N, u^2\right) + \\ & \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1}\left(F^{(m)}(u_N + u)\partial_x u_N, \frac{u^k}{k!}\right) + \\ & (-1)^{m+1}\left(F^{(m)}(u_N + u)\partial_x u, \frac{u^m}{m!}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

然后利用事实 $F^{(m)}(z) = \partial_z^m F(z) = 1$ 导出

$$|(\partial_x F(s), u(s))| \leqslant C_F \|u_N(s)\|_{C^1(I)} \|u(s)\|^2. \tag{32}$$

接着利用 Cauchy 不等式得

$$|(f(t), u(t))| \leqslant \|f(t)\|^2 + \|u(t)\|^2. \tag{33}$$

在式(30)中利用式(32)、(33), 并定义

$$E(t) = \|u(t)\|^2, \quad \rho(t) = CN^{-2r},$$

从而得到

$$E(t) \leqslant \rho(t) + C\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 < t \leqslant T.$$

利用引理 2.3, 得到下面稳定性结论.

定理 3.1 存在依赖于 $\|u_N\|_{C(0,T;C^1(I))}$ 的常数 C, 使得若

$$\rho(t) \leqslant C_1^2 \mathrm{e}^{-CT}(2N + 1)^{-1},$$

则

$$E(t) \leqslant \rho(t)\mathrm{e}^{Ct}, \qquad 0 < t \leqslant T.$$

接着考虑格式(2)的收敛性．令 $u^*(t)=(P_N^*U)(t)$ 作比较函数，并且 $e_N(t)=u_N(t)-u^*(t)$．根据式(1)、(2) 和(12)，得到对任何 $v\in V_N$ 成立

$$\begin{cases}(\partial_t e_N(t)+\partial_x P_N F(t)+\partial_x^3 e_N(t)-g(t),v)=0, & 0<t\leqslant T,\\ (e_N(0),v)=(u_N(0)-u^*(0),v),\end{cases}\tag{34}$$

其中

$$F=F(u_N)-F(u^*),$$

$$g=\mathscr{K}(u^*-U)+(F'(U)-F'(u^*))\partial_x u^*+\partial_t(U-u^*):=g_1+g_2+g_3.$$

正如在稳定性分析中那样，需要估计 g．先利用式(13)分别得到，

$$\|g_1(s)\|=\|\mathscr{K}(u^*-U)\|\leqslant CN^{-r}|U(s)|_r,$$

$$\|g_2(s)\|=\left\|\int_0^1 F''(u^*+\theta(U-u^*))\mathrm{d}\theta(U-u^*)\partial_x u^*\right\|\leqslant$$

$$\max_{|z|\leqslant 2\|U\|_{C(0,T;H^2(I))}}|F''(z)|\ \|\partial_x u^*\|_{C(0,T;L^\infty(I))}\|U-u^*\|\leqslant$$

$$CN^{-r}|U(s)|_r.$$

接着利用式(14)得

$$\|g_3(s)\|\leqslant\|\partial_t(U-u^*)\|\leqslant CN^{-r}|\partial_t U(s)|_r.$$

关于初始误差，由式(7)和(13)就可以得到

$$\|e_N(0)\|=\|P_N U(0)-U_0+U_0-P_N^*U(0)\|\leqslant CN^{-r}|U(0)|_r.$$

因此利用三角不等式和式(13)，就能得到下面收敛性结论．

定理 3.2　假设 $r\geqslant 3$, $U\in C^1(0,T;H_p^r(I))$．则对任何 $0\leqslant t\leqslant T$，成立

$$\|u_N(t)-U(t)\|\leqslant CN^{-r}.$$

4　MFP 方法的稳定性和收敛性

本节考虑半离散 MFP 方法的稳定性和收敛性．假设格式(4)的解 $u_C(t)$ 和右端项分别产生误差 $u(t)$ 和 $f(t)\in V_N$．根据式(4)得下面误差方程:

$$\begin{cases}(\partial_t u+\mathscr{T}_N F\partial_x u_C+\mathscr{T}_N F\partial_x u+\mathscr{T}_N F'(u_C)\partial_x u+\\ \qquad \partial_x^3 u-f,v)=0, \quad 0<t\leqslant T,\\ (u(0),v)=(u_0,v),\end{cases}\tag{35}$$

其中

$$F=F'(u_C+u)-F'(u_C):=Qu,\ \ Q=\int_0^1 F''(u_C+\theta u)\mathrm{d}\theta.$$

借助引理 2.3，可能得到稳定性．对给定 $t\in(0,T]$，假设

$$\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|\leqslant N^{-3/2}.\tag{36}$$

在式(35)中取 $v=u(t)$，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2=(f-\mathscr{T}_N F\partial_x u_C-\mathscr{T}_N F\partial_x u-\mathscr{T}_N F'(u_C)\partial_x u,u).\tag{37}$$

考虑 $0\leqslant s\leqslant t$．估计式(37)中各项．先利用式(9)得

$$\|\mathscr{T}_N F\|^2=\|F\|_N^2=h\sum_{j=0}^{2N}((Qu)(x_j))^2\leqslant$$

$$\max_{0\leqslant j\leqslant 2N}|Q(x_j)|^2 h\sum_{j=0}^{2N}(u(x_j))^2\leqslant$$
$$\max_{|z|\leqslant\|u_C\|_{C(0,T;C_p(I))}+C_1}|\partial_z F(z)|\ \|u\|^2,\tag{38}$$

其中, C_1 是式(11)的常数, 使得

$$\|u(s)\|_{L^\infty(I)}\leqslant C_1 N^{1/2}\|u(s)\|\leqslant C_1,\qquad 0\leqslant s\leqslant t.\tag{39}$$

从而得

$$|(\mathscr{I}_N F\partial_x u_C,u)|=\|\partial_x u_C\|_{C_p(I)}\|\mathscr{I}_N F\|\ \|u\|\leqslant$$
$$\max_{|z|\leqslant\|u_C\|_{C(0,T;C_p(I))}+C_1}|\partial_z^2 F(z)|\ \|\partial_x u_C\|_{C_p(I)}\|u\|^2.\tag{40}$$

接着利用式(11)、(36)和(38)推出

$$|(\mathscr{I}_N F\partial_x u,u)|\leqslant\|\partial_x u\|_{L^\infty(I)}\|\mathscr{I}_N F\|\ \|u\|\leqslant C\|u\|^2.\tag{41}$$

接着利用式(8)导出

$$|(\mathscr{I}_N F'(u_C)\partial_x u,u)|=\left|\left(\partial_x\mathscr{I}_N F'(u_C),\frac{1}{2}u^2\right)\right|\leqslant$$
$$C|F'(u_C)|_2\|u\|^2.\tag{42}$$

最后由 Cauchy 不等式得

$$\|(f,u)\|\leqslant\|f\|^2+\|u\|^2.\tag{43}$$

在式(35)中利用式(40)~(43), 并定义

$$E(t)=\|u(t)\|^2,\quad \rho(t)=\|u(0)\|^2+\int_0^t\|f(s)\|^2\mathrm{d}s,$$

从而得

$$E(t)\leqslant\rho(t)+C\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}s,\qquad 0<t\leqslant T.$$

利用引理 2.3, 得到下面稳定性结论.

定理 4.1 存在依赖于 $\|u_C\|_{C(0,T;H_p^2(I))}$ 的常数 C, 使得若

$$\rho(t)\leqslant C_1^2\mathrm{e}^{-CT}(2N+1)^{-1},$$

则

$$E(t)\leqslant\rho(t)\mathrm{e}^{Ct},\qquad 0<t\leqslant T.$$

接着考虑格式(4)的收敛性. 令 $u^*(t)=(P_N^*U)(t)$ 作比较函数, 并且 $e(t)=u_C(t)-u^*(t)$. 根据式(1)、(4)和(12), 得到对任何 $v\in V_N$ 成立

$$\begin{cases}(\partial_t e+\mathscr{I}_N F\partial_x u^*+\mathscr{I}_N F\partial_x e+\mathscr{I}_N F'(u_C)\partial_x e+\partial_x^3 e-g,v)=0,\\ (e(0),v)=(\mathscr{I}_N U_0-u^*(0),v),\end{cases}\tag{44}$$

其中

$$F=F'(u^*+e)-F'(u^*):=Qe,\quad Q=\int_0^1 F''(u^*+\theta e)\mathrm{d}\theta,$$
$$g=\mathscr{K}(u^*-U)+(F'(U)-\mathscr{I}_N F'(u^*))\partial_x u^*+\partial_t(U-u^*):=$$
$$g_1+g_2+g_3.$$

正如在稳定性分析中那样, 需要估计 g. 先利用式(13)分别得到

$$\|g_1(s)\|=\|\mathscr{K}(u^*-U)\|\leqslant CN^{-r}|U(s)|_r,$$

$$
\begin{aligned}
&\|(F'(U)-F'(u^*))\partial_x u^*\| \leqslant \\
&\quad \left|\int_0^1 F''(\theta U+(1-\theta)u^*)\,\mathrm{d}\theta\,\partial_x u^*(U-P_N^* U)\right| \leqslant \\
&\quad \max_{|z|\leqslant \|U(s)\|_1} |\partial_z^2 F(z)|\ \|U(s)\|_{C^1(I)}\,CN^{-r}\,|U(s)|_r,
\end{aligned}
$$

又利用式(8)得

$$\|(F'(u^*)-\mathcal{I}_N F'(u^*))\partial_x u^*\| \leqslant \|\partial_x u^*\|_{C(I)}\,CN^{-r}\,|F'(u^*)|_r.$$

接着利用式(14)得

$$\|g_3(s)\| = \|\partial_t(U(s)-u^*(s))\| \leqslant CN^{-r}|\partial_t U(s)|_r.$$

关于初始误差, 由式(8)和(13)就可以得到

$$\|e(0)\| \leqslant \|\mathcal{I}_N U_0-U_0+U_0-P_N^* U_0\| \leqslant CN^{-r}|U_0|_r.$$

因此利用三角不等式和式(13),就能得到下面收敛性结论.

定理 4.2 假设 $r\geqslant 3$, $U\in C^1(0,T;H_p^r(I))$. 则对任何 $0\leqslant t\leqslant T$, 成立

$$\|u_C(t)-U(t)\| \leqslant CN^{-r}.$$

5 数值结果

我们已经分别用 FS 方法和 MFP 方法求解了带周期边界条件的 mKdV 和广义 KdV 方程. 数值实验证实, 这两种方法在时间方向有二阶精度, 在空间方向有谱精度. 并且对适当大的 N, 二者享有几乎同样的精度.

例 1 先考虑 mKdV 方程

$$\partial_t U+U^2\partial_x U+\partial_x^3 U=0,$$

其孤子解为

$$U(x,t)=\sqrt{6}\,\kappa\,\mathrm{sech}(\kappa x-\kappa^3 t-x_0).$$

取 $\kappa=0.3$, $x_0=0$, 该问题在 $-74\leqslant x\leqslant 74$ 上分别用 FS 方法和 MFP 方法求解. 为了看清格式的精度, 先取定 $2N=256$, 令时间步长 τ 从 10^{-1} 到 10^{-3} 递减, 然后取定 $\tau=10^{-3}$, 让 $2N$ 从 64 到 256 递增. 这些结果放在表 1 中.

表 1 用 FS 方法和 MFP 方法分别求解 mKdV 方程在 $t=10$ 的误差

τ	$2N$	FS		MFP	
		L^2-误差	L^∞-误差	L^2-误差	L^∞-误差
1 E-1		7.916 0 E-6	3.530 5 E-6	7.916 0 E-6	3.530 5 E-6
1 E-2	256	7.955 5 E-8	3.539 5 E-8	7.955 5 E-8	3.539 2 E-8
1 E-3		8.628 9 E-10	3.594 1 E-10	8.939 8 E-10	3.569 9 E-10
	64	1.692 2 E-3	3.547 6 E-4	2.381 2 E-2	3.185 8 E-3
1 E-3	128	2.869 2 E-6	7.417 8 E-7	1.270 4 E-4	1.368 1 E-5
	256	8.628 9 E-10	3.594 1 E-10	8.939 8 E-10	3.569 9 E-10

例 2 接着考虑 gKdV 方程

$$\partial_t U+U^3\partial_x U+\partial_x^3 U=0,$$

其孤子解为

$$U(x,t)=\left\{10\kappa^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{3}{2}(\kappa x-\kappa^3 t-x_0)\right]\right\}^{1/3}.$$

取 $\kappa^2 = 0.1, x_0 = 0$, 该问题在 $-94 \leqslant x \leqslant 94$ 上分别用 FS 方法和 MFP 方法求解. 这些结果放在表 2 中.

表 2 用 FS 方法和 MFP 方法分别求解 gKdV 方程在 $t = 10$ 的误差

τ	$2N$	FS		MFP	
		L^2- 误差	L^∞- 误差	L^2- 误差	L^∞- 误差
1 E- 1	512	3.058 4 E- 5	1.428 7 E- 5	3.058 4 E- 5	1.428 7 E- 5
1 E- 2	512	3.072 2 E- 7	1.431 4 E- 7	3.072 2 E- 7	1.431 6 E- 7
1 E- 3	512	3.073 6 E- 9	1.429 5 E- 9	3.078 8 E- 9	1.446 8 E- 9
1 E- 3	128	1.333 9 E- 3	4.159 4 E- 4	2.804 5 E- 2	3.262 6 E- 3
1 E- 3	256	1.023 9 E- 6	2.326 1 E- 7	7.370 6 E- 5	7.554 0 E- 6
1 E- 3	512	3.073 6 E- 9	1.429 5 E- 9	3.078 8 E- 9	1.446 8 E- 9

[参 考 文 献]

[1] Abe K, Inoue O. Fourier expansion solution of the KdV equation[J]. J Computational Physics, 1980, **34**(2): 202-210.

[2] Fornberg B, Whitham G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear phenomena[J]. Phil Trans Roy Soc London Ser A, 1978, **289**(1361): 373-404.

[3] Chan T F, Kerkhoven T. Fourier methods with extended stability intervals for the Korteweg-de Vries equation[J]. SIAM J Numerical Analysis, 1985, **22**(3): 441-454.

[4] Ma H P, Guo B Y. The Fourier pseudospectral method with a restrain operator for the Korteweg-de Vries equation[J]. J Computational Physics, 1986, **65**(1): 120-137.

[5] Maday Y, Quarteroni A. Error analysis for spectral approximation of the Korteweg-de Vries equation [J]. RAIRO Mod lisation Math matique et Analyse Num rique, 1988, **22**(3): 499-529.

[6] Kalisch H. Rapid convergence of a Galerkin projection of the KdV equation[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2005, **341**(7): 457-460.

[7] Bji rkavåg M, Kalisch H. Exponential convergence of a spectral projection of the KdV equation[J]. Physics Letters A, 2007, **365**(4): 278-283.

[8] Kreiss H O, Oliger J. Stability of the Fourier method[J]. SIAM J Numerical Analysis, 1979, **16**(3): 421-433.

[9] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[10] Ma M P, Sun W W. Optimal error estimates of the Legendre-Petrov-Galerkin method for the Korteweg-de Vries equation[J]. SIAM J Numerical Analysis, 2001, **39**(4): 1380-1394.

[11] Wahlbin Lars B. A dissipative Galerkin method for the numerical solution of first order hyperbolic equations[A]. In: de Boor C, Ed. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations[C]. New York: Academic Press, 1974, 147-169.

Optimal Error Estimates for Fourier Spectral Approxiation of the Generalized KdV Equation

DENG Zhen-guo[1,2], MA He-ping[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R. China;

2. School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, P.R. China)

Abstract: A Fourier spectral method for the generalized Korteweg-de Vries equation with periodic boundary conditions is analyzed and corresponding optimal error estimate in L2-norm is obtained, which improves the one by Maday and Quarteroni. Also a modified Fourier pseudospectral method is presented and it is proven that it enjoys the same convergence properties as the Fourier spectral method.

Key words: Fourier spectral method; modified Fourier pseudospectral method; generalized Korteweg-de Vries equation; error estimate