

磁-微极广义热弹性介质中轴对称变形的弹性动力学*

R·库玛, 鲁班德

(库鲁克西察大学 数学系, 库鲁克西察-136 119, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 在横向磁场中, 表面受机械源或热源作用时, 研究磁-微极热弹性半空间中的轴对称问题. 问题的求解用到了 Laplace 和 Hankel 变换技术. 作为该方法的一个应用, 采用了集中源/沿圆周分布作用源(机械源和热源). 对积分变换的逆变换使用数值技术, 得到物理域中的应力分量和温度分布, 以及感应电场和感应电磁场. 对于两种不同的广义热弹性理论(Lord-Shulman(L-S)理论和 Green-Lindsay(G-L)理论), 给出了这些物理量的表达式, 并用插图显示磁场的影响. 还导出了一个感兴趣的特例.

关键词: 广义磁-微极热弹性; 轴对称问题; 机械源和热源; Laplace 变换; Hankel 变换
中图分类号: O343.6 文献标识码: A

引言

现代工程结构通常由具有内部结构的材料制成. 多晶体材料、纤维材料或粗粒结构材料都属于这个范畴. 经典的弹性力学已不能充分描述这种材料的性能, 这种材料的分析需要综合定向介质理论. 为 Eringen^[1] 称作的“微极弹性体”, 可以用来描述带定向微粒弹性介质的变形. 微极连续体是一个互相连接的微粒以小刚体形式的集合, 小刚体能够作平动和转动. 这种材料的典型例子是颗粒介质和多分子体, 它们的微观结构在宏观响应中起着明显的作用. 这些材料的物理特性需要用非对称变形来描述, 然而, 经典的连续体理论是无法正确地预测它们的物理和力学性能. 正是这个原因, Eringen^[1-2] 针对弹性固体、微极流体发展了微极线性理论, 更进一步的非局部极性场^[3], 并且, 目前已被广泛地接受.

经典的热弹性理论是基于 Fourier 原理, Fourier 原理预测的热传递速度是一个无穷大值. 为了消除热传递速度为无穷大这个悖论, 考虑耦合理论的两个推广.

首先是由 Lord 和 Shulman^[4] 提出的, 带一个松弛时间的广义热弹性理论. 该理论基于一个全新的热传递原理, 替代了 Fourier 原理. 其中, 热传递方程被一个双曲型方程取代, 确保了热量和弹性波传播过程中速度是有限的.

* 收稿日期: 2008-04-10; 修订日期: 2008-10-15

作者简介: Rajneesh Kumar, 教授, 博士(联系人, E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com);

Rupender(E-mail: rupee_kuk@rediffmail.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

带两个松弛时间的广义热弹性理论首先是由 Mullar^[5] 提出, 一个更为合理的版本, 后由 Green 和 Laws^[6], Green 和 Lindsay^[7] 提出, 同时为 Suhubi^[8] 独立提出. 在这个理论中, 温度的变化速率被作为变量之一考虑. 同 Lord-Shulman 理论一样, 该理论的热量传递速度也是有限的.

Kalaski^[9] 导出了热-磁-微极弹性体的基本方程. Nowacki^[10] 研究了微极磁弹性体的一些问题. Kumar 和 Choudhary^[11], Kumar 和 Deswal^[12] 讨论了微极弹性介质和广义的微极热弹性半空间中的轴对称问题. 尽管有了这些成果, 磁-微极热弹性理论的研究还远远不够.

本文在均匀、各向同性、广义磁-微极热弹性介质中, 就机械源和热源作用下的二维轴对称问题, 确定其应力分量、温度分布、感应电场和感应磁场.

1 基本方程

对一个均匀、导电性能良好的弹性固体, 缓慢移动介质时, 其线性的简化电动力学方程组如下:

$$\operatorname{curl} \mathbf{h} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mathbf{E}, \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{h}}, \mathbf{E} = -\mu_0 (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad (1)$$

Maxwell 应力分量为

$$T_{ij} = \mu_0 (H_i h_j + H_j h_i - H_k h_k \delta_{ij}), \quad (2)$$

其中, \mathbf{H}_0 为外部作用磁场强度矢量, \mathbf{h} 为感应磁场矢量, \mathbf{E} 为感应电场矢量, \mathbf{J} 为电流密度矢量, \mathbf{u} 为位移矢量, μ_0 和 ε_0 分别为磁导率和导电率, δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号.

对微极广义热弹性理论, 上述方程 (1) 需补充场方程和本构方程, 考虑 Lorentz 力作用, 有

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3)$$

$$m_{ij,j} = \rho J \dot{\phi}_i, \quad (4)$$

$$K^* T_{,qq} = \rho c^* (T_{,t} + \tau_0 \dot{T}) + \nu_0 (u_{ij,j} + n_0 \tau_0 \ddot{u}_{i,j}), \quad (5)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{q,q} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + K (u_{j,i} - \varepsilon_{jq} \phi_q) - \nu \left[1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] T \delta_{ij}, \quad (6)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{q,q} \delta_{ij} + \beta \phi_{i,j} + \gamma \phi_{j,i}, \quad (7)$$

其中, λ, μ 为 Lam 常数, K, α, β, γ 为微极常数, T 为温度的变化, T_0 为恒定温度, K^* 为导热系数, c^* 为常温下的比热容, $\nu = (3\lambda + 2\mu) \alpha_1$, α_1 为线性热膨胀系数, τ_0 和 τ_1 为热松弛时间, ρ 为密度, J 为微惯性, ϕ 为微转动矢量, $\nabla \cdot$ 为梯度算子, σ_{ij} 为应力张量分量, m_{ij} 为耦合应力张量分量, ε_{ijk} 为交替张量, \mathbf{F} 为 Lorentz 力给出如下:

$$F_i = \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H}_0)_i. \quad (8)$$

对于 L-S 理论, $\tau_1 = 0, n_0 = 1$; 对于 G-L 理论, $\tau_1 > 0, n_0 = 0$. 热松弛时间 τ_0 和 τ_1 仅对 G-L 理论满足不等式 $\tau_1 \geq \tau_0 > 0$.

在微极弹性半空间相关的真空中, 电动力学方程组为

$$\operatorname{curl} \mathbf{h}^0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}^0, \operatorname{curl} \mathbf{E}^0 = -\mu_0 \dot{\mathbf{h}}^0, \operatorname{div} \mathbf{h}^0 = 0, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{h}^0, \mathbf{E}^0$ 分别为真空中的感应磁场矢量和感应电场矢量, 上述方程组归纳为

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}^0 = 0, \quad (10)$$

其中, c 为光速如下给出:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

∇^2 为 Laplace 算子.

这种情况下, Maxwell 应力变为

$$T_{ij}^0 = \mu_0 (H_j h_i^0 + H_i h_j^0 - H_k h_k^0 \delta_{ij}), \tag{11}$$

T_{ij}^0 是真空中 Maxwell 应力张量分量.

2 问题的表述及其求解

考虑一个在轴向磁场作用下, 接近真空条件下的均匀、各向同性、导电性能良好的微极广
义热弹性介质. 柱坐标系 (r, θ, z) 原点在自由表面平面 $z = 0$ 上, z 轴垂直指向介质, 如图 1 所示.

考虑到问题是平面轴对称的, 也就是说, 场分量 u_θ 为 0, 而其他分量 u_r 和 u_z 和 θ 无关.

因为问题是平面轴对称的, 假设位移矢量 \mathbf{u} 和微转动矢量 ϕ 为

$$\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z), \quad \phi = (0, \phi_\theta, 0). \tag{12}$$

如果假设磁场形式为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0), \tag{13}$$

其中, \mathbf{h} 为初始磁场 \mathbf{H}_0 的摄动部分. 结合方程

(1) 和方程 (13), Lorentz 力 (见方程 (8)) 变为

$$\mathbf{F} = \mu_0 H_0^2 \left[\left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right\}, 0, 0 \right]. \tag{14}$$

定义无量纲量

$$\begin{cases} r' = \frac{\omega}{c_1} r, & z' = \frac{\omega}{c_1} z, & u' = \frac{\rho c_1 \omega}{\mathcal{M}_0} u, & v' = \frac{\rho c_1 \omega}{\mathcal{M}_0} v, \\ a' = \frac{\omega}{c_1} a, & t' = \omega t, & \tau'_1 = \omega \tau_1, & \tau'_0 = \omega \tau_0, & T' = \frac{T}{T_0}, \\ \phi'_j = \frac{\sigma_j}{\mathcal{M}_0}, & \phi'_3 = \frac{\rho c_1^2}{\mathcal{M}_0} \phi_3, & m'_{j\bar{j}} = \frac{\omega}{c_1 \mathcal{M}_0} m_{j\bar{j}}, \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\omega = \frac{\rho c^* c_1^2}{K^*}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu + K}{\rho}.$$

应用 Laplace 变换

$$f(r, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(r, z, t) dt,$$

及 Hankel 变换

$$f(\xi, z, s) = \int_0^\infty f(r, z, s) r J_n(r\xi) dr. \tag{16}$$

方程 (3) ~ (7) 和 (14) 结合方程 (1)、(12) 和 (15), 可以得到

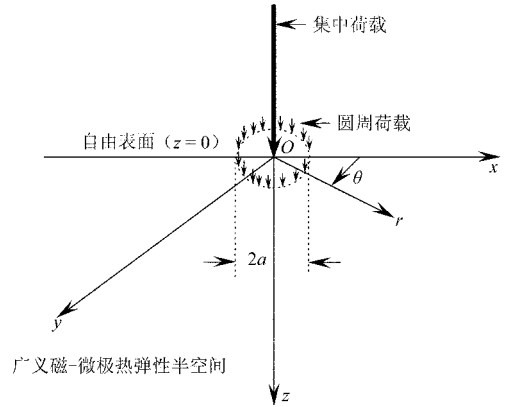


图 1 问题的几何图形

$$\left[\frac{d^8}{dz^8} + A \frac{d^6}{dz^6} + B \frac{d^4}{dz^4} + C \frac{d^2}{dz^2} + D \right] (u_r, u_z, \phi_0, T) = 0. \quad (17)$$

方程(17)的解要满足发散条件,即当 $z \rightarrow \infty$ 时, u_r, u_z, ϕ_0 和 T 趋于 0, 可以记为

$$\{u_r, u_z, \phi_0, T\} = \sum_{i=1}^4 \{1, n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}\} A_i e^{-\lambda_i z}, \quad (18)$$

其中, $\lambda_i^2 (i = 1, \dots, 4)$ 分别为方程组(13)的根, 且

$$\begin{aligned} A &= -s_1 [a_1^* (r_3 + r_2 r_5) + (1 + a_1) (s_2 + a_1^* r_6) - \xi^2], \\ B &= s_1 [r_1 r_3 + s_3 - s_4 + r_6 \{a_1^* r_3 + (1 + a_1) s_2 - \xi^2\} - \\ &\quad r_2 r_5 \{a_2 a_4 + (1 - a_1) \xi^2 - r_1 - a_1^* r_4\}], \\ C &= s_1 [r_1 s_5 - r_6 (r_1 r_3 + s_3 - s_4) - \\ &\quad r_2 r_5 \{r_3 \xi^2 - r_4 ((1 - a_1) \xi^2 - r_1) - 2a_2 a_4 \xi^2\}], \\ D &= -s_1 s_5 (r_1 r_6 + r_2 r_5 \xi^2), \quad s_1 = 1/(1 + a_1) a_1^*, \quad s_2 = a_2 a_4 + r_1 + a_1^* r_4 \\ s_3 &= r_4 (a_1^* r_3 + r_1 (1 + a_1) - \xi^2), \quad s_4 = a_2 a_4 (r_3 + (2 + a_1^*) \xi^2), \\ s_5 &= a_2 a_4 \xi^2 - r_3 r_4, \\ r_1 &= (1 + a_1^*) \xi^2 + a_3^* s^2, \quad r_2 = a_3 (1 + \tau_1 s), \quad r_3 = a_1 \xi^2 + a_3 s^2, \\ r_4 &= \xi^2 + 2a_4 + a_5 s^2, \quad r_5 = \varepsilon (s + \tau_0 n_0 s^2), \quad r_6 = \xi^2 + (s + \tau_0 s^2), \\ a_1 &= \frac{\mu + K}{\lambda + \mu}, \quad a_1^* = a_1 + \varepsilon_1, \quad a_2 = \frac{K}{\lambda + \mu}, \quad a_3 = \frac{\rho_1^2}{\lambda + \mu}, \quad a_3^* = a_3 (1 + \varepsilon_2), \\ a_4 &= \frac{K c_1^2}{\gamma \omega^2}, \quad a_5 = \frac{\rho_j c_1^2}{\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{\nu T_0}{K^* \rho \omega}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\mu_0 H_0^2}{\lambda + \mu}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 H_0^2}{\rho}. \end{aligned}$$

3 边界条件

在 $z = 0$ 上的边界条件为

$$(i) \quad \alpha_{zz}(r, z, t) + T_{zz}(r, z, t) - T_{zz}^0(r, z, t) = -P f_1(r, t); \quad (19)$$

$$(ii) \quad \alpha_{zr}(r, z, t) = 0; \quad (20)$$

$$(iii) \quad m_{z\theta} = 0; \quad (21)$$

(iv) 电场的切向分量在越过边界曲面仍是连续的, 有

$$E_\theta = E_\theta^0; \quad (22)$$

$$(v) \quad \frac{\partial T}{\partial z} + pT = P_2 f_2(r, t); \quad (23)$$

其中, p 是热传递系数, 对于绝热边界 $p \rightarrow 0$, 而对于等温边界 $p \rightarrow \infty$; P_1 是力的大小, P_2 是每单位长度作用在边界上的常温值; 且 $f_1(r, t), f_2(r, t)$ 为已知函数, 将在下节给出. 在边界条件(19)~(23)上, 利用式(16)定义的 Laplace 和 Hankel 变换, 并结合方程(6)、(7)、(12)和(15), 同时 $P_1 = P_1/(\mathcal{M}_0)$, $P_2 = P_2 c_1/(\mathcal{M}_0)$ (对于绝热边界), $P_2 = P_2/T_0$ (对于等温边界), 可以得到应力分量、切向耦合应力分量、温度分布、感应电场分量和感应磁场分量为

$$\{\sigma_{rr}, \alpha_{zr}\} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \{(a_6 \xi - n_{1i} \lambda - \tau_{n_{3i}}), (a_7 \lambda + a_8 \xi n_{1i} + a_9 n_{2i})\} \Delta e^{-\lambda_i z}, \quad (24)$$

$$\{m_{z\theta}, T, E_\theta, h_r, h_z\} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \{-a_{10} n_{2i} \lambda, n_{3i}, a_{11}(s, -\lambda, \xi)\} \Delta e^{-\lambda_i z}, \quad (25)$$

其中

$$\tau = 1 + \tau_1 s, \quad a_6 = \frac{\lambda}{\rho c_1^2}, \quad a_7 = \frac{\mu + K}{\rho c_1^2}, \quad a_8 = \frac{\mu}{\rho c_1^2}$$

$$a_9 = \frac{K}{\rho c_1^2}, \quad a_{10} = \frac{\gamma \omega^2}{\rho c_1^4}, \quad a_{11} = \frac{\mathcal{M}_0}{\rho c_1^2},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -P_{1f_1}(\xi s) & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ P_{2f_2}(\xi s) & b_{52} & b_{53} & b_{54} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & -P_{1f_1}(\xi s) & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{41} & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & P_{2f_2}(\xi s) & b_{53} & b_{54} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & -P_{1f_1}(\xi s) & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & P_{2f_2}(\xi s) & b_{54} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -P_{1f_1}(\xi s) & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & P_{2f_2}(\xi s) & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & -P_{1f_1}(\xi s) \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & P_{2f_2}(\xi s) \end{vmatrix},$$

且

$$b_{1i} = a_6^* \xi - n_{1i} \lambda - (1 + \tau_1 s) n_{3i}, \quad b_{15} = \mathcal{E} \frac{\xi}{s}, \quad b_{2i} = a_7 \lambda + a_8 \xi n_{1i} + a_9 n_{2i},$$

$$b_{3i} = n_{2i} \lambda, \quad b_{4i} = a_{11} s, \quad b_{45} = -1, \quad b_{5i} = -n_{3i} + p n_{3i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$a_6^* = \frac{\lambda - \mu_0 H_0^2}{\rho c_1^2}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\mathcal{M}_0},$$

$$n_{1i} = - (d_{21} \lambda_i^5 + d_{22} \lambda_i^3 + d_{23} \lambda_i) / \Delta^{(i)}, \quad n_{2i} = (d_{31} \lambda_i^5 + d_{32} \lambda_i^3 + d_{33} \lambda_i) / \Delta^{(i)},$$

$$n_{3i} = - (d_{41} \lambda_i^4 + d_{42} \lambda_i^2 + d_{43}) / \Delta^{(i)}, \quad \Delta^{(i)} = d_{11} \lambda_i^6 + d_{12} \lambda_i^4 + d_{13} \lambda_i^2 + d_{14},$$

$$i = 1, \dots, 4,$$

$$d_{11} = - (1 + a_1), \quad d_{12} = - \left\{ r_3 + (1 + a_1)(r_4 + r_6) - r_2 r_5 \right\},$$

$$d_{13} = - [r_3 r_4 - a_2 a_4 \xi^2 + r_6 \{ r_3 + (1 + a_1) r_4 \} + r_2 r_4 r_5], \quad d_{14} = r_6 (r_3 r_4 - a_2 a_4 \xi^2),$$

$$d_{21} = - \xi, \quad d_{22} = \xi (r_4 + r_6 + a_2 a_4 + r_2 r_5), \quad d_{23} = - \xi \left\{ r_6 (r_4 + a_2 a_4) + r_2 r_4 r_5 \right\},$$

$$d_{31} = a_4 (1 + a_1), \quad d_{32} = - a_4 \left\{ r_3 + \xi^2 + (1 + a_1) r_6 + r_2 r_5 \right\},$$

$$d_{33} = a_4 \left\{ r_6 (r_3 + \xi^2) + r_2 r_5 \xi^2 \right\}, \quad d_{41} = r_5 (1 + a_1) (\xi + a_4),$$

$$d_{42} = - r_5 \left[\xi \left\{ r_3 + (1 + a_1) r_4 \right\} + a_4 (r_3 + \xi^2) \right], \quad d_{43} = r_5 \xi (r_3 r_4 - a_2 a_4 \xi^2).$$

当 $P_1 = 1$ 和 $P_2 = 0$ 时, 可以得到机械力作用时的解; 当 $P_1 = 0$ 和 $P_2 = 1$ 时, 可以得到相应于热源时的解.

4 应 用

本节中, 考虑机械力和热源作用.

在集中力/点热源作用下:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(r, t) \\ f_2(r, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(t), \quad (26)$$

其中, $\delta(\cdot)$ 是 Dirac δ 函数, 对式(26)应用式(16)定义的 Laplace 和 Hankel 变换, 可以得到

$$\left. \begin{array}{l} f_1(\xi, s) \\ f_2(\xi, s) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi}. \quad (27)$$

当沿圆周垂直分布作用力/沿圆周分布热源作用下:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(r, t) \\ f_2(r, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi a^2} H(a - r) \delta(t), \quad (28)$$

其中, $H(\cdot)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数, a 是圆形区域的半径. 结合方程(16), 方程(28)变为

$$\left. \begin{array}{l} f_1(\xi, s) \\ f_2(\xi, s) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi a \xi} J_1(a \xi). \quad (29)$$

将方程(27)和(29)所得到的值 $f_1(\xi, s)$ 及 $f_2(\xi, s)$, 代入方程(24)和(25), 便得到相应于集中源或圆周源(机械源或者热源)时的解.

5 特 例

(i) 如果 $H_0 \rightarrow 0$, 得到微极热弹性介质的应力分量和温度分布, 其中 a_1^* , a_3^* , a_6^* 和 ϵ_3 变成如下各值:

$$a_1^* = a_1, \quad a_3^* = a_3, \quad a_6^* = a_6, \quad \epsilon_3 = 0.$$

(ii) 当 $\tau_1 = 0$, $n_0 = 1$ 时, 得到带一个松弛时间(L-S 理论)的微极热弹性介质的应力分量和温度分布.

(iii) 当 $\tau_1 > 0$, $n_0 = 0$ 和 $\tau_1 \geq \tau_0 > 0$ 时, 得到带两个松弛时间(G-L 理论)的微极广义热弹性介质的应力分量和温度分布.

6 逆 变 换

对于 L-S 理论和 G-L 理论, 为了得到该物理问题的解, 必须对方程(24) ~ (25) 进行逆变

换. 因此可以写出形式 $f(\xi, z, s)$ 的表达式. 为得到 $f(r, z, t)$, 先对 Hankel 变换进行逆变换

$$f(r, z, s) = \int_0^{\infty} \xi(\xi, z, s) J_n(r\xi) d\xi \quad (30)$$

则对于固定的 ξ, r 和 z 值, 上式中的 $f(r, z, s)$ 可以被看作 $g(t)$ 的 Laplace 变换 $g(s)$. 参照文献[13], 求 Laplace 变换函数 $g(s)$ 的逆变换.

最后一步是计算方程(30)中的积分. 评价该积分的方法在文献[14]中可以找到, 文献中还涉及到带自适应积分步长的 Romberg 积分的使用. 它常用于扩展梯形法则连续精细化结果, 当步长趋于 0 时, 结果被外推到极限.

7 数值结果及讨论

以镁晶体类材料为对象进行分析. 参照文献[15], 物理常数值为

$$\begin{aligned} \lambda &= 9.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \mu = 4.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad K = 1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ \rho &= 1.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \gamma = 0.779 \times 10^{-9} \text{ N}, \quad J = 0.2 \times 10^{-19} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

热参数给出如下:

$$c^* = 1.04 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}, \quad K^* = 1.7 \times 10^2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \quad T = 298 \text{ K}.$$

数值计算中, 假设

$$\tau_0 = 0.20, \quad \tau_1 = 0.50, \quad \varepsilon_1 = 0.25, \quad \varepsilon_2 = 0.35, \quad \varepsilon_3 = 0.45.$$

在 $0 \leq r \leq 10$ 范围内, 对无量纲时间 $t = 0.1$ 时进行计算. 图 2~6 的横坐标为无量纲距离 r , 纵坐标分别为无量纲的正应力 σ_z 、切向耦合应力 $m_{z\theta}$ 、温度分布 T 、无量纲的感应电场 E_θ 和感应磁场 h_z . 图 2~4 中, 实线和虚线分别表示磁-微极热弹性介质的 L-S 理论(MMT1)和 G-L 理论(MMT2); 带小圆圈的实线和带小三角形的虚线分别表示微极热弹性介质的 L-S 理论(MT1)和 G-L 理论(MT2). 图 5~6 中, 密集网格表示 L-S 理论, 而稀疏网格表示 G-L 理论.

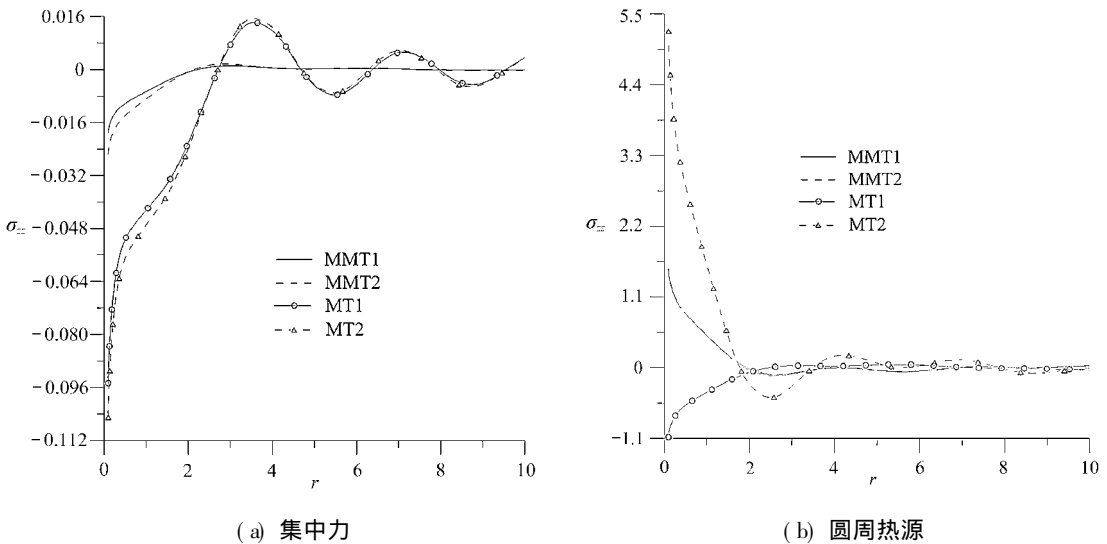


图 2 正应力 σ_z 随距离 r 的变化

图 2、3、4 分别表示正应力 σ_z 、切向耦合应力 $m_{z\theta}$ 和温度分布 T 的变化, 其中图 (a) 为集中力作用情况, 图 (b) 为圆周热源作用情况. 图 2 所示 MT1 和 MT2 的正应力 σ_z 在其原值上已乘了 10^{-1} .

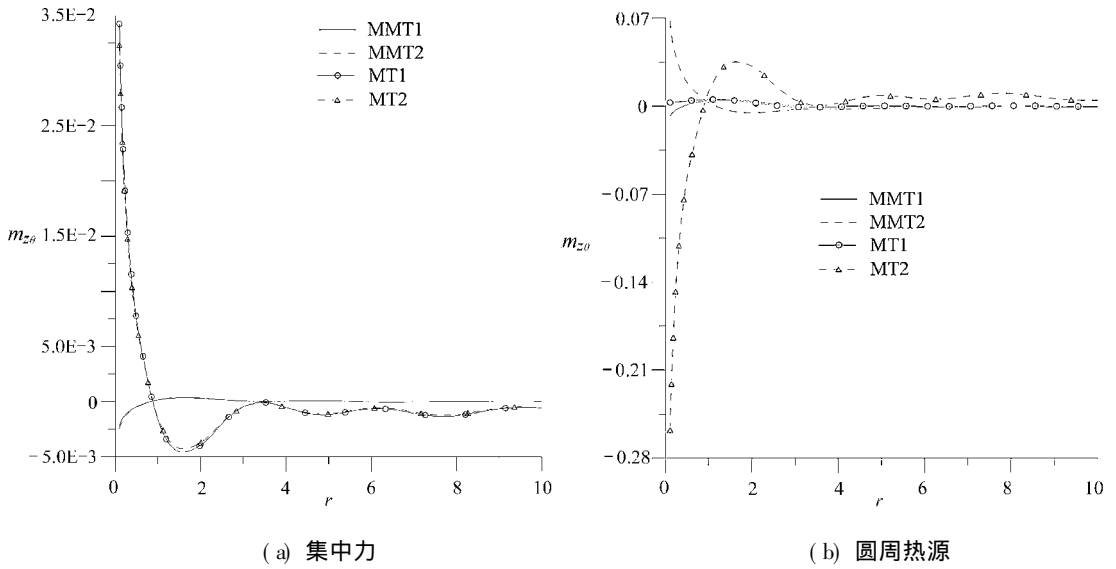
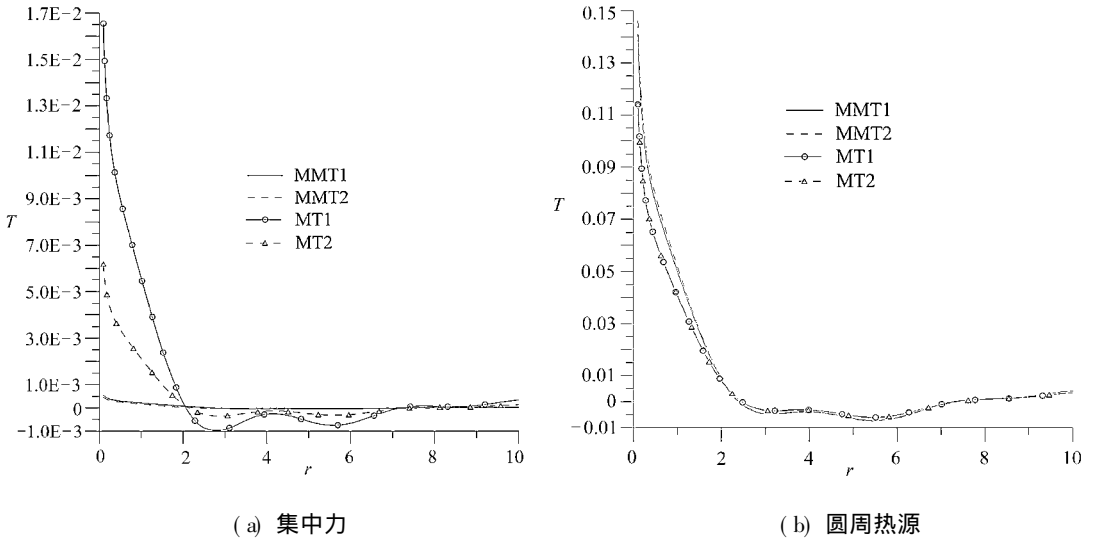
图3 切向耦合应力 $m_{z\theta}$ 随距离 r 的变化图4 温度分布 T 随距离 r 的变化

图2(a)显示,在集中力作用时,在初始阶段 $0 \leq r \leq 2$,正应力 σ_z 随着 r 的增大而增大;随着 r 的进一步增大,MT1和MT2的正应力值出现振荡,而MMT1和MMT2的正应力几乎变成水平直线.在热源作用时(图2(b)),在初始阶段 $0 \leq r < 2$,MT1的正应力 σ_z 随 r 的增大而增大,而MT2、MMT1、MMT2的正应力 σ_z 减小;随着 r 的进一步增大,MT1和MT2的正应力出现减幅振荡,而MMT1和MMT2的正应力几乎变成水平直线.

图3(a)显示,在集中力作用时,在 r 的初始阶段,MT1和MT2的切向耦合应力 $m_{z\theta}$ 值迅速减小,而MMT1和MMT2的切向耦合应力有小幅增大,随着 r 的进一步增大,MT1和MT2情况发生振荡,而MMT1和MMT2情况几乎变成水平直线.在热源作用时(图3(b)),在整个区域上,MMT2的 $m_{z\theta}$ 与MT2的 $m_{z\theta}$ 性质相反,而MMT1和MT1的 $m_{z\theta}$ 性质内似,几乎成一直线.由图3(a)还可看出,在集中力作用时,在 r 的初始阶段,MT1和MT2情况的 $m_{z\theta}$ 值都大于MMT1和

MMT2 情况; 而随 r 的进一步增大 MT1 和 MT2 情况的 m_{z0} 值又变为小于 MMT1 和 MMT2 情况.

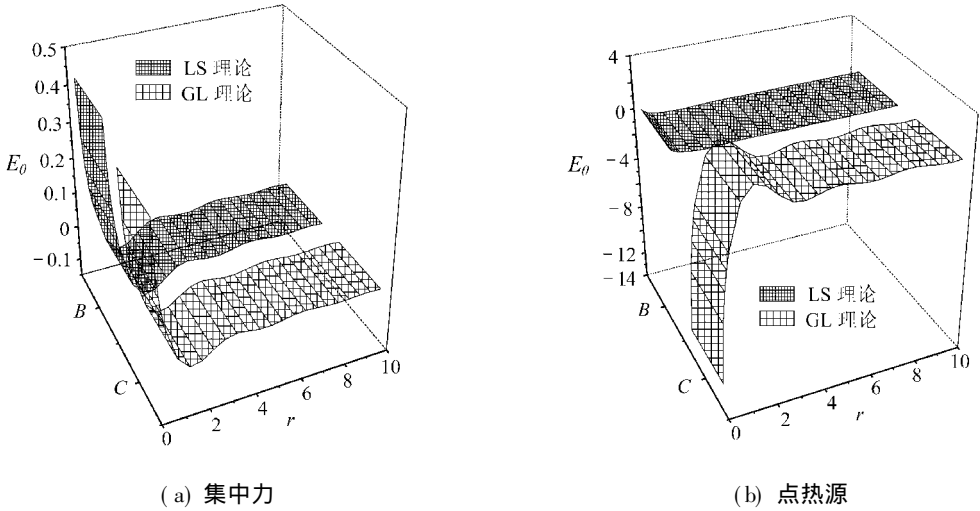


图 5 感应电场 E_0 随距离 r 的变化

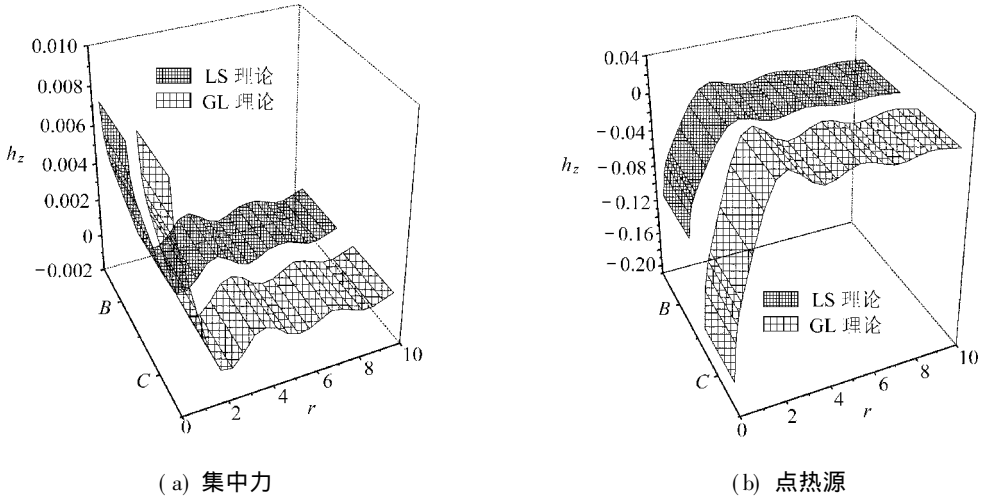


图 6 感应磁场 h_z 随距离 r 的变化

图 4(a) 显示, 在集中力作用时, 在初始阶段 $0 \leq r < 2$, MT1 和 MT2 的温度 T 值随 r 增大而迅速减小, 而 MMT1 和 MMT2 的温度 T 值缓慢减少; 随着 r 的进一步增大, MT1 和 MT2 的 T 值出现振荡, 而 MMT1 和 MMT2 的温度曲线非常平直; 当 r 达到 7.15 时, MT1, MT2, MMT1, MMT2 的温度曲线非常类似. 在热源作用(图 4(b)) 时, 在初始阶段 $0 \leq r < 2$, MT1, MT2, MMT1 和 MMT2 都是减小的, 随着 r 的进一步增大, 它们同时发生振荡. 由图 4(a) 还可以看出, 在集中力作用时, 在区域 $0 \leq r < 2$ 中, MT1 对应的 T 值大于 MT2 情况.

图 5 和图 6 分别示出感应电场 E_0 和感应磁场 h_z , 其中图(a) 为集中力作用, 图(b) 为圆周热源作用.

图 5 给出 G-L 理论和 L-S 理论的感应电场. 集中力作用时, 开始时 E_0 减小, 然后随着 r 的增大发生小的振荡. 在热源作用时, G-L 理论的 E_0 值初始阶段是增大的, 然后随着 r 的增大发生微小振荡; 而对 L-S 理论, 在整个区域内几乎呈直线变化.

图 6 表明, 在集中力作用时, 开始时感应磁场 h_z 值是减小的, 然后随着 r 的进一步增大而

发生振荡. 在热源作用时, 两种广义热弹性理论的磁感应 h_z 值, 初始阶段都是增大的, 然后随着 r 的进一步增大而发生振荡.

8 结 论

在机械的或热源作用下, 评估了磁场对正应力 σ_{zz} 、切向耦合应力 $m_{z\theta}$ 和温度 T 分布的影响. 对于集中源和沿圆周分布作用源来说, 相应的所有各个量有着相似的变化趋势, 但数量级不同.

致谢 作者 Mr. Rupender 衷心感谢大学拨款委员会的财政资助.

[参 考 文 献]

- [1] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. J Math Mech, 1966, **15**(6): 909-923.
- [2] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. J Math Mech, 1966, **15**(1): 1-18.
- [3] Eringen A C. Nonlocal polar field theories[A]. In: Eringen A C, Ed. Continuum Physics [C]. Vol 4. New York: Academic Press, 1976, 205-267.
- [4] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. J Mech Phys Solid, 1967, **15**(5): 299-309.
- [5] Muller I M. The coldness, a universal function in thermoelastic bodies[J]. Arch Ration Mech Anal, 1971, **41**(5): 319-332.
- [6] Green A E, Laws N. On the entropy production inequality[J]. Arch Ration Mech Anal, 1972, **45**(1): 47-53.
- [7] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. Elasticity, 1972, **2**(1): 1-7.
- [8] Suhubi E S. Thermoelastic solids[A]. Part 2, Chapter 2. In: Eringen A C Ed. Continuum Physics [C]. Vol 2. New York: Academic Press, 1975.
- [9] Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity[J]. Bull Acad Polon Sci Sr Sci Tech, 1968, **16**(1): 7-12.
- [10] Nowacki W. Some problems of micropolar magneto-elasticity[J]. Proc Vibri Probl, 1971, **12**: 105-203.
- [11] Kumar R, Choudhary S. Axi-symmetric problem in time harmonic sources in micropolar elastic medium[J]. Ind J Pure and Appl Math, 2002, **33**: 1169-1182.
- [12] Kumar R, Deswal S. Axi-symmetric problem in a generalized micropolar thermoelastic half-space [J]. Internat J Appl Mech and Eng, 2007, **12**(2): 413-429.
- [13] Honig G, Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transform[J]. Comput and Appl Math, 1984, **10**(1): 113-132.
- [14] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes in FORTRAN [M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [15] Eringen A C. Plane wave in nonlocal micropolar elasticity[J]. Internat J Eng Sci, 1984, **22**(8/10): 1113-1121.

Elastodynamics of Axi-Symmetric Deformation in Magneto-Micropolar Generalized Thermoelastic Medium

Rajneesh Kumar, Rupender

(Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136 119, India)

Abstract: An axi-symmetric problem in the electromagnetic micropolar thermoelastic half-space whose surface is subjected to mechanical or thermal source in a transverse magnetic field is concerned with. Laplace and Hankel transform techniques were used to solve the problem. To illustrate the application of approach, two different type of sources i. e., concentrated force and thermal source over the circular region were considered. The integral transforms were inverted by using a numerical technique to obtain the components of stresses, temperature distribution and induced electric and magnetic fields. The expressions of these quantities were illustrated graphically to depict the magnetic effect for two different generalized thermoelasticity theories, i. e., Lord and Shulman (L-S theory) and Green and Lindsay (G-L theory). A particular interesting case was also deduced.

Key words: generalized magneto-micropolar thermoelasticity; axi-symmetric problem; mechanical and thermal sources; Laplace transforms; Hankel transforms