应用数学和力学,第 30 卷 第 1 期
2009 年 1 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 1, Jan. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 01-0075-08



# FG-空间中的参数型 KKM 定理及其应用*

邓 磊, 臧小燕

(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

(张石生推荐)

摘要: 首先在 FG-空间中证明了一个特征性质, 然后通过引进线性序空间, 利用集合的连通性, 在非紧的FG-空间中证明了一个参数型 KKM 定理. 应用参数型 KKM 定理得到非紧的极大极小不等式、鞍点定理和截口定理. 这些结果改进和推广了这个领域中的一些相关结果.

关 键 词: FG-子空间; FG-参数-拟凸映射; 极大极小不等式

中图分类号: O177.92 文献标识码: A

## 1 引言和预备知识

1929 年, Knaster, Kurnatoaski 和 Mazurkiewicz[1] 在 $n$ 维单形上证明了著名的 KKM 定理. 1961 年, Fan[2] 将KKM 定理推广到无限维拓扑向量空间. 之后, KKM 定理以及相关的内容, 如: 匹配定理、不动点定理、叠合定理、变分不等式、极大极小不等式等在许多重要领域得到广泛应用.

张石生等[3] 在广义区间空间中得到了参数型 KKM 定理. 2005 年, 丁协平[4] 引进了没有任何凸性结构的有限连续拓扑空间(简称FG-空间) 的概念, 它包含了G-空间(或H-空间)、G-凸空间、L-凸空间等许多具有抽象凸性结构的拓扑空间. 此后, 许多作者在 FG-空间中研究了KKM 定理及其应用, 如文献[5-7].

本文将广义区间空间中的参数型KKM 定理拓展到FG-空间, 在FG-空间中证明了一个参数型 KKM 定理, 并得到了非紧的极大极小不等式、鞍点定理和截口定理. 这些结论改进和推广了参考文献[3, 8-10] 中的一些相关结果.

**定义 1.1**[4] 称 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是有限连续空间(简称FG-空间), 如果 $Y$ 是拓扑空间, 对任意 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$, 这里元素可以相同, 存在连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to Y$. $Y$ 的子集 $B$ 称为FG-子空间, 如果对任意 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$ 和任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset B \cap N$, 有 $\varphi_N(\Delta_k) \subset B$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\})$.

**定义 1.2**[10] 称线性序空间 $Z$ 是序完备的, 如果 $Z$ 的任何子集 $C$ 都存在一个最小上界.

* 收稿日期: 2007-12-18; 修订日期: 2008-11-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771173); 重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC, 2005BB2097)

作者简介: 邓磊(1957—), 男, 重庆人, 教授(联系人. Tel: + 86-23-68388606; E-mail: denglei@swu.edu.cn).

称线性序空间 $Z$ 是序稠密的, 若对任意 $z_1, z_2 \in Z$, 如果 $z_1 \prec z_2$, 则存在 $z_3 \in Z$ 使得

$$z_1 \prec z_3 \prec z_2.$$

定义 1.3 设 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $Z$ 是线性序空间. 映射 $f: Y \to Z$ 是 FG-参数-拟凸 (FG-参数-拟凹) 的, 若对任意的 $z \in Z$, 集 $\{y \in Y: f(y) \preceq z\}$ ($\{y \in Y: f(y) \succeq z\}$) 是 $Y$ 的 FG-子空间.

注 1.1 定义 1.3 将文献[5]中定义 4.3 从实空间推广到线性序空间.

定义 1.4[11] 设 $Y$ 是拓扑空间, $Z$ 是线性序空间. 映射 $f: Y \to Z$ 是上半连续(下半连续)的, 若对任意的 $z \in Z$, 集 $\{y \in Y: f(y) \succeq z\}$ ($\{y \in Y: f(y) \preceq z\}$) 在 $Y$ 中是闭集.

定义 1.5[12] 设 $X$ 和 $Y$ 是两个拓扑空间. 集值映射 $G: Y \to 2^X$ 是转移闭值, 若对任意 $y \in Y$, $x \notin G(y)$, 则存在 $y' \in Y$ 使得 $x \notin \overline{G(y')}$.

注 1.2 显然, 如果 $G$ 是闭值映射, 则一定是转移闭值的.

引理 1.1[12] 设 $X$ 和 $Y$ 是两个拓扑空间, $G: Y \to 2^X$ 是集值映射. 则 $G$ 在 $Y$ 上是转移闭值的当且仅当 $\bigcap_{y\in Y} \overline{G(y)} = \bigcap_{y\in Y} G(y)$.

引理 1.2 设 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $L: Y \to 2^X$. 对任意 $x \in X$, $Y \setminus L^{-1}(x)$ 是 FG-子空间当且仅当对任意 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$, 都有

$$L(y) \subset \bigcup_{m=0}^{k} L(y_{i_m}), \qquad \forall y \in \varphi_N(\Delta_k).$$

证明 必要性. 假设结论不成立, 则存在 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 和 $\{y_{i_0}, y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$, $y' \in \varphi_N(\Delta_k)$ 使得 $L(y') \not\subset \bigcup_{m=0}^{k} L(y_{i_m})$. 故存在 $x' \in L(y')$, 但 $x' \notin L(y_{i_m})$, $m = 0, 1, \cdots, k$, 即 $\{y_{i_0}, y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\} \subset Y \setminus L^{-1}(x')$. 于是 $\varphi_N(\Delta_k) \subset Y \setminus L^{-1}(x')$. 因为 $y' \in \varphi_N(\Delta_k)$, 从而 $y' \in Y \setminus L^{-1}(x')$, 即 $x' \notin L(y')$. 这与 $x'$ 的选取矛盾. 故对任意 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 和任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$, 都有

$$L(y) \subset \bigcup_{m=0}^{k} L(y_{i_m}), \qquad \forall y \in \varphi_N(\Delta_k).$$

充分性. 对任意 $x \in X$ 和 $N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset (Y \setminus L^{-1}(x)) \cap N$ 和 $y \in \varphi_N(\Delta_k)$, 有 $L(y) \subset \bigcup_{m=0}^{k} L(y_{i_m})$. 由于 $y_{i_0}, \cdots, y_{i_k} \notin L^{-1}(x)$, 即 $x \notin \bigcup_{m=0}^{k} L(y_{i_m})$, 从而对所有 $y \in \varphi_N(\Delta_k)$, 有 $x \notin L(y)$, 即 $y \in Y \setminus L^{-1}(x)$. 则 $\varphi_N(\Delta_k) \subset Y \setminus L^{-1}(x)$. 这表明对任意 $x \in X$, $Y \setminus L^{-1}(x)$ 是 FG-子空间. 证毕.

注 1.3 引理 1.2 将文献[3]中引理 2.2 从广义区间空间拓展到 FG-空间.

## 2 FG-空间中参数型 KKM 定理

下面是 FG-空间中的参数型 KKM 定理.

定理 2.1 设 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $Z$ 是线性序空间, $F, G: Y \times Z \to 2^X$ 是两个集值映射, 且 $F$ 具有非空值. 若满足下列条件:

(i) 对任意 $N \in \langle Y \rangle$ 和 $z \in Z$, $\bigcap_{y\in N} F(y, z)$ 是连通集或空集, 且对任意 $y_0, y_1 \in N$, 存

在 $y_0', y_1' \in \varphi_N(\Delta_1)$ 使得 $F(y_0', z) \subset F(y_0, z)$, $F(y_1', z) \subset F(y_1, z)$;

(ii) 对任意 $x \in X$ 和 $z \in Z$, $\{y \in Y: x \notin F(y, z)\}$ 是闭的 FG-子空间;

(iii) 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, $F(y, z) \subset \overline{G(y, z)}$; 如果 $z_1 \preceq z_2$, 则对任意 $y \in Y$ 有 $F(y, z_2) \subset F(y, z_1)$;

(iv) 对任意 $z \in Z$, 存在 $\hat{z} \in Z$, 使得对任意 $y \in Y$, 都有 $\overline{G(y, \hat{z})} \subset F(y, z)$.

则

1) $\{\overline{G(y, z)}: y \in Y, z \in Z\}$ 具有有限交性质;

2) 如果 $G$ 是转移闭值的且存在 $(u, v) \in Y \times Z$ 使得 $\overline{G(u, v)}$ 是紧的, 则 $\bigcap_{y \in Y, z \in Z} G(y, z) \neq \varnothing$.

证明 因为 $F$ 具有非空值, 由条件(iii), 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, $\overline{G(y, z)} \neq \varnothing$. 设 $\{\overline{G(y, z)}: y \in Y, z \in Z\}$ 中任意 $n$ 个元素交集非空, 下证 $\{\overline{G(y, z)}: y \in Y, z \in Z\}$ 中任意 $n+1$ 个元素交集也非空, 其中 $n \geqslant 2$.

如果存在 $(y_i, z_i) \in Y \times Z$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, 使得 $\bigcap_{i=0}^{n} \overline{G(y_i, z_i)} = \varnothing$. 不妨设 $z_0 \succeq z_1 \succeq \cdots \succeq z_n$, 令 $H = \bigcap_{i=2}^{n} F(y_i, z_0)$, 则

$$\overline{H \cap F(y_0, z_0)} \cap \overline{H \cap F(y_1, z_0)} \subset \bigcap_{i=2}^{n} \overline{F(y_i, z_i)} \cap \overline{F(y_0, z_0)} \cap \overline{F(y_1, z_1)} \subset \bigcap_{i=0}^{n} \overline{G(y_i, z_i)} = \varnothing.$$

如果 $y_0$ 和 $y_1$ 相同, 则 $H \cap F(y_0, z_0) \subset \overline{H \cap F(y_0, z_0)} = \varnothing$. 由条件(iv)知, 存在 $\hat{z} \in Z$, 使得对任意 $y \in Y$, 都有

$$H \cap F(y, z_0) = \bigcap_{i=2}^{n} F(y_i, z_0) \cap F(y, z_0) \supset \bigcap_{i=2}^{n} \overline{G(y_i, \hat{z})} \cap \overline{G(y, \hat{z})} \neq \varnothing.$$

两者矛盾. 故 $\{\overline{G(y, z)}: y \in Y, z \in Z\}$ 具有有限交性质.

如果 $y_0$ 和 $y_1$ 不相同, 则 $H \cap F(y_0, z_0)$ 和 $H \cap F(y_1, z_0)$ 分离. 定义映射 $L: Y \to 2^X$, 其中 $L(y) := F(y, z_0)$, 则由条件(ii)知, 对任意 $x \in X$, $Y \setminus L^{-1}(x) = \{y \in Y: x \notin F(y, z_0)\}$ 是闭的 FG-子空间. 令 $N = \{y_0, \cdots, y_n\}$, 取定 $\{y_0, y_1\} \subset N$, 由引理 1.2 知, 对任意 $y \in \varphi_N(\Delta_1)$, 有 $L(y) \subset L(y_0) \cup L(y_1)$, 即对任意 $y \in \varphi_N(\Delta_1)$, 有 $F(y, z_0) \subset F(y_0, z_0) \cup F(y_1, z_0)$. 于是

$$H \cap F(y, z_0) \subset (H \cap F(y_0, z_0)) \cup (H \cap F(y_1, z_0)), \qquad \forall y \in \varphi_N(\Delta_1).$$

由 $H \cap F(y, z_0)$ 连通知, 对任意 $y \in \varphi_N(\Delta_1)$, $H \cap F(y, z_0) \subset H \cap F(y_0, z_0)$ 或者 $H \cap F(y, z_0) \subset H \cap F(y_1, z_0)$.

令 $E_i = \{y \in \varphi_N(\Delta_1): H \cap F(y, z_0) \subset H \cap F(y_i, z_0)\}$, $i = 0, 1$. 由条件(i)知, $E_i \neq \varnothing$, $i = 0, 1$ 且 $E_0 \cup E_1 = \varphi_N(\Delta_1)$. 又因为 $\varphi_N(\Delta_1)$ 为连通集, 则 $E_0 \cap \overline{E_1}$ 与 $\overline{E_0} \cap E_1$ 至少有一个是非空集. 不妨假设 $E_0 \cap \overline{E_1} \neq \varnothing$, 从而存在 $\hat{y} \in E_0 \cap \overline{E_1}$, 则 $H \cap F(\hat{y}, z_0) \subset H \cap F(y_0, z_0)$, 且存在网 $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset E_1$ 使得 $y_\alpha \to \hat{y}$. 故

$$H \cap F(y_\alpha, z_0) \subset H \cap F(y_1, z_0), \qquad \forall \alpha \in I.$$

取 $\hat{x} \in H \cap F(\hat{y}, z_0)$, 从而 $\hat{x} \notin H \cap F(y_1, z_0)$, 故对任意的 $\alpha \in I$ 有 $\hat{x} \notin H \cap F(y_\alpha, z_0)$. 因此 $\{y_\alpha\} \subset Y \setminus L^{-1}(\hat{x})$, 从而 $\hat{y} \in Y \setminus L^{-1}(\hat{x})$, 即 $\hat{x} \notin F(\hat{y}, z_0)$. 这与 $\hat{x}$ 的选取矛盾. 故 $\{\overline{G(y, z)}: y \in Y, z \in Z\}$ 具有有限交性质.

此外,如果存在 $(u, v) \in Y \times Z$ 使得 $\overline{G(u, v)}$ 是紧的, 易证 $\bigcap_{y \in Y, z \in Z} \overline{G(y, z)} \neq \emptyset$. 由于 $G$ 是转移闭的, 由引理 1.1 知, $\bigcap_{y \in Y, z \in Z} G(y, z) \neq \emptyset$. 证毕.

注 2.1　定理 2.1 是文献[3] 中定理 2.3 的拓展.

推论 2.1　设 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $Z$ 是线性序空间, $F, G: Y \times Z \to 2^X$ 是两个集值映射且 $F$ 有非空值, $G$ 为闭值映射. 若满足下列条件:

(i) 对任意 $N \in \langle Y \rangle$ 和 $z \in Z$, $\bigcap_{y \in N} F(y, z)$ 是连通集或空集, 且对任意 $y_0, y_1 \in N$, 存在 $y_0', y_1' \in \varphi_N(\Delta_1)$ 使得 $F(y_0', z) \subset F(y_0, z)$, $F(y_1', z) \subset F(y_1, z)$;

(ii) 对任意 $x \in X$ 和 $z \in Z$, $\{y \in Y: x \notin F(y, z)\}$ 是闭的 FG-子空间;

(iii) 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, $F(y, z) \subset G(y, z)$; 如果 $z_1 \preceq z_2$, 则对任意 $y \in Y$ 都有 $F(y, z_2) \subset F(y, z_1)$;

(iv) 对任意 $z \in Z$, 存在 $\hat{z} \in Z$, 使得对任意 $y \in Y$, 都有 $G(y, \hat{z}) \subset F(y, z)$.

则

1) $\{G(y, z): y \in Y, z \in Z\}$ 具有有限交性质;

2) 如果存在 $(u, v) \in Y \times Z$ 使得 $G(u, v)$ 是紧的, 则 $\bigcap_{y \in Y, z \in Z} G(y, z) \neq \emptyset$.

## 3　极大极小不等式的应用

用参数型 KKM 定理研究极大极小不等式, 得到以下定理和推论.

定理 3.1　设 $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $Z$ 是序完备序稠密的线性序空间, 且 $f, g: X \times Y \to Z$ 满足下列条件:

(i) 对任意 $N \in \langle Y \rangle$ 和 $z \in Z$, $\bigcap_{y \in N} \{x \in X: f(x, y) \succ z\}$ 是连通集或空集, 且对任意 $y_0, y_1 \in N$, 存在 $y_0', y_1' \in \varphi_N(\Delta_1)$, 使得对任意 $x \in X$, 有 $f(x, y_i') \preceq f(x, y_i)$, 其中 $i = 0, 1$;

(ii) (a) 对任意 $x \in X$, $f(x, \cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的;

(b) 对任意 $y \in Y$, $f(\cdot, y)$, $g(\cdot, y)$ 是上半连续的;

(iii) 存在 $v \prec \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$, $u \in Y$ 和紧子集 $H \subset X$, 使得对任意 $x \in X \setminus H$ 都有 $g(x, u) \prec v$;

(iv) 对任意 $(x, y) \in X \times Y$ 有 $f(x, y) \preceq g(x, y)$.

则 $z_* := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y) \succeq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) := z^*$.

证明　由 $Z$ 的完备性知, $z_*$ 和 $z^*$ 存在. 令 $Z = \{z \in Z: z \prec z^*\}$, 则 $Z$ 是序稠密的线性序空间. 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, 令 $F(y, z) = \{x \in X: f(x, y) \succ z\}$, $G(y, z) = \{x \in X: f(x, y) \succeq z\}$, $P(y, z) = \{x \in X: g(x, y) \succeq z\}$, 由条件(ii)(b)知, 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, $G(y, z)$ 和 $P(y, z)$ 是闭集.

下证映射 $F$ 和 $G$ 满足推论 2.1 的所有条件. 由 $z^*$ 的定义知, $F: Y \times Z \to 2^X$ 具有非空值. 易知 $F$ 和 $G$ 满足推论 2.1 条件(iii). 对任意 $z \in Z$, 由 $Z$ 的稠密性知, 存在 $\hat{z} \in Z$, 使得 $z \prec \hat{z} \prec z^*$, 从而 $\hat{z} \in Z$ 且对任意 $y \in Y$, 有 $F(y, z) \supset G(y, \hat{z})$. 故满足推论 2.1 中条件(iv). 由条件(ii)(a)知, 对任意 $x \in X$ 和 $z \in Z$, $\{y \in Y: x \notin F(y, z)\} = \{y \in Y: f(x, y) \preceq z\}$ 为闭的 FG-子空间, 满足推论 2.1 中条件(ii). 由条件(i)知, 满足推论 2.1 中条件(i). 于是由推论 2.1 的结论 1) 知, $\{G(y, z): y \in Y, z \in Z\}$ 具有有限交性质.

由条件(iv)知, 对任意 $(y, z) \in Y \times Z$, 有 $G(y, z) \subset P(y, z)$. 因此 $\{P(y, z): y \in Y,$

$z\in Z\}$ 是具有有限交性质的闭集族．由条件(iii)知，存在$(u,v)\in Y\times Z$ 使得$P(u,v)\subset H$．由于$H$ 是紧的且$P(u,v)$ 是闭的，故$P(u,v)$ 是紧的．从而有

$$\bigcap_{y\in Y,z\in Z}P(y,z)=\bigcap_{y\in Y,z\in Z}P(y,z)\cap P(u,v)\neq\emptyset.$$

取$\hat{x}\in\bigcap_{y\in Y,z\in Z}P(y,z)$，则对任意$(y,z)\in Y\times Z$，有$g(\hat{x},y)\succeq z$．于是对任意的$z\in Z$，$z_*=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)\succeq z$．由$Z$ 的稠密性，知

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)\succeq z^*=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y).$$

证毕．

**推论 3.1** 设$(Y,\{\varphi_N\})$ 是 FG-空间，$X$ 是拓扑空间，$Z$ 是序完备序稠密的线性序空间，如果$f:X\times Y\to Z$ 满足下列条件：

(i) 对任意$N\in\langle Y\rangle$和$z\in Z$，$\bigcap_{y\in N}\{x\in X:f(x,y)\succ z\}$是连通集或空集，且对任意$y_0,y_1\in N$，存在$y_0',y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$ 使得对任意$x\in X$，有$f(x,y_i')\preceq f(x,y_i)$，其中$i=0,1$；

(ii) (a) 对任意$x\in X$，$f(x,\cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的；

(b) 对任意$y\in Y$，$f(\cdot,y)$ 是上半连续的；

(iii) 存在$v\prec\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$，$u\in Y$ 和紧子集$H\subset X$，使得对任意$x\in X\setminus H$ 有$f(x,u)\prec v$．

则$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$．

**推论 3.2** 设$(Y,\{\varphi_N\})$ 是紧 FG-空间，$X$ 是紧拓扑空间，$Z$ 是序完备序稠密的线性序空间，如果$f:X\times Y\to Z$ 满足下列条件：

(i) 对任意$N\in\langle Y\rangle$，$z\in Z$，$\bigcap_{y\in N}\{x\in X:f(x,y)\succ z\}$是连通集或空集，且对任意$y_0,y_1\in N$，存在$y_0',y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$ 使得对任意$x\in X$，有$f(x,y_i')\preceq f(x,y_i)$，其中$i=0,1$；

(ii) (a) 对任意$x\in X$，$f(x,\cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的；

(b) 对任意$y\in Y$，$f(\cdot,y)$ 是上半连续的．

则$f$ 有一个鞍点$(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$．

注 3.1 推论 3.2 包含数学经济与对策论中著名的冯•诺伊曼定理．

**定理 3.2** 设$(Y,\{\varphi_N\})$ 是 FG-空间，$X$ 是拓扑空间，$Z$ 是序完备序稠密的线性序空间，$f,g:X\times Y\to Z$ 是两个映射且对任意$(x,y)\in X\times Y$，有$f(x,y)\preceq g(x,y)$，且满足下列条件：

(i) 对任意$x\in X$，$f(x,\cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的；

(ii) 对任意$y\in Y$，$f(\cdot,y)$，$g(\cdot,y)$ 是上半连续的；

(iii) 存在非空集$K\subset X$ 和紧子集$H\subset Y$ 使得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\preceq\inf_{y\in Y\setminus H}\sup_{x\in K}f(x,y),$$

并且对任何有限子集$F\subset X$，存在紧集$K(F)\supset K\cup F$，使得对任意$N\in\langle Y\rangle$和$z\in Z$，集$\bigcap_{y\in N}\{x\in K(F):f(x,y)\succ z\}$是连通集或空集，且对任意$y_0,y_1\in N$，存在$y_0',y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$，使得对任意$x\in X$，有$f(x,y_i')\preceq f(x,y_i)$，其中$i=0,1$．

则$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)\succeq\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$．

证明 令$z_*=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)$，$z^*=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$，由$Z$ 的完备性知，$z_*$ 和$z^*$ 存在．如果$z_*\prec z^*$，由$Z$ 的稠密性知，存在$z\in Z$，使得$z_*\prec z\prec z^*$．

对任意$x\in X$，令$L(x)=\{y\in Y:f(x,y)\preceq z\}$，由条件(i)知，$L(x)$ 为闭集．对任意

$x\in X$，令 $M(x)=L(x)\cap(\bigcap_{z\in K}L(z))$，则 $M(x)$ 是闭集．对任意 $y\in Y\setminus H$，由条件(iii)知，存在 $x_0\in K$，使得 $f(x_0,y)\succ z$，即 $y\notin\bigcap_{z\in K}L(z)$，则 $\bigcap_{z\in K}L(z)\subset H$．因此对任意 $x\in X$ 有 $M(x)\subset H$．

现在证明 $\{M(x):x\in X\}$ 具有有限交性质．由条件(iii)知，对任意有限集 $F\subset X$，存在紧集 $K(F)\supset K\cup F$，使得对任意 $N\in\langle Y\rangle$ 和 $z\in Z$，$\bigcap_{y\in N}\{x\in K(F):f(x,y)\succ z\}$ 是连通集或空集．由定理 3.1 知

$$\sup_{x\in K(F)}\inf_{y\in Y}g(x,y)\succeq\inf_{y\in Y}\sup_{x\in K(F)}f(x,y),$$

从而

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in K(F)}f(x,y)\preceq\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)=z_*\prec z.$$

我们断言 $\bigcap_{x\in K(F)}M(x)\neq\emptyset$．若不然，则有 $Y=\bigcup_{x\in K(F)}(Y\setminus M(x))$，于是对任意 $y\in Y$，存在 $x(y)\in K(F)$ 使得 $y\in Y\setminus M(x(y))$，即 $y\notin M(x(y))=L(x(y))\cap(\bigcap_{z\in K}L(z))$．故 $y\notin L(x(y))$ 或 $y\notin\bigcap_{z\in K}L(z)$．如果 $y\notin L(x(y))$，则 $f(x(y),y)\succ z$；如果 $y\notin\bigcap_{z\in K}L(z)$，则存在 $\hat{x}(y)\in K\subset K(F)$ 使得 $y\notin L(\hat{x}(y))$，即 $f(\hat{x}(y),y)\succ z$．由此可知，存在映射 $\hat{u}:Y\to K(F)$，使得对任意 $y\in Y$，有 $f(\hat{u}(y),y)\succ z$．故对任意 $y\in Y$，有 $\sup_{x\in K(F)}f(x,y)\succ z$．因此 $\inf_{y\in Y}\sup_{x\in K(F)}f(x,y)\succeq z$．这与 $\inf_{y\in Y}\sup_{x\in K(F)}f(x,y)\prec z$ 矛盾．故 $\bigcap_{x\in K(F)}M(x)\neq\emptyset$．由于 $\bigcap_{x\in F}M(x)\supset\bigcap_{x\in K(F)}M(x)$，从而 $\{M(x):x\in X\}$ 具有有限交性质，于是 $\bigcap_{x\in X}M(x)\neq\emptyset$．取 $y\in\bigcap_{x\in X}M(x)$，则对任意 $x\in X$，有 $y\in L(x)$，即 $f(x,y)\preceq z$．从而 $z^*\preceq z$．这与 $z$ 的选取矛盾．故 $z_*\succeq z^*$．证毕．

**推论 3.3** 设 $(Y,\{\varphi_N\})$ 是 FG-空间，$X$ 是拓扑空间，$Z$ 是序完备序稠密的线性序空间，并且 $f:X\times Y\to Z$ 满足下列条件：

(i) 对任意 $x\in X$，$f(x,\cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的；

(ii) 对任意 $y\in Y$，$f(\cdot,y)$ 是上半连续的；

(iii) 存在非空集 $K\subset X$ 和紧子集 $H\subset Y$，使得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\preceq\inf_{y\in Y\setminus H}\sup_{x\in K}f(x,y),$$

且对任何有限子集 $F\subset X$，存在紧集 $K(F)\supset K\cup F$，使得对任意 $N\in\langle Y\rangle$ 和 $z\in Z$，集 $\bigcap_{y\in N}\{x\in K(F):f(x,y)\succ z\}$ 是连通集或空集，且对任意 $y_0,y_1\in N$，存在 $y_0',y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$，使得对任意 $x\in X$，有 $f(x,y_i')\preceq f(x,y_i)$，其中 $i=0,1$．

则 $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$．

**推论 3.4** 设 $(Y,\{\varphi_N\})$ 是紧 FG-空间，$X$ 是紧拓扑空间，$Z$ 是序完备序稠密的线性序空间，并且 $f:X\times Y\to Z$ 满足下列条件：

(i) 对任意 $x\in X$，$f(x,\cdot)$ 是 FG-参数-拟凸和下半连续的；

(ii) 对任意 $y\in Y$，$f(\cdot,y)$ 是上半连续的；

(iii) 存在非空集 $K\subset X$ 和紧子集 $H\subset Y$ 使得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\preceq\inf_{y\in Y\setminus H}\sup_{x\in K}f(x,y),$$

且对任何有限子集 $F\subset X$，存在紧集 $K(F)\supset K\cup F$，使得对任意 $N\in\langle Y\rangle$，$z\in Z$，集 $\bigcap_{y\in N}\{x\in K(F):f(x,y)\succ z\}$ 是连通集或空集，且对任意 $y_0,y_1\in N$，存在 $y_0',y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$，使得对任意 $x\in X$，有 $f(x,y_i')\preceq f(x,y_i)$，其中 $i=0,1$．

则 $f$ 有一个鞍点 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$．

# 4 截口定理的应用

用参数型 KKM 定理研究截口定理,得到下面的结论.

**定理 4.1** 设 $(Y,\{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $Z$ 是线性序空间, $B$ 和 $C$ 是 $X\times Y\times Z$ 的两个子集,且满足下列条件:

(i) 对任意 $(y,z)\in Y\times Z$, 截口 $B_{(y,z)}:=\{x\in X:(x,y,z)\in B\}\neq\emptyset$ 和 $C_{(y,z)}:=\{x\in X:(x,y,z)\in C\}$ 是转移闭值的,且存在 $(u,v)\in Y\times Z$, 使得 $C_{(u,v)}$ 为紧集;

(ii) 对任意 $N\in\langle Y\rangle$, $z\in Z$, $\bigcap_{y\in N}B_{(y,z)}$ 是连通集或空集,且对任意 $y_0, y_1\in N$, 存在 $y_0', y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$ 使得 $B_{(y_0',z)}\subset B_{(y_0,z)}$, $B_{(y_1',z)}\subset B_{(y_1,z)}$;

(iii) 对任意 $(x,z)\in X\times Z$, 集 $\{y\in Y:(x,y,z)\notin B\}$ 是闭的 FG-子空间;

(iv) $B\subset C$; 如果 $z_1\preceq z_2$, 则对任意 $y\in Y$, 有 $B_{(y,z_2)}\subset B_{(y,z_1)}$;

(v) 对任意 $z\in Z$, 存在 $\hat{z}\in Z$, 使得对任意 $y\in Y$, 有 $C_{(y,\hat{z})}\subset B_{(y,z)}$.

则存在 $\hat{x}\in X$, 使得 $\{\hat{x}\}\times(Y\times Z)\subset C$.

证明 令 $F(y,z)=B_{(y,z)}$, $G(y,z)=C_{(y,z)}$, 易证 $F$ 和 $G$ 满足定理 2.1 的所有条件. 由定理 2.1 的结论 2) 知, $\bigcap_{y\in Y,z\in Z}G(y,z)\neq\emptyset$. 故存在 $\hat{x}\in X$, 使得对任意 $(y,z)\in Y\times Z$, 有 $\hat{x}\in G(y,z)$, 即 $(\hat{x},y,z)\in C$, 故 $\{\hat{x}\}\times(Y\times Z)\subset C$.

**推论 4.1** 设 $(Y,\{\varphi_N\})$ 是 FG-空间, $X$ 是拓扑空间, $Z$ 是线性序空间, $B$ 和 $C$ 是 $X\times Y\times Z$ 的两个子集,且满足下列条件:

(i) 对任意 $(y,z)\in Y\times Z$, 截口 $B_{(y,z)}:=\{x\in X:(x,y,z)\in B\}\neq\emptyset$ 和 $C_{(y,z)}:=\{x\in X:(x,y,z)\in C\}$ 是闭值的,且存在 $(u,v)\in Y\times Z$, 使得 $C_{(u,v)}$ 为紧集;

(ii) 对任意 $N\in\langle Y\rangle$, $z\in Z$, $\bigcap_{y\in N}B_{(y,z)}$ 是连通集或空集,且对任意 $y_0, y_1\in N$, 存在 $y_0', y_1'\in\varphi_N(\Delta_1)$, 使得 $B_{(y_0',z)}\subset B_{(y_0,z)}$, $B_{(y_1',z)}\subset B_{(y_1,z)}$;

(iii) 对任意 $(x,z)\in X\times Z$, 集 $\{y\in Y:(x,y,z)\notin B\}$ 是闭的 FG-子空间;

(iv) $B\subset C$ 且如果 $z_1\preceq z_2$, 则对任意 $y\in Y$, 有 $B_{(y,z_2)}\subset B_{(y,z_1)}$;

(v) 对任意 $z\in Z$, 存在 $\hat{z}\in Z$, 使得对任意 $y\in Y$, 有 $C_{(y,\hat{z})}\subset B_{(y,z)}$.

则存在 $\hat{x}\in X$, 使得 $\{\hat{x}\}\times(Y\times Z)\subset C$.

## [参 考 文 献]


[1] Knaster B, Kurnatoaski C, Mazurkiewicz S. Ein beweis des fixpunksatzes fur n-dimensionale simplexe[J]. Fund Math, 1929, **14**: 132-137.

[2] Fan Ky. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem[J]. Math Ann, 1961, **142**(3): 305-310.

[3] CHANG Shih-sen, CAO Shi-yi, WU Xian. Some nonempty intersection theorems in generalized interval spaces with applications[J]. J Math Anal Appl, 1996, **199**(3): 787-803.

[4] DING Xie-ping. Himmelberg type fixed point theorem in locally FC-spaces[J]. J Sichuan Normal University (Natural Science), 2005, **28**(2): 127-130.

[5] DING Xie-ping. Colletive fixed points and a system of coincidence theorems in product FC-spaces and applications[J]. Nonlinear Anal, 2007, **66**(11): 2604-2617.

[6] DING Xie-ping. Maximal element theorems in product FC-spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29-42.

[7] FANG Min, HUANG Nan-jing. KKM type theorems with applications to generalized vector equilibrium problems in FG-spaces[J]. Nonlinear Anal, 2007, **67**(3): 809-817.
[8] LIN Bor-luh, QUANG Xiu-chi. A non-compact topological minimax theorem[J]. J Math Anal Appl, 1991, **161**(2): 587-590.
[9] Stach L L. Minimax theorems beyond topological vector spaces[J]. Acta Sci Math, 1980, **42**(1/2): 157-164.
[10] CHENG Cao-zong, LIN You-hao. On the generalization of minimax theorem for the type of fixed points[J]. Acta Math Sinica, 1991, **34**(4): 502-507.
[11] Komornik V. Minimax theorems for upper semi-continuous fuctions[J]. Acta Math Acad Sci Hungar, 1982, **40**(7): 159-163.
[12] TIAN Guo-qiang. Generalization of the FKKM theorem and the Ky Fan minimax inquality, with applications to maximal elements, price equilibrium, and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457-471.

# Parametric Type of KKM Theorem in FG-Spaces With Applications

DENG Lei, ZANG Xiao-yan
(School of Mathematics and Statistics, Southwest University,
Chongqing 400715, P. R. China)

**Abstract:** First, the authors proved a characteristic property in FG-spaces, then using the connectedness of set, a parametric type of KKM theorem was established in noncompact FG-spaces by introducing a linear ordered space. As consequences, some recent known results such as the noncompact minimax inequalities, saddle point theorem and section theorem were improved. The results improve and generalize the corresponding results in the literature.

**Key words:** FG-subspace; FG-parametrie-quasiconvex mapping; minimax inequality