文章编号: 1000-0887(2009) 01-0109-11 © 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

R-滤子的谱及几何性质*

冷 拓

(中国科学院成都计算所 自动推理实验室, 成都 610041)

摘要: 应用 Fourier 分析, 研究了 R-滤子的谱性质, 并且证明了 R-滤子是最小二乘方多项式法则的推广, 在此基础上给出了 R-滤子的几何解释.

关 键 词: R-滤子; HP-滤子; 谱性质; Fourier 分析; Hess-矩阵; 算子理论
中图分类号: F830 文献标识码: A

引 言

本文中, 我们用实数序列表示经济时间序列, 每一次观察结果都是这个序列的一个元素. 在文献[1]中, Hodrick 和 Prescott 等建立了 HP-滤子理论. 它已是经济时间序列分析中一个十分有用的工具. 所谓的 HP-滤子可表述为下面的最优化问题:

$$\min_{\{y_j\}_{j=1}^N} F_\lambda \qquad F_\lambda = \sum_{i=1}^{N}\left\{(x_i - y_i)^2 + \lambda(\Delta^2 y_i)^2\right\},$$

其中, $\{x_i\}$ 是要被过滤的序列, 我们叫做输入序列, 这个最优化问题的解 $\{y_i\}$ 是滤后的序列, 我们叫做输出序列. Δ 是中心差分算子, λ 是一个参数.

HP-滤子的主要想法是分解时间序列成高和低的频率分量. HP-滤子及应用已有众多的文献研究[2-8], 特别是用 HP-滤子估计 GDP 更是吸引了广泛的兴趣[9].

最近, Fabio Araujo 等给出了 HP-滤子的一个重要推广, 叫做 R-滤子. R-滤子是下面的最优化问题:

$$\min_{\{y_j\}_{j=1}^N} F_{\lambda,r} \qquad F_{\lambda,r} = \sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2 + \lambda\sum_{i=r/2+1}^{N-r/2}(\Delta^r y_i)^2, \tag{1}$$

其中, $(\Delta^r y_i)$ 是 y_i 的第 r 阶中心差分, $\{x_i\}$ 是一个输入序列.

在 R-滤子理论中, 被发现的高阶滤子是 HP-滤子"家族"中的另外的成员. R-滤子保持了 HP-滤子光滑阶参数 λ 的选择所产生的灵活性, 还增加了滤子选择参数 r.

对一个给出的输入序列 $\{x_i\}$, 如果 $\{y_i\}$ 是使得上面 $F_{\lambda,r}$ 取最小值的一个序列, 则我们就称 $\{y_i\}$ 是 R-滤子的一个解.

---

* 收稿日期: 2008-05-03; 修订日期: 2008-12-01
基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(NKBRPC-2004CB318003); 中国科学院知识创新工程资助重大项目(KJCX2-YW-S02); 国家自然科学基金资助项目(10771205)
作者简介: 冷拓(1983—), 男, 湖南人(E-mail: lengtuo2004@hotmail.com).

为简单起见,我们记

$$\Gamma = \left\{ k \mid \max\left(1 + \frac{r}{2}, i - \frac{r}{2}, j - \frac{r}{2}\right) \leqslant k \leqslant \min\left(N - \frac{r}{2}, i + \frac{r}{2}, j + \frac{r}{2}\right) \right\}.$$

Fabio Araujo 等在文献[2] 中证明了下面的定理.

定理 1 对一个给出的输入序列 $\{x_i\}$, 则 R-滤子的解能表示为

$$y = (I + \lambda B(r))^{-1} x,$$

其中

$$B(r) = (b_{ij})_{N\times N}, \quad b_{ij} = \sum_{k\in\Gamma} (-1)^{i-j} C_r^{r/2-k+i} C_r^{r/2+j-k}.$$

本文的主要目的是研究 R-滤子的谱性质. 我们还将证明 R-滤子是最小二乘方多项式法则的推广, 从而给出了 R-滤子的几何解释.

本文除了引言, 被分成两节. 在第 1 节中, 我们用 Fourier 变换研究 R-滤子的谱性质; 在第 2 节中, 我们讨论了 R-滤子的收敛性并给橱了 R-滤子的几何解释, 我们证明了当 $\lambda\to+\infty$ 时, R-滤子等价于最小二乘方多项式法则.

1 R-滤子的谱性质

为了研究 R-滤子的主要谱性质, 我们研究了一个比式(1) 更简单的优化问题. 即我们假设输入和输出序列都是无限长的序列, 我们前面的优化问题可以下面修正的形式给出:

$$\min_{\{y_i\}} F_{r,\lambda,\infty} \qquad F_{r,\lambda,\infty} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ (x_i - y_i)^2 + \lambda (\Delta^r y_i)^2 \right\}. \tag{2}$$

我们有

引理 1.1

$$\frac{\partial F_{r,\lambda,\infty}}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow y_i + \lambda \Delta^{2r} y_i = x_i.$$

证明 根据已知的事实[2]:

$$\Delta^r y_t = \sum_{l=-r/2}^{r/2} (-1)^{l+r/2} C_r^{l+r/2} y_{t+l}.$$

我们有

$$\frac{\partial \Delta^r y_k}{\partial y_i} = \begin{cases} (-1)^{r/2+k-i} C_r^{r/2+k-i}, & \text{如果} \mid k-i \mid \leqslant r/2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (\Delta^r y_k)^2\right] = 2\sum_{-\infty}^{+\infty} (\Delta^r y_k) \frac{\partial}{\partial y_i}(\Delta^r y_k) =$$

$$2\sum_{k=i-r/2}^{i+r/2} (\Delta^r y_k)(-1)^{r/2+k-i} C_r^{r/2+k-i} =$$

$$2\sum_{i-r/2\leqslant k\leqslant i+r/2,\ -r/2\leqslant l\leqslant r/2} (-1)^{k-i+l} C_r^{r/2+k-i} C_r^{r/2+l} y_{k+l} =$$

$$2\sum_{k=i-r}^{i+r} (-1)^{k-i+r} C_{2r}^{k-i+r} y_k = 2\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k y_{i+k-r}.$$

另一方面,

$$\Delta^{2r} y_i = (L - I)^{2r} L^{-r} y_i = \left(\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k L^k\right) L^{-r} y_i =$$

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k L^{k-r} y_i = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k y_{i+k-r},$$

其中, L 为 lag 算子.

因此

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big[\sum_{-\infty}^{+\infty}(\Delta^r y_k)^2\Big] = 2\Delta^{2r} y_i.$$

故

$$\frac{\partial F_{r,\lambda,\infty}}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow y_i + \lambda\Delta^{2r} y_i = x_i. \qquad \square$$

现在,我们研究下面差分方程的谱性质,这叫做R-滤子的一阶条件:

$$y_i + \lambda\Delta^{2r} y_i = x_i. \tag{3}$$

我们时常用式(3)的齐次差分方程:

$$y_i + \lambda\Delta^{2r} y_i = 0. \tag{4}$$

引理 1.2 齐次差分方程(4)的特征多项式是

$$P(u) = u^{-r}((u-1)^{2r} + (1/\lambda)u^r).$$

证明 设方程(4)有形如 $y_k = u^{-k}$ 的解, $u \neq 0$. 将它代入方程(4), 便知 u 应满足下面的方程:

$$u^{-k} + \lambda\sum_{j=0}^{2r} C_{2r}^{j}(-1)^j u^{-k-j+r} = u^{-k}\left(1 + \lambda\sum_{j=0}^{2r} C_{2r}^{j}(-1)^j u^{r-j}\right) =$$

$$u^{-k}\left(1 + \lambda u^{-r}\sum_{j=0}^{2r} C_{2r}^{j}(-1)^j u^{2r-j}\right) = u^{-k}(1 + \lambda u^{-r}(1-u)^{2r}) =$$

$$\lambda u^{-(k+r)}((u-1)^{2r} + (1/\lambda)u^r) = \lambda u^{-k}P(u) = 0.$$

故 $P(u)$ 是方程(4)的特征多项式. $\square$

因为线性差分方程是一个线性非时变系统,下面对这种线性系统作一简短的回顾.

$\mathscr{L}$叫做一个线性非时变系统,如果

1) $\mathscr{L}(\alpha x_t + \beta y_t) = \alpha\mathscr{L}(x_t) + \beta\mathscr{L}(y_t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{C}$;

2) $\mathscr{L}(Lx_t) = L\mathscr{L}(x_t)$.

其中, L 是一个 lag 算子.

设输入 x_k 的 Fourier 表示为

$$x_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega}\,dF_x(\omega).$$

设 y_k 是系统 $\mathscr{L}$的输出, 即 $\mathscr{L}: y_k = \mathscr{L}(x_k)$, 用记号 δ_k 表示

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

用 h_k 表示 δ_k 的反应, 即 $h_k = \mathscr{L}(\delta_k)$. 我们有下面的线性算子公式:

$$y_k = \mathscr{L}(x_k) = \mathscr{L}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta_{k-j}x_j\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathscr{L}(\delta_{k-j})x_j =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_{k-j}x_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}h_{k-j}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\omega}\,dF_x(\omega) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_{k-j}e^{-i(k-j)\omega}e^{ik\omega}\,dF_x(\omega) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n e^{-in\omega}\,dF_x(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)e^{ik\omega}\,dF_x(\omega), \tag{5}$$

其中，$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n e^{-in\omega}=2\pi\mathscr{F}(h_n)$（$\mathscr{F}$是离散的Fourier变换），叫做频率反应.

进一步，设$f_x(\omega)$和$f_y(\omega)$分别是x和y的谱密度，则

$$f_y(\omega)=H(\omega)f_x(\omega).$$

这一节的主要结论是下面的定理.

定理 1.3 设$H_{r,\lambda}(\omega)$是式(3)的频率反应函数，则

$$H_{r,\lambda}(\omega)=\frac{1}{1+2^r\lambda(\cos\omega-1)^r}.$$

证明 根据线性算子公式(5)，我们令

$$x_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}dF_x(\omega),\quad y_k=\int_{-\pi}^{\pi}H_{r,\lambda}(\omega)e^{ik\omega}dF_x(\omega),$$

将它们代入式(3)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}H_{r,\lambda}(\omega)e^{ik\omega}dF_x(\omega)+\lambda\sum_{j=0}^{2r}C_{2r}^{j}(-1)^j\int_{-\pi}^{\pi}H_{r,\lambda}(\omega)e^{i(k+j-r)\omega}dF_x(\omega)=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}dF_x(\omega)\Leftrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}H_{r,\lambda}(\omega)e^{ik\omega}\left(1+\lambda\sum_{j=0}^{2r}C_{2r}^{j}(-1)^j e^{i(j-r)\omega}\right)dF_x(\omega)=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}dF_x(\omega)\Leftrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}H_{r,\lambda}(\omega)e^{ik\omega}\lambda P(e^{-i\omega})dF_x(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\omega}dF_x(\omega).$$

因此

$$H_{r,\lambda}(\omega)=\frac{1}{\lambda P(e^{-i\omega})}=\frac{e^{-ir\omega}/\lambda}{(e^{-i\omega}-1)^{2r}+e^{-ir\omega}/\lambda}=\frac{1}{1+2^r\lambda(\cos\omega-1)^r}.\qquad\square$$

现在我们用频率反应函数$H_{r,\lambda}(\omega)$研究R-滤子的谱性质. 我们有下面的结论:

1) 对每个$\omega\in\mathbf{R}$，$H_{r,\lambda}(\omega)$的值都是实数. 这意味着对每双(r,λ)，这是一个零-相滤子.

2) 当r是偶数时，$H_{r,\lambda}(\omega)>0$. 但是当r是奇数时，$H_{r,\lambda}$在频率$\omega=\arccos 1-1/(2\sqrt[r]{\lambda})$时，$H_{r,\lambda}(\omega)$有无穷峰值，这时$y$的谱密度$f_y(\omega)$是不收敛的. 因此，我们仅考虑$r$取偶数时的滤子. 这样，HP滤子是这个家族中的第一个成员.

注意到r是偶数时，

$$0<\frac{1}{1+4^r\lambda}\leqslant H_{r,\lambda}(\omega)\leqslant 1.$$

因为

$$\frac{dH_{r,\lambda}(\omega)}{d\omega}=-H^2 2^r\lambda(1-\cos\omega)^{r-1}\sin\omega<0,$$

当$\omega\in(0,\pi)$时，$H_{r,\lambda}(\omega)$是单调的. 因此，对给定的(r,λ)，存在唯一的$\omega_0\in(0,\pi)$使得

$$H_{r,\lambda}(\omega_0)=\frac{1}{2}.$$

因为

$$H_{r,\lambda}(\omega_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\omega_0=1-\frac{1}{2\lambda^{1/r}},$$

存在无穷多个(r,λ)满足$H_{r,\lambda}(\omega_0)=1/2$. 事实上，每双$(r,\lambda)$都是曲线$\lambda=a^r$上的点，其中$a=1/(2(1-\cos\omega_0))$.

现在，我们引进参数等价的定义：

如果某两对参数(r_1,λ_1)和(r_2,λ_2)使得

$$H_{r_1,\lambda_1}(\omega_0)=H_{r_2,\lambda_2}(\omega_0)=\frac{1}{2},$$

则我们称 (r_1, λ_1) 和 (r_2, λ_2) 等价.

因此,我们有下面的结论.

命题 1.4 (r_1, λ_1) 和 (r_2, λ_2) 等价当且仅当

$$\lambda_1^{\lambda_2}=\lambda_2^{\lambda_1}. \tag{6}$$

这样,如果式(6)成立,则在给定的分离点 ω_0 的频率滤子 $H_{r_1,\lambda_1}(\omega_0)$ 和 $H_{r_2,\lambda_2}(\omega_0)$ 等价. 进一步,如果两个滤子等价且 $r_2>r_1$,那么我们选择 $H_{r_2,\lambda_2}(\omega_0)$.

注 在文献[2]中,作者称 ω_0 是 $H_{r,\lambda}(\omega)$ 在 $(0,\pi)$ 中的拐点,即他们证明了

$$\frac{\partial^2 H_{r,\lambda}}{\partial\omega^2}(\omega_0)=0\Rightarrow H_{r,\lambda}(\omega_0)=\frac{1}{2}.$$

通过计算,我们认为这一结果是错误的. 事实上,

$$\frac{\partial^2 H_{r,\lambda}}{\partial\omega^2}=H^3 2^r r(1-\cos\omega)^{r-1}\left\{2^r\lambda(1-\cos\omega)^r[(r+1)+r\cos\omega]-[(r-1)+r\cos\omega]\right\},$$

则对满足 $\cos\omega_0=1-1/(2\lambda^{1/r})$ 的 ω_0 有

$$\frac{\partial^2 H_{r,\lambda}(\omega_0)}{\partial\omega^2}\neq 0.$$

此外,我们认为很难给出 $H_{r,\lambda}(\omega)$ 的简单的拐点公式. 因此选择 $H_{r,\lambda}(\omega)=1/2$ 作为分离点频率相对简单.

2 R-滤子和最小二乘方多项式法则

在这一节里,我们证明一个事实:R-滤子是最小二乘方多项式法则(LSPA)的一个推广. 我们的主要结论是下面的定理 2.8 和定理 2.11.

我们需要下面的引理:

引理 2.1 设

$$\bar{k}=(1^k, 2^k, \dots, N^k), \qquad k\in\{0,1,\dots,r-1\}.$$

则 $\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1}$ 是 R^N 中线性无关的向量组. 此外,

$$\det G(\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1})>0,$$

其中, $G(\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1})$ 是 $\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1}$ 的 Gram-矩阵.

证明 设

$$M=\begin{pmatrix}1^0 & 2^0 & \cdots & N^0\\ 1^1 & 2^1 & \cdots & N^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1^{r-1} & 2^{r-1} & \cdots & N^{r-1}\end{pmatrix}_{r\times N},$$

则它的 r- 阶行列式

$$\begin{vmatrix}1^0 & 2^0 & \cdots & r^0\\ 1^1 & 2^1 & \cdots & r^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1^{r-1} & 2^{r-1} & \cdots & r^{r-1}\end{vmatrix}=\prod_{r\geqslant j>i\geqslant 1}(j-i)\neq 0.$$

所以 $\operatorname{rank}M=r$,即 $\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1}$ 线性无关. 因此 Gram-矩阵 $G(\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1})$ 是正定的,故 $\det G(\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{r-1})>0$. □

设

$$M^r = \left\{ a_1\bar{0} + a_2\bar{1} + \cdots + a_r\overline{r-1},\ a_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \cdots, r \right\},$$

则 M^r 是 R^N 中的 r- 维超平面(子空间). 设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)$ 是LSPA 作用于 x 产生的序列, 即 x^* 是 x 在超平面 M^r 上的正交投影.

引理 2. 2 对任意的 $x \in R^N$, 有

$$x^* = Px,$$

其中

$$P = RG^{-1}R^{\mathrm{T}},\quad G = G(\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{r-1}),\quad R^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \vdots \\ \overline{r-1} \end{bmatrix}_{r\times N}.$$

证明 设 $(M^r)^{\perp}$ 是 M^r 的正交补. 则

$$x - x^* \in (M^r)^{\perp}.$$

故

$$\langle x - x^*, \bar{j} \rangle = 0,\qquad j = 0, 1, \cdots, r-1. \tag{7}$$

设 $x^* = a_1\bar{0} + a_2\bar{1} + \cdots + a_r\overline{r-1}$. 使用矩阵的记号, 式(7) 可以被重写为

$$G\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}_{r\times 1} = \begin{bmatrix} \langle x, \bar{0}\rangle \\ \langle x, \bar{1}\rangle \\ \vdots \\ \langle x, \overline{r-1}\rangle \end{bmatrix}_{r\times 1} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \vdots \\ \overline{r-1} \end{bmatrix}_{r\times N} \cdot x = R^{\mathrm{T}}x.$$

由引理 2. 1 可知, 存在逆矩阵 G^{-1}. 因此

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = G^{-1}R^t x.$$

故

$$x^* = R\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = (RG^{-1}R^{\mathrm{T}})x = Px. \qquad \square$$

我们称 $P: R^N \to R^N$ 为 M^r 上的投影算子.

引理 2. 3 投影算子 P 具有下面的性质:

(a) $Px = x$, 即 x 是 P 的不动点当且仅当 $x \in (M^r)^{\perp}$;

(b) $P = RG^{-1}R^t$ 是对称的;

(c) $P^2 = P$;

(d) $\mathrm{rank}P = r$;

(e) P 有 r 个特征值为 1 和 $N - r$ 个特征值为 0.

P 的这些性质都是众所周知的[10].

引理 2.4 设 $P(x)$ 是次数小于 r 的多项式, 则

$$\sum_{k=0}^{r} P(k)(-1)^k C_r^k = 0.$$

证明 设 $\Delta = L - I$, 即 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, 其中 L 为 lag 算子, I 为恒等算子, 则

$$\Delta^r P(x) = (L-I)^r P(x) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k L^k P(x) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k P(x+k).$$

注意到 $\deg P(x) < r$, $\Delta^r P(x) = 0$, 有

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k P(x+k) \equiv 0.$$

在上式中令 $x = 0$, 即可得

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k P(k) = 0. \qquad \square$$

引理 2.5

$$\ker B(r) = M^r.$$

证明 由 $\operatorname{rank} B(r) = N - r$, 可得

$$\dim(\ker B(r)) = N - \operatorname{rank} B(r) = r = \dim M^r.$$

所以, 我们只需证明

$$M^r \subset \ker B(r). \tag{8}$$

为了证明式(8), 我们只需证明 M^r 的基是 $\ker B(r)$ 中的元素, 即 $\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{r-1} \in \ker(B(r))$, 即

$$B(r)k = 0, \qquad \forall k \in \{0, 1, \cdots, r-1\}. \tag{9}$$

事实上, 设

$$A = (a_{i,j})_{N\times N} = \begin{bmatrix} C_r^0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -C_r^1 & C_r^0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ (-1)^{i-1}C_r^{i-1} & \cdots & \cdots & C_r^0 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ C_r^r & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & C_r^r & \cdots & (-1)^{i-1}C_r^{i-1} & \cdots & C_r^0 \end{bmatrix}$$

和

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j}C_r^{i-j}, & 0 \leqslant i-j \leqslant r \Leftrightarrow j \leqslant i \leqslant j+r \leqslant N, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} I_{(N-r)\times(N-r)} & 0_{(N-r)\times r} \\ 0_{r\times(N-r)} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

由文献[2] $B(r) = ADA^{\mathrm{T}}$, 可得

$$B(r)k = B(r)\begin{bmatrix}1^k\\2^k\\\vdots\\N^k\end{bmatrix} = ADA^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1^k\\2^k\\\vdots\\N^k\end{bmatrix} =$$

$$AD\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+1)^k\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+2)^k\\\vdots\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+N-r)^k\\\vdots\\C_r^0(N-1)^k-C_r^1N^k\\C_r^0N^k\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+1)^k\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+2)^k\\\vdots\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+N-r)^k\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}. \tag{10}$$

另一方面, 在引理 2.4 中分别令 $P(x) = (x+1)^k, (x+2)^k, \cdots, (x+N-r)^k$, 有

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+1)^k = 0,\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+2)^k = 0,\\\vdots\\\sum_{i=0}^{r}(-1)^iC_r^i(i+N-r)^k = 0.\end{cases} \tag{11}$$

结合式(10)和(11), 就可推出式(9). □

设 $T_{\lambda,r} = (I+\lambda B(r))^{-1}$, 则对任意的输入序列 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $y = T_{\lambda,r}x$ 都是 R-滤子的输出序列. 容易看出 $T_{\lambda,r}: R^N \to R^N$ 是同构的.

引理 2.6 $T_{\lambda,r}x = x$(即 x 是 $T_{\lambda,r}$ 的不动点) 当且仅当 $x \in M^r$.

证明 由引理 2.5 可得

$$B(r)x = 0 \Leftrightarrow x \in M^r.$$

因此

$$T_{\lambda,r}x = x \Leftrightarrow (I+\lambda B(r))^{-1}x = x \Leftrightarrow (I+\lambda B(r))x = x \Leftrightarrow$$
$$B(r)x = 0 \Leftrightarrow x \in M^r.$$

引理 2.7 对任意的 $x \in R^N$, 设 $y = T_{\lambda,r}x$, $\lambda > 0$, 则对任意的 $z \in M^r$ 都有

$$\langle x-y, z\rangle = 0.$$

证明 注意到 $T: R^N \to R^N$ 是一个对称算子, 并应用引理 2.6, 可得

$$\langle x-y, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle T_{\lambda,r}x, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, T_{\lambda,r}z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle = 0.$$ □

下面的定理 2.8 给出了 x^* (LSPA 作用于 x 产生的序列) 和 y (R-滤子作用于 x 产生的序列) 的一个有趣关系.

定理 2.8 对任意的 $x \in R^N$, 设 $x^* = Px$, $y = T_{\lambda,r}x$, 则存在 $u \in (M^r)^{\perp}$ 使得

$$y = x^* + u.$$

证明　由引理 2.7 可得

$$x - y \in (M^r)^{\perp}.$$

设 $x - y = u_1 \in (M^r)^{\perp}$, 则有

$$x = y + u_1. \tag{12}$$

另一方面, 由 $R^N = M^r \oplus (M^r)^{\perp}$,

$$x = x^* + u_2, \qquad u_2 \in (M^r)^{\perp}. \tag{13}$$

结合式(12)和(13), 即得

$$y + u_1 = x^* + u_2 \Leftrightarrow y = x^* + (u_2 - u_1) = x^* + u,$$

其中 $u = u_2 - u_1 \in (M^r)^{\perp}$. □

定理 2.8 给出了 R-滤子的几何解释.

在文献[2]中, Fabio Araujo 等证明了 $B(r)$ 是一个半正定矩阵且 $\operatorname{rank}(B(r)) = N - r$, 故 $B(r)$ 有 $N - r$ 个特征值为正和 r 个特征值为 0.

引理 2.9　设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{N-r}$ 是 $B(r)$ 的 $N - r$ 个正的特征值, 则 $T_{\lambda,r}$ 有 $N - r$ 个特征值

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda_1}, \frac{1}{1+\lambda\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{1+\lambda\lambda_{N-r}},$$

其它 r 个 $T_{\lambda,r}$ 的特征值都是 0.

引理 2.9 是显然的, 所以我们不对其进行证明.

引理 2.10　设 $\{v_1, v_2 \cdots, v_m\}$ 是 R^N 的 m 维子空间的正交基, $z = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$, 则

$$m \| z \| \geqslant \sum_{i=1}^{m} \| a_i v_i \|.$$

证明　因为

$$\| z \|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i v_i, \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i v_i, a_i v_i \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \| a_i v_i \|^2 \geqslant \| a_i v_i \|^2,$$

所以

$$m \| z \| \geqslant \sum_{i=1}^{m} \| a_i v_i \|.$$ □

定理 2.11　当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 有

$$T_{\lambda,r} \rightarrow P.$$

证明　对任意的 $x \in R^N$, 因为

$$R^N = M^r \oplus (M^r)^{\perp},$$

所以

$$x = z_1 + z_2, \qquad z_1 \in M^r, \ z_2 \in (M^r)^{\perp}.$$

由引理 2.3 可得

$$P(x) = P(z_1) + P(z_2) = z_1. \tag{14}$$

另一方面, 由引理 2.6 有

$$T_{\lambda,r}(x) = T_{\lambda,r}(z_1) + T_{\lambda,r}(z_2) = z_1 + T_{\lambda,r}(z_2). \tag{15}$$

设 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-r}$ 是 $T_{\lambda,r}$ 的特征值

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda_1}, \frac{1}{1+\lambda\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{1+\lambda\lambda_{N-r}}$$

所对应的特征向量. 则 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-r}$ 是线性无关的且两两正交. 因此 $\left\{v_i\right\}_{i=1}^{N-r}$ 是 $(M^r)^{\perp}$ 的正交基.

设

$$z_2 = \sum_{i=1}^{N-r} a_i v_i,$$

则

$$T_{\lambda,r}(z_2) = \sum_{i=1}^{N-r} a_i T v_i = \sum_{i=1}^{N-r} \frac{a_i}{1+\lambda\lambda_i} v_i.$$

根据引理 2.10, 可得

$$\begin{aligned} |T_{\lambda,r}(z_2)| &\leqslant \sum_{i=1}^{N-r}\left|\frac{a_i}{1+\lambda\lambda_i} v_i\right| \leqslant \\ &\max_{i\in\{1,2,\cdots,N-r\}}\left\{\frac{1}{1+\lambda\lambda_i}\right\}\sum_{i=1}^{N-r}|a_i v_i| \leqslant \\ &(N-r)\|z_2\| \max_{i\in\{1,2,\cdots,N-r\}}\left\{\frac{1}{1+\lambda\lambda_i}\right\} \to 0, \quad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

故

$$T_{\lambda,r}(z_2) \to 0, \quad \lambda \to \infty. \tag{16}$$

结合式(15)和(16)可得

$$T_{\lambda,r}(x) \to z_1, \quad \lambda \to \infty. \tag{17}$$

由式(14)和(17), 又有

$$T_{\lambda,r}(x) \to P(x), \quad \lambda \to \infty, \ \forall x \in R^n.$$

故

$$T_{\lambda,r} \to P, \quad \lambda \to \infty.$$ □

定理 2.11 表明 R-滤子是最小二乘方多项式法则的一个推广.

致谢 作者感谢 Azzouz Dermoune 教授的鼓励与指导.

[参 考 文 献]

[1] Hodrick R J, Prescott E C, Postwar U S. Business cycles: an empirical investigation[J]. Journal of Money, Credit, and Banking, 1997, **29**(1): 1-16.

[2] Araujo Fabio, Areosa Marta Baltar Moreira, Neto Jose Alvaro Rodrigues. R-filters: a Hodrick-Prescott filter generalization[R]. Working Paper Series, **69**, 2003, 1-37.

[3] Ehlgen J rgen. Distortionary effects of the optimal Hodrick-Prescott filter[J]. Economic Letters, 1998, **61**(3): 345-349.

[4] Razaak W. The Hodrick-Prescott technique: a smooler versus a filter. an application to New Zealand GDP[J]. Economic Letters, 1997, **57**(2): 163-168.

[5] Cogly Timothy, Nason James M. Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series. implication for business cycle research[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1995, **19**(1/2): 253-278.

[6] King Robert G, Rebelo Sergio T. Low frequency filtering and real business cycles[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1993, **17**: 207-231.

[7] Reeves J J, Blyth C A, Small J P. The Hodrick-Prescott filter, a generalization, and a new procedure for extracting an empirical cycle from series[J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Economics, 2000, **4**(1): 1-16.

[8] Baxter M, King Robert G. Measure business cycles approximate band-pass filters for economic time series[J]. The Review of Economics and Statistics, 1999, **81**(4): 575-593.

[9] Apel Mikael, Hansen Jan, Lindberg Hans. Potential output and output gap[J]. Quarterly Review of the Bank of Sweden, 1996, **3**: 24-35.

[10] Horn R, Johnson C R. Martrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

Spectral Properties and Geometric Interpretation of R-Filters

LENG Tuo

(Laboratory for Automated Reasoning and Programming, Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, P. R. China)

Abstract: Applying the Fourier analysis, the spectral properties of the R-filters are studied. Further, it was proved that R-filters is a generalization of least squares polynomial adjustment. And the geometric interpretation of R-filters was given.

Key words: R-filter; HP-filter; spectral property; Fourier analysis; Hess-matrix; operator theory