

非平稳随机激励下系统首次 穿越概率的近似解法^{*}

何 军

(上海交通大学 船建学院 土木工程系, 上海 200240)

(陈立群推荐)

摘要: 提出了非平稳 Gauss 白噪声激励下线性系统条件首次穿越概率的近似解析解。该近似解基于 VanMarcke 近似, 但是, 因为引进了随机过程和界限水平的标准化, VanMarcke 公式中的期望衰减率可由响应的二阶统计矩获得, 而不需要知道响应的相关函数或谱密度函数。给出了非平稳激励下线性系统响应的显式二阶统计矩。调制白噪声激励下单自由度线性系统的首次穿越概率分析说明了该方法的精度、效率和应用过程。

关键词: 首次穿越概率; D 类界限; 衰减率; 非平稳激励; 包络线过程

中图分类号: O29 **文献标识码:** A

引 言

在许多工程应用中, 确定方程(1)所示的随机激励下的系统首次穿越概率非常重要

$$P(t) = \int_B P(t, \mathbf{b}) f_B(\mathbf{b}) d\mathbf{b}, \quad (1)$$

其中, f_B 为界限向量 B 的联合概率密度, 而 $P(t, \mathbf{b})$ 为给定 $B = \mathbf{b}$ 下的条件首次穿越概率, \mathbf{b} 为 B 的给定值。

为了求解方程(1), 需要反复计算 $P(t, \mathbf{b})$, 而且 $P(t)$ 的值主要来自 $P(t, \mathbf{b})$ 的贡献^[1-3]。因此, 足够精确且简单地计算 $P(t, \mathbf{b})$ 非常重要。已有的近似技术可以分为 3 类: 穿越方法、Monte Carlo 模拟方法和扩散方法。前人研究表明: 无论是直接模拟还是重要抽样的计算费用都是无法忍受的^[4-5]。扩散方法是 30 年前提出的^[6], 扩散方法中需要求解控制可靠度函数的福克—普朗克—柯尔莫戈洛夫方程(Fokker-Planck-Kolmogorov equation, FPKE)。然而, FPKE 的大多数数值解都只适用于低维问题^[7-8]。

最简单的近似属于穿越方法, 它假设过程的穿越事件是独立的并构成 Poisson 过程^[9]。已证明, Poisson 过程假设对窄带过程和低界限是不恰当的。VanMarcke 提出了一个被普遍采用的改进公式, 它考虑了穿越事件的相依性和过程花费在界限之上的时间^[10]。另外, Lutes 近

* 收稿日期: 2008-05-06; 修订日期: 2008-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478017)

作者简介: 何军(1968—), 男, 河北人, 副教授, 博士(Tel: + 86-21-34206697; Fax: + 86-21-34206698; E-mail: junhe@sjtu.edu.cn)。

似^[11]、积分方程方法^[12]、Langley 近似^[13]和界限方法^[14]也可以解决同样的问题。穿越方法也用于计算非线性系统^[15]、非 Gauss 系统^[16]和多元件系统^[17]的首次穿越概率。

一般来说,目前的穿越方法都关注于平稳激励下系统的首次穿越问题,但在工程实际中,像地震地面运动和风力等系统激励往往是非平稳的。本项研究发展了一个计算非平稳随机激励下线性系统首次穿越概率的近似方法。数值算例表明了该方法的精度和效率。

1 首次穿越问题

考虑一个线性振子,其振动方程为

$$\ddot{X}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{X}(t) + \omega_n^2X(t) = F(t), \quad (2)$$

式中,常数 ω_n 和 ζ 分别代表无阻尼固有圆频率和阻尼比,而 $F(t) = A(t)W(t)$ 是非平稳随机激励,其中, $A(t)$ 是调制函数,而 $W(t)$ 是谱密度为 S_0 的白噪声过程。

响应的二阶统计矩可写为

$$\sigma_X^2(t) = 2\pi S_0 \int_0^t h^2(t-\tau)A^2(\tau)d\tau, \quad (3)$$

$$\sigma_{\dot{X}}^2(t) = 2\pi S_0 \int_0^t \dot{h}^2(t-\tau)A^2(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$c_{X\dot{X}}(t, t) = 2\pi S_0 \int_0^t h(t-\tau)\dot{h}(t-\tau)A^2(\tau)d\tau, \quad (5)$$

$$c_{X\dot{X}}(t, t) = 2S_0 \int_0^t \int_0^t \frac{h(t-\tau_1)\dot{h}(t-\tau_2)A(\tau_1)A(\tau_2)}{\tau_2 - \tau_1} d\tau_1 d\tau_2, \quad (6)$$

其中, $\sigma_X(t)$ 和 $\sigma_{\dot{X}}(t)$ 分别是 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 的标准差, $c_{X\dot{X}}(t)$ 是 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 的协方差,而 $c_{X\dot{X}}(t)$ 是 $X(t)$ 和其 Hilbert 变换:

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t h(t-\tau)A(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(s)}{\tau-s} ds d\tau \quad (7)$$

的协方差,式中 $h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) / \omega_d$ 是该振子的脉冲响应函数,其中阻尼圆频率 $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 。则导数 $\dot{X}(t)$ 为

$$\dot{\hat{X}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \dot{h}(t-\tau)A(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(s)}{\tau-s} ds d\tau. \quad (8)$$

将脉冲响应函数代入方程(6),化简后得到^[18-19]

$$c_{X\dot{X}}(t, t) = \frac{2S_0}{\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n s} \frac{\sin(\omega_d s)}{s} \int_s^t e^{-2\zeta\omega_n(t-\tau)} A(\tau-s)A(\tau) d\tau ds. \quad (9)$$

对标量 b , 经验表明,首次穿越概率 $P(t, b)$ 可以写成

$$P(t, b) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right], \quad (10)$$

式中, $\alpha(t)$ 被称为期望衰减率。如果用区间 Δt 中点处的 $\alpha(t)$ 值代替区间 Δt 上的 $\alpha(t)$ 值,则对于 t_n 有

$$P(t_n, b) = 1 - [1 - P(t_{n-1}, b)] e^{-\alpha[(n-1/2)\Delta t]\Delta t}. \quad (11)$$

方程(11)具有初始条件 $P(0, b) = 0$ 。

由 VanMarcke 公式,期望穿越率为

$$\alpha(t) = \nu_X(t, b) \frac{1 - \exp(-\nu_{\dot{X}}^+(t, b) / (\nu_X(t, b)))}{1 - \nu_{\dot{X}}^+(t, b) / (\nu_{\dot{X}}^+(t, 0))}, \quad (12)$$

式中, $\nu_X(t, b) = \nu_{\dot{X}}^+(t, b) + \nu_{\dot{X}}^-(t, -b)$ 代表响应超出安全域的期望率。由 Rice 公式^[20], 向上穿越和向下穿越的期望率分别为

$$\nu_{\dot{X}}^+(t, b) = \int_b^{\infty} (\dot{x} - b) f_{X\dot{X}}(t, b; t, \dot{x}) d\dot{x}, \quad (13)$$

$$\nu_{\dot{X}}^-(t, -b) = \int_{-\infty}^{-b} (b - \dot{x}) f_{X\dot{X}}(t, -b; t, \dot{x}) d\dot{x}, \quad (14)$$

式中, $f_{X\dot{X}}(t, x; t, \dot{x})$ 是 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 的联合概率密度函数(JPDF)。

在方程(12)中, $\nu_R^+(t, b)$ 代表包络线过程 $R(t)$ 向上穿越界限 b 的期望率。Dugundji 包络线定义为^[21]

$$R(t) = \sqrt{X^2(t) + \hat{X}^2(t)}. \quad (15)$$

类似地, 如果能够获得 $R(t)$ 和 $\dot{R}(t)$ 的联合概率密度函数 $f_{R\dot{R}}(t, r; t, \dot{r})$, 则分别用 \dot{r} 和 $f_{R\dot{R}}(t, b; t, \dot{r})$ 替换方程(13)中的 \dot{x} 和 $f_{X\dot{X}}(t, b; t, \dot{x})$, 便可计算 $\nu_R^+(t, b)$ 。

2 穿越率的计算

以标准化变量

$$Y(t) = \frac{X(t)}{\sigma_X(t)}, \quad (16)$$

$$Q(t) = \sqrt{Y^2(t) + \hat{Y}^2(t)} = \frac{R(t)}{\sigma_X(t)} \quad (17)$$

和

$$\eta(t) = \frac{b}{\sigma_X(t)} \quad (18)$$

来等效计算响应过程 $X(t)$ 和其包络线 $R(t)$ 的穿越率会更加容易一些, 式中 \hat{Y} 是 $Y(t)$ 的 Hilbert 变换。

标准化使得 $Y(t)$ 和 $\dot{Y}(t)$ 是不相关的, 则方程(13)和方程(14)可以写为因式的形式:

$$\nu_{\dot{X}}^+(t, b) = \nu_{\dot{Y}}^+(t, \eta) = \omega_0 \phi(\eta) \left[\phi\left(\frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\right) - \frac{\dot{\eta}}{\omega_0} \Phi\left(-\frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\right) \right], \quad (19)$$

$$\nu_{\dot{X}}^-(t, b) = \nu_{\dot{Y}}^-(t, \eta) = \omega_0 \phi(\eta) \left[\phi\left(\frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\right) + \frac{\dot{\eta}}{\omega_0} \Phi\left(\frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\right) \right], \quad (20)$$

式中, $\phi(\cdot)$ 和 $\Phi(\cdot)$ 分别是标准正态密度函数和标准正态分布函数, 而 $\omega_0(t)$ 为 $\dot{Y}(t)$ 的标准差

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= E[\dot{Y}^2(t)] = E\left[\left(\frac{\sigma_X(t)\dot{X}(t) - X(t)\dot{\sigma}_X(t)}{\sigma_X^2(t)}\right)^2\right] = \\ &= \frac{\sigma_{\dot{X}}^2(t)}{\sigma_X^2(t)} - 2\frac{\dot{\sigma}_X(t)}{\sigma_X^3(t)} c_{X\dot{X}}(t, t) + \frac{\dot{\sigma}_X^2(t)}{\sigma_X^4(t)}. \end{aligned} \quad (21)$$

对于正态过程, $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 是相互独立的并分别服从 Rayleigh 和正态分布^[22]:

$$f_Q(q) = q \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad (22)$$

$$f_{\dot{Q}}(\dot{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega_0^2 - \lambda^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\dot{q}^2}{\omega_0^2 - \lambda^2}\right), \quad (23)$$

式中, $\lambda(t)$ 是 $Y(t)$ 和 $\dot{Y}(t)$ 的协方差. 因为 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 是不相关的, 所以 $\hat{X}(t)$ 和 $\dot{\hat{X}}(t)$ 也是不相关的, 从而容易得到

$$\lambda(t) = E[Y(t)\dot{Y}(t)] = E\left[\frac{X(t)}{\sigma_X(t)} \frac{\sigma_X(t)\dot{\hat{X}}(t) - \hat{X}(t)\dot{\sigma}_X(t)}{\sigma_{\hat{X}}^2(t)}\right] = \frac{c_{X\dot{X}}(t, t)}{\sigma_{\hat{X}}^2(t)}. \quad (24)$$

包络线过程的穿越率则为

$$\begin{aligned} \nu_{\hat{R}}^+(t, b) &= \nu_{\dot{Q}}^+(t, \eta) = f_Q(\eta) \int_{\eta}^{\infty} (s - \eta) f_Q(s) ds = \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \eta e^{-\eta^2/2} \left[\phi\left(\frac{\eta}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right) - \frac{\eta}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \Phi\left(-\frac{\eta}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

可见, 如果能够获得方差 $\sigma_{\hat{X}}^2(t)$ 和 $\sigma_{\dot{\hat{X}}}^2(t)$, 以及协方差 $c_{X\dot{X}}(t, t)$ 和 $c_{\hat{X}\dot{\hat{X}}}(t, t)$, 那么, 就可以计算响应 $X(t)$ 的上穿率和下穿率以及包络线 $R(t)$ 的穿越率.

3 二阶统计矩的计算

对于方程(2)描述的简单振子, 响应的二阶统计矩可以写为^[18]

$$\sigma_{\hat{X}}^2(t) = \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} (I_3 - I_1), \quad (26)$$

$$\sigma_{\dot{\hat{X}}}^2(t) = \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} [(\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2) I_1 - 2\zeta \omega_n \omega_d I_2 + \omega_n^2 I_3], \quad (27)$$

$$c_{X\dot{X}}(t, t) = \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} (\zeta \omega_n I_1 + \omega_d I_2 - \zeta \omega_n I_3), \quad (28)$$

式中

$$I_1 = \int_0^t e^{-2\zeta\omega_n(t-\tau)} \cos[2\omega_n(t-\tau)] A^2(\tau) d\tau, \quad (29)$$

$$I_2 = \int_0^t e^{-2\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[2\omega_n(t-\tau)] A^2(\tau) d\tau, \quad (30)$$

$$I_3 = \int_0^t e^{-2\zeta\omega_n(t-\tau)} A^2(\tau) d\tau. \quad (31)$$

对于特殊的调制函数

$$A(t) = Ct^m e^{-Bt}, \quad (32)$$

式中, B 和 C 为实的且为正的模型常数, $2m$ 为正整数, 则有

$$I_1 = C^2 \left\{ e^{-2Bt} \sum_{k=1}^{n+1} [D_k \cos(k\theta)] - e^{-2\zeta\omega_n t} \frac{(-1)^n n!}{\chi^{n+1}} \cos[2\omega_d t - (n+1)\theta] \right\}, \quad (33)$$

$$I_2 = C^2 \left\{ -e^{-2Bt} \sum_{k=1}^{n+1} [D_k \sin(k\theta)] - e^{-2\zeta\omega_n t} \frac{(-1)^n n!}{\chi^{n+1}} \sin[2\omega_d t - (n+1)\theta] \right\}, \quad (34)$$

$$I_3 = C^2 \left\{ e^{-2Bt} \sum_{k=1}^{n+1} [E_k(t)] - e^{-2\zeta\omega_n t} \frac{(-1)^n n!}{\gamma^{n+1}} \right\}, \quad (35)$$

其中, $n = 2m$, 以及

$$\gamma = 2\zeta\omega_n - 2B, \quad (36)$$

$$\chi = |\gamma - 2i\omega_d|, \quad (37)$$

$$\theta = \arg(\gamma - 2i\omega_d), \quad (38)$$

$$D_k(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{\chi^k} \frac{n!}{(n-k+1)!} t^{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad (39)$$

$$E_k(t) = \left(\frac{\chi}{\gamma}\right)^k D_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n + 1. \tag{40}$$

下面的算例将给出 $c_{\chi\chi}(t, t)$ 的近似解。

4 算例

4.1 算例 1

假设调制函数 $A(t) = 1 (t \geq 0)$ 。则方程(33)至(40)给出

$$I_1 = e^{-2\zeta\omega_n t} \left[-\frac{\zeta}{2\omega_n} \cos(2\omega_d t) + \frac{\omega_d}{2\omega_n^2} \sin(2\omega_d t) \right] + \frac{\zeta}{2\omega_n}, \tag{41}$$

$$I_2 = e^{-2\zeta\omega_n t} \left[-\frac{\zeta}{2\omega_n} \sin(2\omega_d t) - \frac{\omega_d}{2\omega_n^2} \cos(2\omega_d t) \right] + \frac{\zeta}{2\omega_n^2}, \tag{42}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\zeta\omega_n} (1 - e^{-2\zeta\omega_n t}). \tag{43}$$

将方程(41)至(43)代入方程(26)至(28),则得到 $\sigma_{\chi}^2(t), \sigma_{\dot{\chi}}^2(t)$ 和 $c_{\chi\chi}(t, t)$ 。在将 $A(t) = 1$ 代入方程(9)并引入小阻尼近似后,协方差 $c_{\chi\chi}(t, t)$ 可以写为^[19]

$$c_{\chi\chi}(t, t) \approx \sigma_S^2 \omega_n \left[(1 - e^{-2\zeta\omega_n t}) - \frac{2\zeta}{\pi} (1 + e^{-2\zeta\omega_n t}) \right], \tag{44}$$

式中, $\sigma_S^2 = S_0\pi/(2\zeta\omega_n^3)$ 代表极限平稳响应的方差值。

图 1 和图 2 表示了 $\alpha(t)$ 的解析解,并与 Lutes 结果进行了比较。图 3 和图 4 表示了 $P(t, b)$ 的解析解,并与 Lutes 结果及模拟结果进行了比较。可以看出:本文方法与 Lutes 近似及模拟方法吻合得很好。

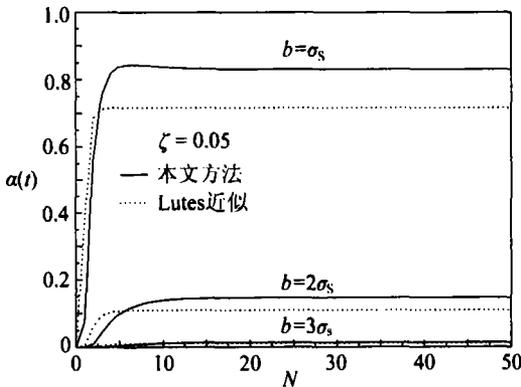


图 1 作为循环数 $N = \omega_n t / \pi$ 的函数的期望衰减速率

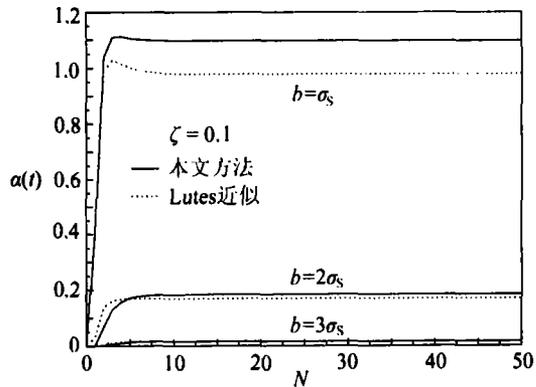


图 2 作为循环数 $N = \omega_n t / \pi$ 的函数的期望衰减速率

4.2 算例 2

在这个算例中,调制函数具有方程(32)的形式,且 $m = 1$:

$$A(t) = Ct e^{-Bt}, \tag{45}$$

该调制函数曾用于建立非平稳地震动地面运动模型。3 个基本积分变为

$$I_1 = C^2 \left\{ e^{-2Bt} \left[\frac{t^2 \cos(\theta)}{\chi} - \frac{2t \cos(2\theta)}{\chi^2} + \frac{2 \cos(3\theta)}{\chi^3} \right] - \frac{2e^{-2\zeta\omega_n t} \cos(3\theta - 2\omega_d t)}{\chi^3} \right\}, \tag{46}$$

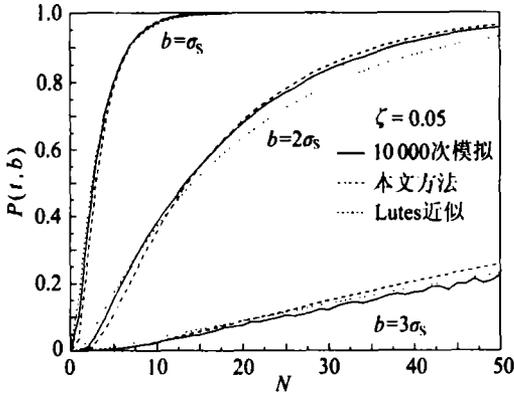


图3 作为循环数 $N = \omega_n t / \pi$ 的函数的条件首次穿越概率

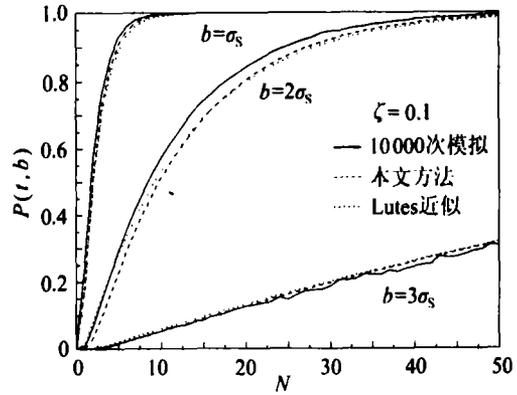


图4 作为循环数 $N = \omega_n t / \pi$ 的函数的条件首次穿越概率

$$I_2 = C^2 \left\{ -e^{-2Bt} \left[\frac{t^2 \sin(\theta)}{\chi} - \frac{2t \sin(2\theta)}{\chi^2} + \frac{2 \sin(3\theta)}{\chi^3} \right] + \frac{2e^{-2\zeta \omega_n t} \sin(3\theta - 2\omega_d t)}{\chi^3} \right\}, \quad (47)$$

$$I_3 = C^2 \left\{ e^{-2Bt} \left[\left(\frac{t^2}{\gamma} - \frac{2t}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^3} \right) - \frac{2e^{-2\zeta \omega_n t}}{\gamma^3} \right] \right\}, \quad (48)$$

由此并利用方程(26)至(28)可以计算 $\sigma_X^2(t)$, $\sigma_{\dot{X}}^2(t)$ 和 $c_{X\dot{X}}(t, t)$.

可以得到 $c_{X\dot{X}}(t, t)$ 的近似解^[19]:

$$c_{X\dot{X}}(t, t) \approx \omega_n \sigma_X^2 - \frac{2\zeta \omega_n}{\pi} \sigma_S^2 C^2 \left(t^2 e^{-2Bt} + \frac{2e^{-2\zeta \omega_n t}}{3\omega_n^2} \right). \quad (49)$$

假设 $B = 0.15\pi$, 则有 $C = Be = 1.281$, 此时, 在 $t = 1/B = 2.122$ s 时 $A(t)$ 出现最大值 1. 由本文方法计算的条件首次穿越概率示于图 5 和图 6 中, 图中同时表示出了模拟结果. 图 5 和图 6 表明, 本文方法的计算结果与模拟结果吻合良好, 并且随着 N 的增大, 本文方法的结果与模拟结果都收敛于相同的常数, 而两者的最大绝对误差小于 5%, 在工程允许的范围

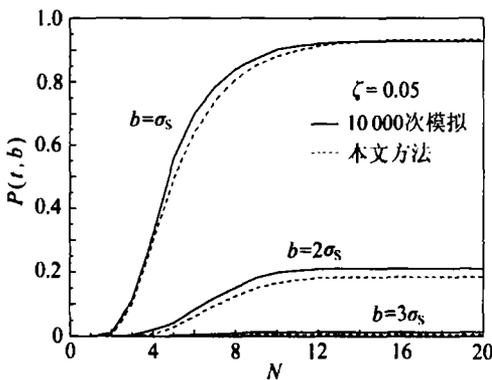


图5 $\zeta = 0.05$ 时的条件首次穿越概率

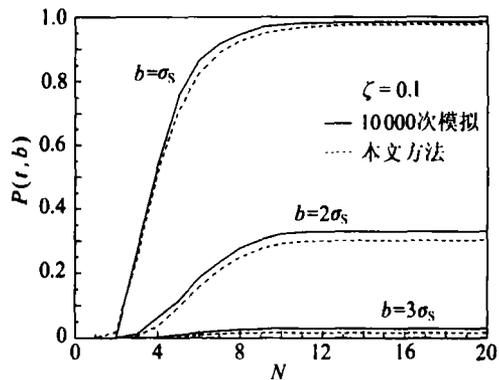


图6 $\zeta = 0.1$ 时的条件首次穿越概率

5 结 语

本文发展了一个计算非平稳激励下线性系统条件首次穿越概率的近似方法. 虽然该近似方法中的期望衰减率由 VanMarcke 公式计算, 但是不需要知道响应的相关函数或谱密度函数, 而只需要知道响应的方差、响应导数的方差、响应与其导数的协方差以及响应与其 Hilbert 变

换的协方差,而这些二阶统计矩显式解更容易获得.因此,本文发展的近似方法能够计算非平稳激励下线性系统的条件首次穿越概率.

论文进行了两个算例分析,这两个算例分别考虑了两类不同的调制函数.数值结果与 Lutes 近似结果或模拟结果进行了对比,分析表明,本文方法具有良好的计算精度和运算效率.

致谢 作者衷心感谢评阅人对本文所提出的建议和修改意见.

[参 考 文 献]

- [1] Wen Y K, Chen H C. System reliability under time varying loads: I [J]. *Internat J Engng Mech ASCE*, 1989, **115**(4): 808-823.
- [2] Beck A T, Melchers R E. On the ensemble crossing rate approach to time variant reliability analysis of uncertain structures[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 2004, **19**(1): 9-19.
- [3] Polidori D C, Beck J L, Papadimitriou C. New approximations for reliability integrals[J]. *Internat J Engng Mech ASCE*, 1999, **125**(4): 466-475.
- [4] Bayer V, Bucher C. Importance sampling for the first passage problems of nonlinear structures[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 1999, **14**(1): 27-32.
- [5] Au S K, Beck J L. First excursion probability for linear system by very efficient important sampling [J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 2001, **16**(2): 193-207.
- [6] Roberts J B. First-passage probability for randomly excited systems: diffusion methods[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 1986, **1**(1): 66-81.
- [7] Proppe C, Pradlwarter H J, Schuëller G I. Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 2003, **18**(1): 1-15.
- [8] Zhu W Q, Deng M L, Huang Z L. First-passage failure of quasi-integrable Hamiltonian systems[J]. *Internat J Appl Mech ASME*, 2002, **69**(2): 274-282.
- [9] Coleman J J. Reliability of aircraft structures in resisting change failure[J]. *Internat J Operations Reserch*, 1959, **7**(4): 639-645.
- [10] VanMarcke E H. On the distribution of the first-passage time for normal stationary random process [J]. *Internat J Appl Mech ASME*, 1975, **42**(2): 215-220.
- [11] Lutes L D, Chen Y T, Tzuang S H. First-passage approximations for simple oscillators[J]. *Internat J Engng Mech Div ASCE*, 1980, **106**(EM6): 1111-1124.
- [12] Madsen P H, Krenk S. An integral equation method for the first-passage problem in random vibration [J]. *Internat J Appl Mech ASME*, 1983, **51**(3): 674-679.
- [13] Langley R S. A first passage approximation for normal stationary random processes[J]. *J Sound Vibration*, 1988, **122**(2): 261-275.
- [14] Englund S, Rackwitz R, Lange C. Approximations of first-passage times for differentiable processes based on high-order threshold crossings[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 1995, **10**(1): 53-60.
- [15] Naess A, Karlsen H C. Numerical calculation of the level crossing rate of second order stochastic Volterra systems[J]. *Internat J Probab Engng Mech*, 2004, **19**(2): 155-160.
- [16] 何军. 非 Gauss 随机特性下的结构首次失效时间研究[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(11): 1325-1332.
- [17] Song J, Kiureghian A D. Joint first-passage probability and reliability of systems under stochastic excitation[J]. *Internat J Engng Mech ASCE*, 2006, **132**(1): 65-77.
- [18] Iwan W D, Hou Z K. Explicit solutions for the response of simple systems subjected to nonstationary random excitation[J]. *Internat J Struct Saf*, 1989, **6**(2/4): 77-86.

- [19] Michaelov G, Sarkani S, Lutes L D. Spectral characteristic of nonstationary random processes response of a simple oscillator[J]. *Internat J Struct Saf*, 1999, 21(2): 245-267.
- [20] Rice S O. Mathematical analysis of random noise[J]. *Bell System Technical Journal*, 1944, 2: 282-332. [Re-published In: N Wax, Ed. *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* [C]. New York: Dover, 1954].
- [21] Langley R S. On various definitions of the envelope of a random process[J]. *J Sound Vibration*, 1986, 105(3): 503-512.
- [22] Krenk S, Madsen H O, Madsen P H. Stationary and transient response envelopes[J]. *Internat J Engng Mech ASCE*, 1983, 109(1): 263-278.

Approximation for the First Passage Probability of Systems Under Nonstationary Random Excitation

HE Jun

(*Department of Civil Engineering, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P. R. China*)

Abstract: An approximate method is presented for obtaining analytical solutions for the conditional first passage probability of systems under modulated white noise excitation. The method is based on VanMarcke's approximation, however, because the normalization of the response was introduced, the expected decay rates can be evaluated from the second-moment statistics instead of the correlation functions or spectrum density functions of the response of considered structures. Explicit solutions for the second-moment statistics of the response were given. The accuracy, efficiency and usage of the proposed method were demonstrated by the first passage analysis of single-degree-of freedom (SDOF) linear systems under two special types of modulated white noise excitations.

Key words: first passage probability; D-type barrier; decay rate; nonstationary excitation; envelope process