

黏性流体与热弹性微极蜂窝结构介质 界面上受倾斜荷载作用时的 弹性动力分析*

R·库玛, R·R·古泊塔

(库鲁克西察大学 数学系, 库鲁克西察 136 119, 印度)

(陈立群推荐)

摘要: 研究倾斜荷载作用在黏性流体与热弹性微极蜂窝结构固体界面上时, 荷载倾斜角的影响. 假设倾斜荷载是法向荷载和切向荷载的线性组合. 为求解该问题, 对时间变量进行 Laplace 变换, 对空间变量进行 Fourier 变换. 通过引入势函数, 获得了变换域中应力、温度分布和压力的表达式. 利用数值逆变换技术, 求得问题的物理解. 同时, 得到了频域中的表达式, 以及变量适当变化时稳态情况下的表达式. 用图形显示不同荷载源和荷载倾角变化时的响应. 并且讨论了一些特殊情况.

关键词: 黏性流体; 热弹性微极蜂窝结构材料; 倾斜荷载; 时谐; 稳定态

中图分类号: O343. 8; O343. 6; O33 **文献标识码:** A

引 言

在经典弹性理论中, 研究外激励作用下材料的力学性能时, 是不考虑材料微极结构的. 但是在研究孔隙和裂纹附近的应力集中时, 发现经典理论和试验结果是相矛盾的, 特别是在含分层的材料、颗粒料、纤维材料中. 这一矛盾说明了, 外激励下的材料响应与材料内部结构的运动有关. 因此, Eringen^[1]提出了微极弹性理论, 消除了经典弹性理论和试验结果之间的矛盾, 特别是当材料的微极结构对物体的全部变形有着明显的贡献时, 例如, 带粒状的微极结构, 如象聚合物、人骨. 这一点对当代先进材料的设计和制造益发重要, 在这类材料的综合机械性能预测中, 小尺度的影响非常重要.

自然界中经常发现带有细胞状微结构的材料. 天然材料, 例如木材、软木和疏质骨; 人造材料, 例如金属蜂窝材料和泡沫材料, 都是熟知的细胞状微结构固体. 通常, 这些材料具有相互连接的网状的结构(开胞)或板(闭胞)组成的微结构. 工业上, 合成的多孔材料日益广泛地应用于轻型、高强度结构, 或者在它使用期间需要吸收能量的结构. 多孔材料有着其他一些非常诱人的非结构性特点, 如优异的介电性能以及低下的导热率和导电率. 根据这一特性, 可以

* 收稿日期: 2008-03-18; 修订日期: 2008-12-26

作者简介: Rajneesh Kumar, 教授(联系人, E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com).

本文原文为英文, 黄绍红译, 张禄坤校.

生产出不同传导梯度的材料。为分析这类材料的力学性能,通常将这类材料分为二维多孔固体(蜂窝状材料)和三维多孔材料(泡沫材料)。蜂窝结构材料的平面变形包括胞壁的弯曲和拉伸。因此,在一规则的蜂窝结构中,任一细胞的周界上,有弯矩以及法向力和切向力作用在该细胞壁上。在蜂窝结构材料的均质连续介质模型中,除正应力和切应力之外,细胞边界上的这些应力合成为应力偶。已有大量的文献研究了这类固体的几何、力学、热学和电学特性,文献[2-7]值得关注。

工程上广泛应用的多孔蜂窝状结构,由于其强度/重量比高而在航空、自动化和土木领域中得到广泛地应用。在实际分析中,蜂窝结构材料是作为一种与正交各向异性特性等效的均质材料处理的,并有一个比该蜂窝结构材料密度小的等效密度。因此,对于材料设计来说,正确地评价这些等价的力学性能十分重要。流/固界面处的变形有着广泛的应用。其应用遍及地球物理问题到机械结构的定量无损评估,以及医疗服务中的声学断层术。在很多情况下,用某一种模型得到的理论结果为指导,来解释实际情况复杂得多的试验数据。最好的做法是:“在假定环境的数值试验中,改变输入端的地声学参数,在输出端获得相应的结果”。

本文研究不同类型的荷载源,作用在黏性流体和均质、热弹性、微极蜂窝结构固体界面上时,应力分量和温度分布的确定。利用积分变换技术求解。用数值方法求积分的逆变换。当研究参数适当地变化时,求得频域和稳态情况时的解。本文的结果可以广泛地应用于含有温度变化的地球物理问题。其物理应用包括力学、地球物理学和工业活动。当潜艇在接近海底表面运动时,潜艇运动引起覆盖着海水(作为黏性流体)的地球表面的变形,就是本文的一个应用。

1 基本方程

在均质、热弹性、微极蜂窝结构固体(介质 I)上,覆盖着黏性流体(介质 II)。建立直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) , 坐标原点在界面 $x_2 = 0$ 上, x_2 -轴竖直指向介质 I。

根据 Yang 和 Huang^[8], Lord 和 Shulman^[9] 的研究,不考虑体力、体力偶和热源时,热弹性、微极蜂窝结构材料的场方程和本构关系为

$$(\lambda + 2\mu^* + K) \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu^* + K) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + K \nabla \cdot \nabla \phi - \beta \nabla \cdot T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \nabla \cdot (\nabla \cdot \phi) - \gamma \nabla \times \nabla \times \phi + K \nabla \cdot \mathbf{u} - 2K\phi = \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$K^* \nabla \cdot \nabla T = \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] (\rho C^* + \beta T_0 \nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

$$t_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + (\mu^* + K) u_{j,i} + \mu^* u_{i,j} - K \epsilon_{ijk} \phi_k - \beta T \delta_{ij}, \quad (4)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{k,k} \delta_{ij} + \gamma \phi_{j,i} + \beta \phi_{i,j}, \quad (5)$$

其中, λ 和 μ^* 为常用的 Lam 常数, $\mu = \mu^* + K/2$, 而 K, α, β, γ 为新的微极常数(在经典力学中均为 0), $\beta = (\lambda + 2\mu^* + K) \alpha_1$, α_1 为线性热膨胀系数, ρ 为密度, j 为微惯性, K^* 为导热系数, \mathbf{u} 为位移矢量, ϕ 为微转动矢量, T 为绝对温度, C^* 为常应变时的比热容, τ_0 为热松弛时间, t_{ij} 为应力张量分量, m_{ij} 为应力偶张量分量, δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

根据 Fehler 的文献[10], 黏性流体方程为

$$\left[K^0 + \frac{4}{3} \eta^0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{div}(\text{div} \mathbf{u}^0) - \eta^0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \times \text{rot} \times \mathbf{u}^0 = \rho^0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^0}{\partial t^2}, \quad (6)$$

其中, K^0 为体积模量, η^0 为流体黏度, ρ^0 为流体密度, \mathbf{u}^0 为黏性流体的位移矢量.

黏性流体的应力-位移关系为

$$\tau_{mn} = \left[K^0 - \frac{2}{3} \eta^0 \frac{\partial}{\partial t} \right] u_{k,k}^0 \delta_{mn} + \eta^0 \frac{\partial}{\partial t} (u_{m,n}^0 + u_{n,m}^0), \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (7)$$

对于二维问题, 所有的量依赖空间坐标 x_1, x_2 和时间 t , 假设介质 I 中的位移矢量 \mathbf{u} 和微转动矢量 ϕ , 以及介质 II 中的位移矢量 \mathbf{u}^0 如下:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0), \quad \phi = (0, 0, \phi_3), \quad \mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, 0). \quad (8)$$

为计算方便, 引入无量纲变量:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\omega^*}{c_1} x_i, \quad u'_i = \frac{\rho c_1 \omega^*}{\beta_1 T_0} u_i, \quad u'_{i^0} = \frac{\rho c_1 \omega^*}{\beta_1 T_0} u_{i^0}, \quad t'_{ij} = \frac{t_{ij}}{\beta_1 T_0}, \\ m'_{ij} &= \frac{\omega^*}{c_1 \beta_1 T_0} m_{ij}, \quad \phi'_3 = \frac{A_{11}}{\beta_1 T_0} \phi_3, \quad t' = \omega^* t, \quad \tau'_0 = \omega^* \tau_0, \end{aligned}$$

其中

$$\omega^* = \frac{\rho c_1^2}{K_1}, \quad c_1^2 = \frac{A_{11}}{\rho}. \quad (9)$$

两种介质中的位移分量, 利用势函数 $\phi, \psi, \phi^0, \psi^0$ 表示为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \\ u_1^0 = \frac{\partial \phi^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^0}{\partial x_2}, & u_2^0 = \frac{\partial \phi^0}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^0}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (10)$$

应用 Laplace 变换和 Fourier 变换

$$f(x_1, x_2, p) = \int_0^\infty f(x_1, x_2, t) e^{-pt} dt, \quad (11)$$

$$f(\xi, x_2, p) = \int_{-\infty}^\infty f(x_1, x_2, p) e^{i\xi x_1} dx_1. \quad (12)$$

初值条件如下:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & \psi(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \phi^0(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \phi^0}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & \psi^0(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \psi^0}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \phi_3(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & T(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

并假定当 $x_2 \rightarrow \pm \infty$ 时, $\phi, \psi, \phi^0, \psi^0, \phi_3, T$ 及其对于 x_1 的一阶偏导数趋于 0.

2 时 域

假设倾斜荷载 P_0 作用在黏性流体和热弹性微极蜂窝结构介质的界面上, 沿着 x_3 - 轴, 与 x_2 - 轴成 θ 角, 每单位长度的强度为 P_0 ,

$$P_1 = P_0 \sin \theta, \quad P_2 = P_0 \cos \theta, \quad (13)$$

其中法向分量 P_2 作用在 $x_2 = 0$ 界面上, 沿着 x_2 - 轴的正方向, 其切向分量 P_1 沿着 x_1 - 轴的正方向作用在原点(见图 1).

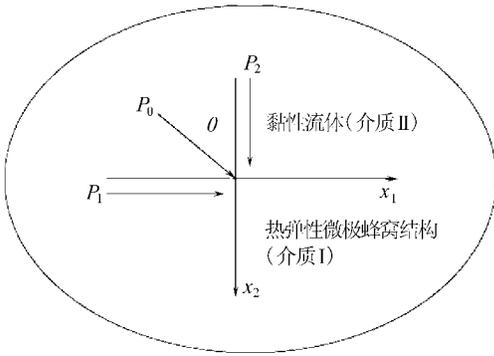


图1 作用在热弹性微极蜂窝结构材料(介质 I)和黏性流体(介质 II)界面上的倾斜荷载

将方程(4)、(5)、(7)~(12)代入方程(1)~(3)和(6),得到 (ϕ_3, ψ) , (ϕ, T) 和 (ϕ^0, ψ^0) 的一组6个微分方程的方程组:

$$\begin{cases} (\phi_3, \psi) = \sum_{i=1}^2 A_i(1, r_i) e^{-q_i x_2}, \\ (\phi, T) = \sum_{i=3}^4 A_i(1, r_i) e^{-q_i x_2}, \\ (\phi^0, \psi^0) = (A_1' e^{q_1' x_2}, A_2' e^{q_2' x_2}), \end{cases} \quad (14)$$

其中 $A_i (i = 1, \dots, 4)$, A_1', A_2' 为由边界条件决定的待定常数,且

$$q_{1,2}^2 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

$$q_{3,4}^2 = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2},$$

$$q_1'^2 = \xi^2 + \frac{3\rho^0 c_1^2 p^2}{3K^0 + 4\Gamma^0 \omega^* p}, \quad q_2'^2 = \xi^2 + \frac{\rho^0 c_1^2 p^2}{\Gamma^0 \omega^*},$$

$$r_{1,2} = -\frac{(\mu^* + K)}{K} \left[q_{1,2}^2 - \xi^2 - \frac{\rho c_1^2 p^2}{(\mu^* + K)} \right],$$

$$r_{3,4} = (q_{3,4}^2 - p^2 - \xi^2), \quad A = -(\xi^2 + a + b), \quad a = \xi^2 + \frac{\rho p^2}{\gamma} + \frac{2K}{\gamma \omega^{*2}},$$

$$B = -ab, \quad b = \frac{pA_{11}}{\mu^* + K} - \frac{K^2}{\gamma \omega^{*2} (\mu^* + K)},$$

$$C = -(2\xi^2 + \tau_0 p^2 + p + p^2 + \varepsilon(p + \tau_0 p^2)),$$

$$D = (\xi^2 + p^2)(\xi^2 + p + \tau_0 p^2) + \xi^2 \varepsilon(p + \tau_0 p^2).$$

该解满足发散条件,当 $x_2 > 0$ 时, $\psi, \phi_3, \phi, T \rightarrow 0$, 而当 $x_2 < 0$ 时, $\phi^0, \psi^0 \rightarrow 0$.

在时域中, $x_2 = 0$ 面上的边界条件为

$$\begin{cases} t_{22} = \tau_{22} - P_2 \psi(x_1, t), \quad t_{21} = \tau_{21} - P_1 \psi(x_1, t), \\ m_{23} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad u_1 = u_1^0, \quad u_2 = u_2^0, \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\psi(x_1, t)$ 为已知函数,在下一节中定义.

对边界条件(15)应用式(11)和(12)给出的Laplace变换和Fourier变换,并利用方程(4)、(5)、(7)和(14),得到变换的应力分量和温度分布为

$$\begin{cases} (t_{22}, t_{21}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \Delta_i(a_i, a_{i+6}) e^{-q_i x_2}, \\ (\tau_{22}, \tau_{21}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=5}^6 \Delta_i(-a_i, a_{i+6}) e^{-q_i x_2}, \\ (m_{23}, T) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 (-\Delta_i r_i q_i \gamma e^{-q_i x_2}, \Delta_{i+2} r_{i+2} e^{-q_{i+2} x_2}), \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$a_{1,2} = i\xi(\lambda - \rho c_1^2) q_{1,2}, \quad a_{3,4} = -\xi^2 + \rho c_1^2 q_{3,4}^2 - \beta_{1,2}$$

$$a_5 = -q_1'^2 + \xi^2(K^0 - \frac{2}{3}\Gamma^0 p), \quad a_6 = K^0 - 1 - \frac{2}{3}\Gamma^0 p,$$

$$\begin{aligned}
 a_{7,8} &= \mu^* \xi^2 + (\mu^* + K) q_{1,2}^2 + Kr_{1,2}, \quad a_{9,10} = (2\mu^* + K) i\xi q_{3,4}, \\
 a_{11} &= i\xi q_1' (\Pi^0 p + 1), \quad a_{12} = -(\xi^2 + p \Pi^0 q_2^2), \\
 \Delta &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ r_1 q_1 & r_2 q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 q_3 & r_4 q_4 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & i\xi & i\xi & i\xi & -q_2' \\ i\xi & i\xi & -q_3 & -q_4 & -q_1' & -i\xi \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

且 $\Delta_i (i = 1, \dots, 6)$ 用

$$[-P_2 \phi(\xi, p) \quad -P_1 \phi(\xi, p) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (17)$$

替换 Δ 第 i 列得到.

3 应用

在下述情况下取 $\eta(t) = H(t)$, 其关于 t 的 Laplace 变换为

$$\eta(p) = \frac{1}{p}. \quad (18)$$

3.1 集中力

为了得到集中力作用下的法向应力、切向应力、切向应力偶和温度分布, 我们取

$$\phi(x_1, t) = \Psi(x_1) \eta(t), \quad (19)$$

其中 $\Psi(x_1) = \delta(x_1)$ 为 Dirac δ 函数. 对方程(19)应用式(11)和(12)定义的 Laplace 变换和 Fourier 变换后, 得到

$$\phi(\xi, p) = \eta(p). \quad (20)$$

3.2 均布力

为了得到作用在平面边界 $x_2 = 0$ 上, 分布在无量纲宽度为 $2a$ 的带状荷载时的解, 取 $\phi(x_1, t) = \Psi(x_1) \eta(t)$, 其中

$$\Psi(x_1) = H(x_1 + a) - H(x_1 - a), \quad (21)$$

于是得到

$$\phi(\xi, p) = \frac{2\sin(\xi a)}{\xi} \eta(p), \quad \xi \neq 0. \quad (22)$$

3.3 移动力

在 $x_2 = 0$ 面上, 为得到沿着 x_1 轴以无量纲匀速 V 移动的力作用时的解, 在方程(19)中取

$$\phi(x_1, t) = \delta(x_1 - Vt) \eta(t), \quad (23)$$

然后对方程(23)应用方程(11)和(12)定义的 Laplace 变换和 Fourier 变换, 并考虑到方程(18)得

$$\phi(\xi, p) = \frac{1}{p - i\xi V}. \quad (24)$$

将式(20)、(22)、(24)替换方程(17)中的 $\phi(\xi, p)$, 并利用方程(18), 即分别得到集中力、分布力和移动力作用下, 时域中的应力和温度分布的表达式.

4 频域

此时, 我们假设时间是谐和变化的:

$$(u_1, u_2, \phi_3, T)(x_1, x_2, t) = (u_1, u_2, \phi_3, T)(x_1, x_2) e^{i\omega t}. \quad (25)$$

在频域中, $x_2 = 0$ 界面上的边界条件为

$$\begin{cases} t_{22} = \tau_{22} - P_2 \Psi(x_1) e^{i\omega t}, & t_{21} = \tau_{21} - P_1 \Psi(x_1) e^{i\omega t}, \\ m_{23} = 0, & \frac{\partial T}{\partial y} = 0, & u_1 = u_1^0, & u_2 = u_2^0, \end{cases} \quad (26)$$

其中, $\Psi(x_1)$ 为第 3 节定义的函数.

频域中的法向应力、切向应力、切向应力偶和温度分布的表达式如下得到: 在式(16)、(17)中, 对集中力, 用 $i\omega$ 替换时域中的 p ; 对均布力, 用 $e^{i\omega t}$ 替换时域中的 $\eta(p)$.

在 $x_2 = 0$ 面上, 沿 x_1 - 轴正向, 以无量纲匀速 V 移动的动谐和力作用时的解, 通过用 $\delta(x_1 - Vt)$ 替换 $\phi(x_1, t)$ 得到, 其关于 x_2 的 Fourier 变换为 $e^{i\xi t}$.

5 稳 态

考虑荷载沿着 x_1 - 轴的负方向, 以无量纲常速度 U 移动, 稳态则常常被假定为在该荷载的邻域, 观测者看到有着相同方向相同速度的荷载在移动. 根据 Fung 的文献[11], 将 Galilean 变换

$$x_1^* = x_1 + Ut, \quad x_2^* = x_2, \quad t^* = t$$

引入无量纲方程, 则方程(14)中的 $\phi(x_1, t)$ 取为 $\phi(x_1^*)$ 的形式:

$$\phi(x_1^*) = \begin{cases} \delta(x_1^*), & \text{集中力,} \\ H(x_1^* + a) - H(x_1^* - a), & \text{均布力.} \end{cases} \quad (27)$$

对边界条件(15)应用方程(12)定义的 Fourier 变换, 用式(27)替换 $\phi(x_1, t)$, 并按时域情况相同步骤, 当集中力和均布力作用时, 在式(15)和(16)中, 用 $-i\xi U$ 替换 p , 可以得到稳态情况的法向应力、切向应力、切向应力偶和温度分布的表达式.

6 特殊情况

(a) 在应力和温度分布表达式中, 取 $\mu^* = \mu$, 可以得到黏性流体/热弹性微极固体界面上对应量的表达式.

(b) 若流体黏度为 0, 或假设为 0, 则流体不可能承受剪切. 固体中与流体接触处的剪应力必然消失. 固体可以平行于流-固界面滑动, 因而少了位移 u_2^0 条件. 忽略半空间表面上的黏性流体, 根据作用在 $x_2 = 0$ 平面上的不同荷载, 得到热弹性微极蜂窝结构固体中的应力和温度分布的表达式.

7 数值解和讨论

我们选用铝-环氧树脂复合材料作为热弹性微极固体(介质 I), 汽油作为粘性流体(介质 II), 进行数值计算. 介质 I 材料常数为^[13]

$$\begin{aligned} \rho &= 2.19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & \lambda &= 7.59 \times 10^9 \text{ N/m}^2, & \mu &= 1.89 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \\ K &= 0.0149 \times 10^9 \text{ N/m}^2, & \gamma &= 0.0268 \times 10^5 \text{ N}, & K^* &= 2.508 \text{ J/(m} \cdot \text{s} \cdot \text{K)}, \\ C^* &= 961 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, & j &= 0.196 \times 10^{-4} \text{ m}^2, & \tau_0 &= 0.02 \text{ s}, & T &= 296 \text{ K}. \end{aligned}$$

介质 II 的物理常数为^[14]

$$\rho^0 = 0.68 \text{ kg/m}, \quad \eta^0 = 0.292 \times 10^{-2} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}, \quad K^0 = 0.958 \times 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

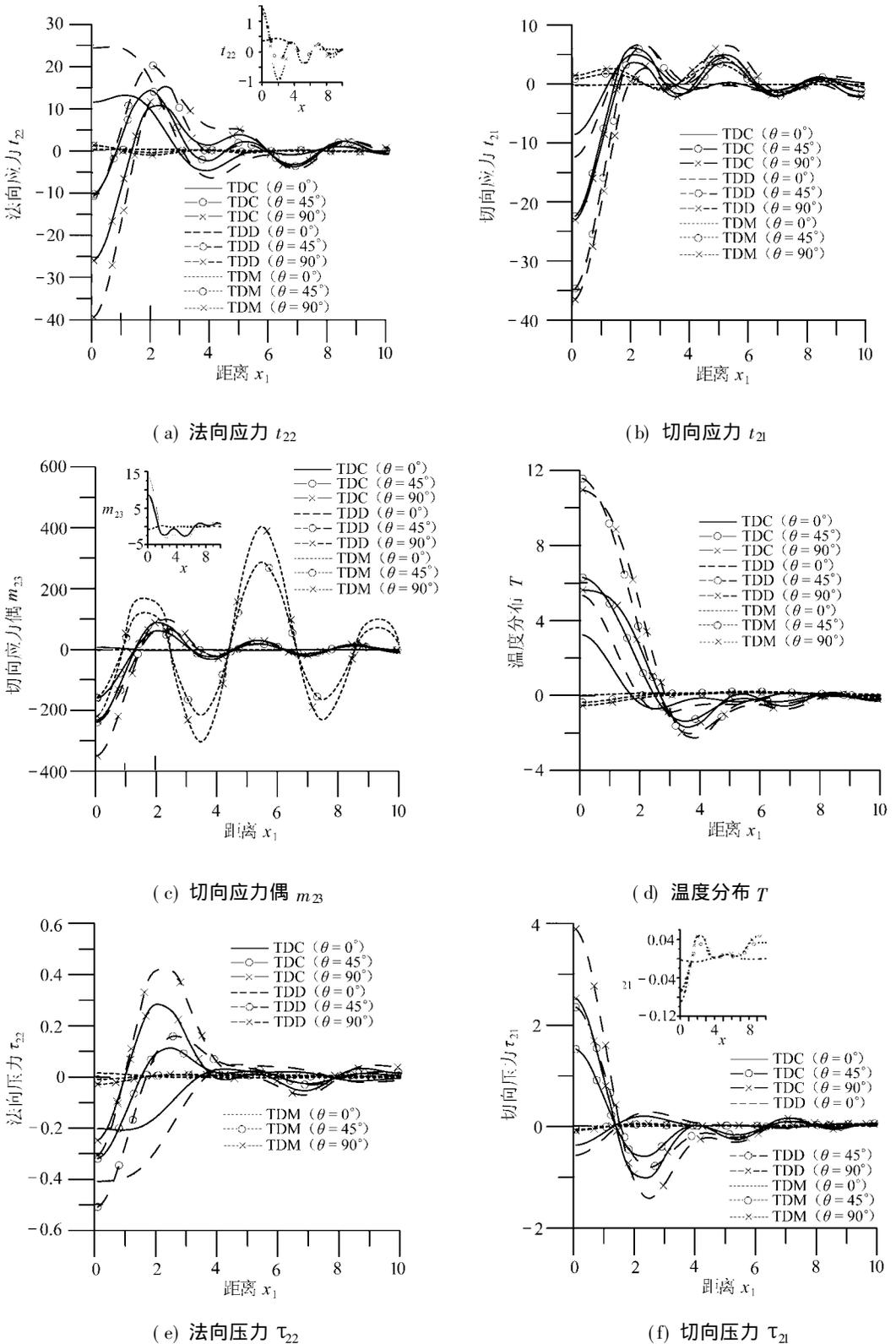
图2 时域中黏性流体应力、温度分布和压力随 x_1 的变化

图 2~ 4 示出, 在同一个无量纲宽度和同一个无量纲速度 $V = 1$ 下, 应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化. 我们用 TD 表示时域、FD 表示频域、SS 表示稳态, 图中: (a) 实线, 无论中间是否带符号, 表示受集中力(C)作用; (b) 虚线, 无论中间是否带符号, 表示受均布力(D)作用; (c) 短虚线, 无论中间是否带符号, 表示受移动力(M)作用.

同时, 实线和虚线对应于 $\theta = 0^\circ$ 时的变化, 中间带“°”的实线和虚线对应于 $\theta = 45^\circ$ 时的变化, 中间带“×”的实线和虚线对应于 $\theta = 90^\circ$ 时的变化.

图 2 给出了受集中力、分布力和移动力作用时, 时域(TD)中黏性流体的应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化.

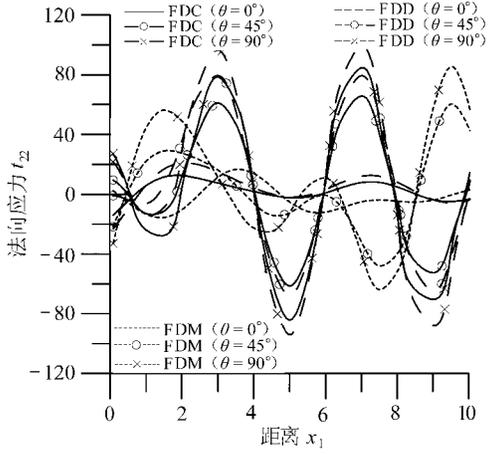
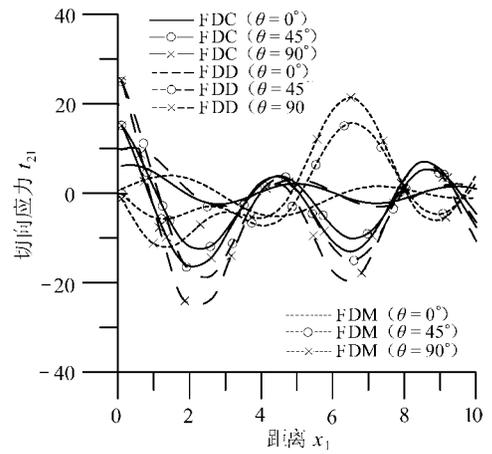
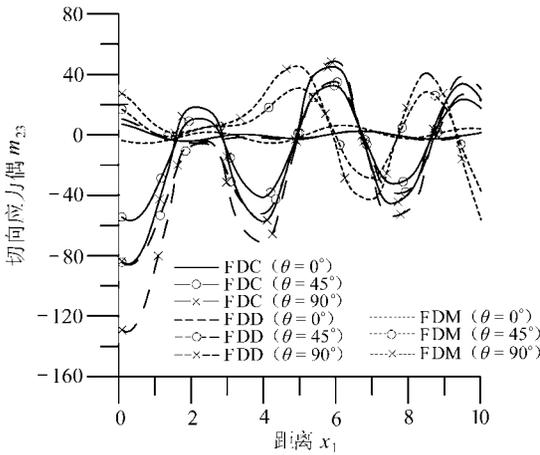
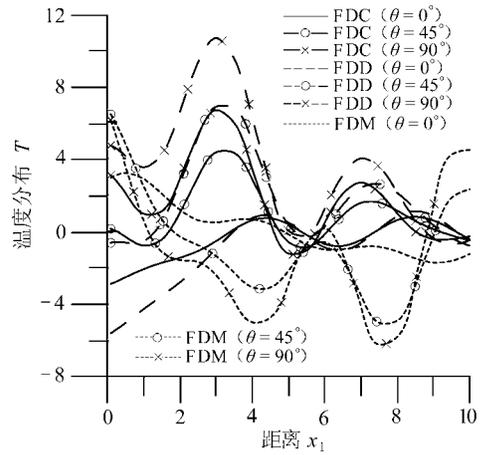
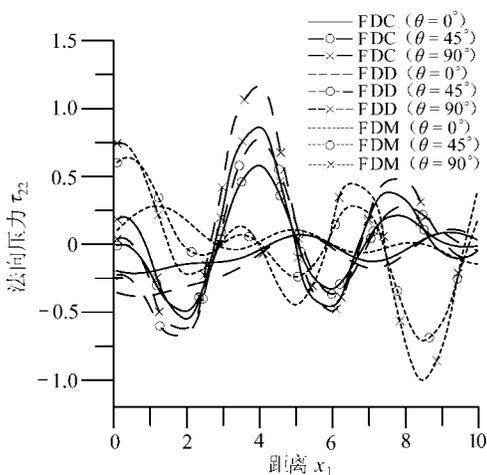
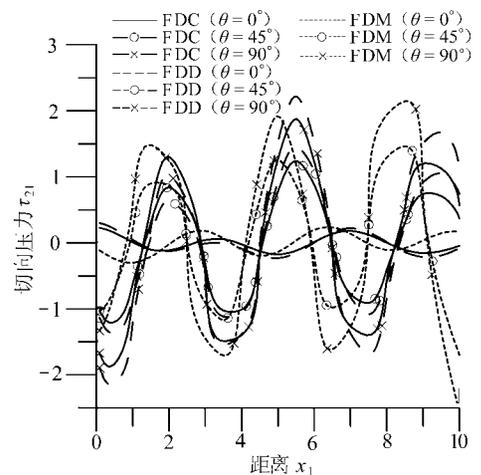
由图 2(a) 和图 2(b) 可以看出, 对所有倾斜角度(即 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$), 集中力和分布力作用时, 其法向应力 t_{22} 和切向应力 t_{21} , 开始急剧增大, 然后在初始平衡位置附近作减幅振荡. 而移动力作用时, 应力 t_{22} 作小幅振荡(见插入的小图)且应力值随着荷载倾斜角 θ 的增大而增大. 图 2(c) 显示, 初始倾角 $\theta = 0^\circ$ 时, 集中力、分布力和移动力作用下, 切向应力偶 m_{23} 的值在初始平衡位置作小幅振荡(见插入的小图). 随着倾斜角的增大, 振荡幅度也增大. 图 2(d) 表明, 对 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 的所有倾角, 集中力和分布力作用时, 温度分布 T 的值, 开始急剧减小, 然后在初始平衡位置附近作减幅振荡. 然而, 移动荷载作用时, 其值作小幅振荡. 图 2(e) 示出黏性流体的法向压力 τ_{22} 随距离 x_1 的变化. 由图 2(e) 可以看出, 对所有倾角, 法向压力值, 开始时增大, 然后在初始平衡位置附近小幅振荡; 而移动荷载作用时, 开始时是减小的, 而后在初始平衡位置附近变为一个常值. 图 2(f) 示出黏性流体中切向压力 τ_{21} 的变化. 由图 2(f) 可以看出, 对于所有类型的力, 初始倾角 ($\theta = 0^\circ$) 时, 切向压力值, 开始增大, 然后振荡; 而当倾角为 $\theta = 45^\circ, 90^\circ$ 时, 其压力值, 开始急剧减小, 然后在初始平衡位置附近作减幅振荡.

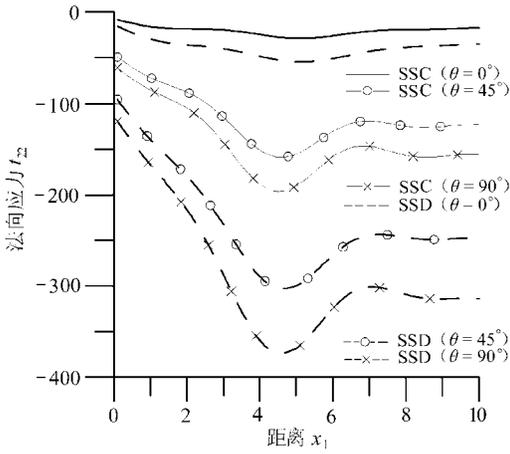
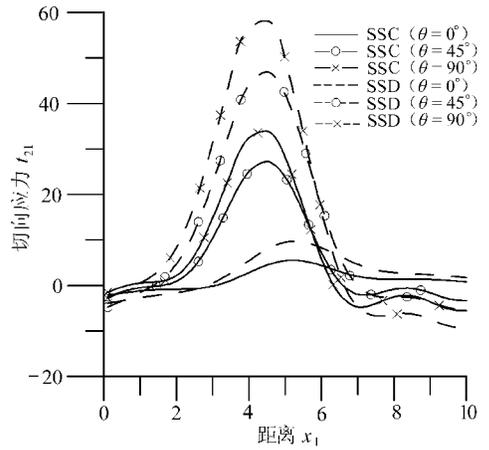
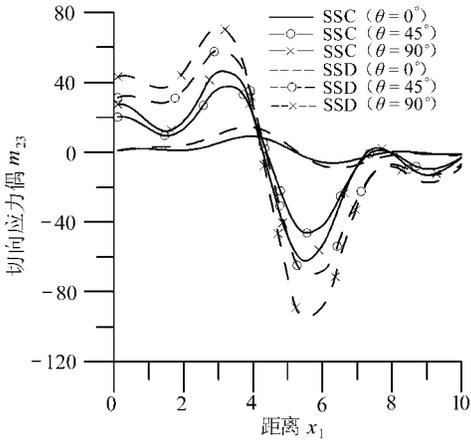
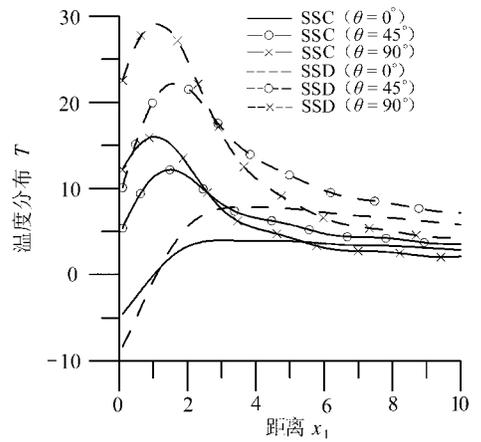
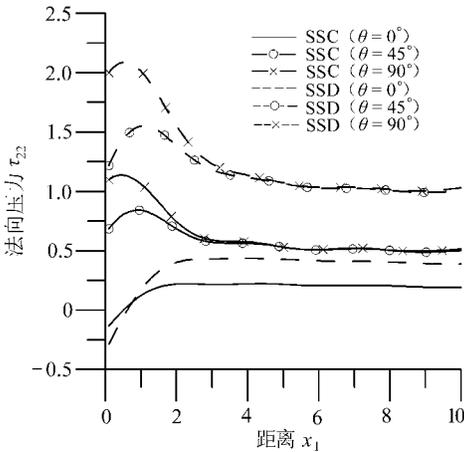
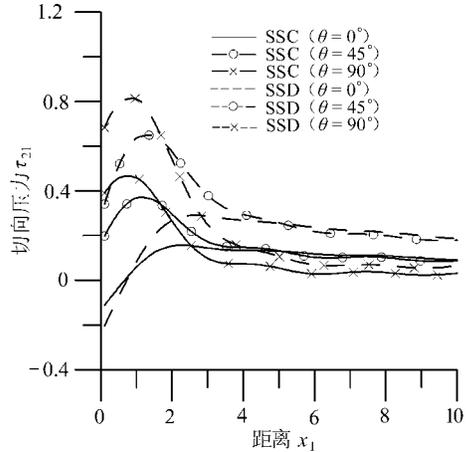
图 3 示出了频域(FD)中应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化.

从图 3(a)、(b)、(e)、(f) 可以看出, 集中力、分布力和移动力作用时, 应力和压力值显示出类似的性态. 初始倾角 ($\theta = 0^\circ$) 时, 这些值在初始平衡位置附近作小幅振荡, 随着倾角 θ 的增大, 振幅也随着增大. 图 3(c) 表明初始倾角 ($\theta = 0^\circ$) 时, 切向应力偶 m_{23} 的值, 开始时减小, 然后在初始平衡位置附近作小幅振荡. 当倾斜角 θ 增大时, 集中力、分布力和移动力的作用时, 其值, 先增大后增幅振荡. 由图 3(d) 可以看出, 初始倾角 ($\theta = 0^\circ$) 时在集中力和分布力作用下, 温度分布 T 值, 在一定范围增大, 然后作增幅振荡. 随着倾斜角的增大, 其振荡幅度减小. 而在移动荷载作用时, 开始减小, 然后在初始平衡位置附近作小幅振荡.

图 4 给出了集中力和分布力作用时, 稳态(SS)情况下的应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化.

由图 4 可以看出, 集中力和分布力作用时, 应力、温度分布和压力的变化形状大致是相同的, 不同的是振幅大小. 均布力作用下的 m_{23} , T , τ_{22} 和 τ_{21} 的值, 大于集中力作用情况. 图 4(a) 表明, 初始倾斜角 ($\theta = 0^\circ$) 时, 法向应力 t_{22} 的振幅很小. 但当倾角增大时, 其值在 $0 \leq x \leq 4$ 区域内急剧减小, 然后增大并达到一个常值. 由图 4(b) 可以看出, 初始倾斜角 ($\theta = 0^\circ$) 时的切向应力 t_{21} 的值, 开始时增大, 在 $4 \leq x \leq 6$ 区域有一小的圆形隆起, 并随着距离 x_1 的增大而减小. 当倾角进一步增大时, 切向应力开始增大, 在区间 (2, 6) 中出现一个大的隆起, 并随着距离 x_1 的增大而减小. 图 4(c) 显示初始倾角 ($\theta = 0^\circ$) 时, 切向应力偶 m_{23} 的值以非常小的振幅在初始平衡位置附近振荡, 而当 $\theta = 45^\circ, 90^\circ$ 时, 开始出现振荡, 然后在 $3 \leq x \leq 5$ 区域内急剧减小, 其后再次开始振荡. 由图 4(c) 可以看出, 切向应力偶 m_{23} 的值, 随着荷载倾角 θ 增

(a) 法向应力 t_{22} (b) 切向应力 t_{21} (c) 切向应力偶 m_{23} (d) 温度分布 T (e) 法向压力 τ_{22} (f) 切向压力 τ_{21} 图3 频域中黏性流体应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化

(a) 法向应力 t_{22} (b) 切向应力 t_{21} (c) 切向应力偶 m_{23} (d) 温度分布 T (e) 法向压力 τ_{22} (f) 切向压力 τ_{21} 图4 稳态情况黏性流体应力、温度分布和压力随距离 x_1 的变化

大而增大. 图 4(d)~(f) 表明, 黏性流体中的温度分布 T 和压力 τ_{22} , τ_{21} 的变化是类似的. 由图 4(d)~(f) 可以看出, 在所有荷载倾角时, 黏性流体中的温度分布和压力值, 开始时增大的, 接着减小, 最后达到一个常值.

8 结 论

本文提出的模型, 对于黏性流体下面的沉积物可视为热弹性微极蜂窝结构材料时, 有着重要的实际意义. 这是一个非常实际的海床模型. Lord-Shulman^[9] 用一般的热弹性微极理论求解了该问题. 可以看到, 倾斜荷载倾斜角度的变化以及荷载类型的变化有着明显的影响. 荷载倾角 θ 较大时, 无论时域或者频域, 应力、温度分布和压力值都变得更加振荡. 还可以发现, 对坐标应用 Galilean 变换后, 黏性流体中的切向应力 t_{21} 、温度分布 T 和压力 τ_{22} , τ_{21} 的值, 随着荷载倾角 θ 的增大而增大, 而法向应力值 t_{22} 则减小. 在均布荷载作用下, 这些量的值比集中荷载作用时更大.

[参 考 文 献]

- [1] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1966, 15(6): 909-923.
- [2] Chung J, Waas A M. Elastic imperfection sensitivity of hexagonally packed circular-cell honeycombs [J]. Proceedings of the Royal Society of London-A, 2002, 458(2028): 2851-2868.
- [3] Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solids: Structure and Properties [M]. Oxford: Pergamon, 1988.
- [4] Huyang F Y, Yan B H, Yang D U. The effects of material elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method[J]. Engineering Computations, 2002, 19(7): 742-763.
- [5] Liang S, Chen H L. Investigation on the square cell honeycomb structures under axial loading[J]. Composite Structures, 2006, 42(4): 446-454.
- [6] Triplett M H, Schonberg W P. Static and dynamic finite element analysis of honeycomb structure[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1998, 6: 95-113.
- [7] Wang X L, Stronge W J. Micropolar theory for two-dimensional stresses in elastic honeycomb[J]. Proceedings of the Royal Society of London-A, 1999, 455(1986): 2091-2116.
- [8] Yang D U, Huang F Y. Analysis of Poisson's ratio for micropolar elastic rectangular plate using the finite element method[J]. Engineering Computations, 2001, 18(7/8): 1012-1030.
- [9] Lord H, Shulman Y A. Generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(5): 299-309.
- [10] Fehler M. Interactions of seismic waves with a viscous liquid layer[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1982, 72(1): 55-72.
- [11] Fung Y C. Foundations of Solid Mechanics [M]. New Delhi: Prentice Hall, 1968.
- [12] Kumar R, Ailawalia P. Elastodynamics of inclined loads in a micropolar cubic crystal[J]. Mechanics and Mechanical Engineering, 2005, 9(2): 57-75.
- [13] Gauthier R D. Mechanics of Micropolar Media [M]. In: Brulin O, Hsieh R K T, Eds. Experimental Investigations on Micropolar Media. Singapore: World Scientific, 1982.
- [14] White F M. Fluid Mechanics [M]. McGraw Hill International edition, 1994.

Elastodynamic Analysis at an Interface of Viscous Fluid/Thermoelastic Micropolar Honeycomb Medium due to Inclined Load

Rajneesh Kumar, Rajani Rani Gupta

(Department of Mathematics, Kurukshetra University,
Kurukshetra -136 119, India)

Abstract: The effect of angle of inclination at the interface of a viscous fluid and thermoelastic micropolar honeycomb solid due to inclined load is investigated. The inclined load was assumed to be a linear combination of normal load and tangential load. The Laplace transform with respect to time variable and Fourier transform with respect to space variable were applied to solve the problem. The expressions in transformed domain of stresses, temperature distribution and pressures were obtained by introducing potential functions. The numerical inversion technique was used to obtain the solution in the physical domain. The expressions in frequency domain and for steady state situation were also obtained with the appropriate change of variables. Graphical representation due to the response of different sources and change of angle of inclination were shown. Some particular cases were also discussed.

Key words: viscous fluid; thermoelastic micropolar honeycomb material; inclined load; time harmonic; steady state