

微分约束方法在求解二阶流体 精确解上的应用*

张道祥^{1,2}, 冯素晓¹, 卢志明¹, 刘宇陆¹

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 安徽师范大学 数学与计算机科学学院, 安徽 芜湖 241000)

(我刊编委刘宇陆来稿)

摘要: 利用微分约束方法研究了二阶流体的精确解. 通过使用一阶微分约束条件, 不仅获得了具有抽吸作用下的 Couette 和 Poiseuille 平行流、碰撞射流、平面拉伸流等具有明确物理意义的流动解, 而且获得了两类新的精确解. 所得精确解表明二阶流体的流动特性不仅依赖于物质粘性参数, 而且依赖物质弹性参数. 此外讨论了部分边值问题.

关键词: 非 Newton 流体; 微分约束方法; 二阶流体
中图分类号: O357; O302 **文献标识码:** A

引 言

Полубинин^[1,2] 提出并发展的微分约束方法是获得非线性偏微分方程精确解的一个有效途径. 例如, Andreev 等^[3] 曾利用微分约束方法得到了水动力学中几类流动的孤子解. 另外, Olver 和 Rosenau^[4], Olver^[5] 以及 Levi 和 Winternitz^[6] 等研究发现部分约化方法(比如非经典对称群方法、局部不变量方法、分离变量方法等)和 Clarkson-Kruskal 直接方法都可以归为微分约束方法.

考虑偏微分方程

$$F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}, \dots) = 0. \quad (1)$$

微分约束方法求解上述方程时需要增加额外的微分方程(微分约束):

$$G(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}, \dots) = 0. \quad (2)$$

通常, 超定系统(1)和(2)需要进行相容性分析. 若约束条件(2)被指定优先考虑, 则它在选择函数上具有充分的自由度(即包含任意的决定函数). 系统(1)和(2)的相容性分析应该提供确定决定函数结构的条件^[7]. 求解这个待定函数的方程, 再把得到的解代入到微分约束方程, 我们可以得到一个关于 ϕ 的方程:

$$T(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}, \dots) = 0. \quad (3)$$

* 收稿日期: 2008-02-19; 修订日期: 2009-02-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772110)

作者简介: 张道祥(1979—), 男, 安徽天长人, 博士(E-mail: zdxiangp@yahoo.cn);

卢志明, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-21-56337398; E-mail: zmlu@shu.edu.cn).

求解方程(3), 再把得到的解(带有任意变量)代入原始方程, 我们就可以得到原始方程的一个精确解.

近20年里, 非 Newton 流体在人们生活中以及工业应用上变得越来越重要, 如血液、某些油脂、涂料以及聚合物溶液是非 Newton 流体最常见的例子. 所以许多研究者希望能求解非 Newton 流体运动方程, 为生产应用提供一些理论指导, 同时也可以为实验、数值以及渐进解提供检验依据. 非 Newton 流体有许多近似模型, 其中研究最广泛的是二阶流体. 一些方法已被用来求二阶非 Newton 流体运动的精确解, 例如 Nemenyi^[8]通过假设涡量与受到一个均匀流扰动的流函数成比例, 运用逆方法求得非 Newton 流体的几类精确解. Hayat 等^[9-10], Labropulu^[11], Mohyuddin 等^[12], Siddiqui 等^[13-14]和谢松柏^[15]运用同样的方法研究二阶非 Newton 流体流动问题; 刘慈群, 黄军旗和朱文辉^[16-18]利用积分变换方法研究了环管中二阶流体运动的解析解; Y r soy^[19]利用李群理论获得了指数类型的精确解; 沈芳等^[20]将分数阶微积分引入到二阶流体的本构关系中, 得到了广义二阶流体涡流速度场和温度场的精确解. Tan, Xu 等学者^[21-22]将广义的二阶非 Newton 流体的研究拓展到非定常流问题.

本文目的是采用微分约束方法研究二阶流体的精确解. 首先给出非 Newton 二阶流体运动的基本控制方程. 接着用一阶微分约束方法得到二阶非 Newton 流体两类新的精确解. 同时为了深入研究流体的特性, 我们结合流函数图形, 分析了其物理意义. 最后对本文的结果进行了总结.

1 基本方程

不可压缩平面二阶流体的流场控制方程为

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho \mathbf{b}, \quad (5)$$

其中, $\mathbf{V} = (u(x, y), v(x, y))$ 是速度向量, \mathbf{f} 是体力, ρ 是密度, \mathbf{T} 是 Cauchy 应力张量^[23]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^T, \quad (6)$$

其中, μ , α_1 和 α_2 是可以测量的物质常数, 它们分别表示流体的粘性、弹性以及横向粘性. \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 分别是第一和第二阶 Rivlin-Ericksen 张量:

$$\mathbf{A}_1 = (\operatorname{grad} \mathbf{V}) + (\operatorname{grad} \mathbf{V})^T, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} + \mathbf{A}_1(\operatorname{grad} \mathbf{V}) + (\operatorname{grad} \mathbf{V})^T \mathbf{A}_1. \quad (7)$$

将速度向量场 \mathbf{V} 和应力张量 \mathbf{T} 代入二阶流体连续性方程(4)和运动方程(5), 并忽略体力, 得到(Kaloni 和 Siddiqui^[24])

$$u_x + v_y = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho(uu_x + vv_y) = & \mu \nabla^2 u + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [2uu_{xx} + 2vu_{xy} + 4(u_x)^2 + 2v_x(v_x + u_y)] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} [2u_xu_y + 2v_xv_y + \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] (v_x + u_y)] \right\} + \\ & \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} [4(u_x)^2 + (v_x + u_y)^2] - p_x, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho(uv_x + vv_y) = & \mu \nabla^2 v + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] (v_x + u_y) + 2u_xu_y + 2v_xv_y \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} [2vv_{yy} + 2w_{xy} + 4(v_y)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} (v_x + u_y)] \right\} + \end{aligned}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} [4(v_y)^2 + (v_x + u_y)^2] - p_y, \quad (10)$$

这里 $p(x, y)$ 是流体的压力. 假设二阶流体的运动与热动力学相容, 物质常数必须满足如下的限制条件^[25]:

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \quad (11)$$

由连续性方程(4), 我们可引入流函数 $\phi(x, y)$,

$$u = \phi_y, v = -\phi_x. \quad (12)$$

将式(11)和(12)代入方程(9)、(10), 消去压力项, 可得

$$\rho \frac{\partial(\phi, \dots^2\phi)}{\partial(x, y)} + \mu \dots^4\phi - \alpha_1 \frac{\partial(\phi, \dots^4\phi)}{\partial(x, y)} = 0, \quad (13)$$

其中

$$\frac{\partial(\phi, \phi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial x}, \dots^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \dots^4\phi = \dots^2(\dots^2\phi).$$

求出方程(13)的解后, 我们就可以根据式(12)求得速度分量, 通过方程(9)、(10)便可以得到压力.

2 解析结果与讨论

我们假设一阶线性微分约束

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = f(y), \quad (14)$$

这里, $f(y)$ 不是任意的函数, 通常它必须满足方程(13)和(14)的相容条件. 将方程(13)和(14)进行相容性分析后, 我们得到一个关于 $f(y)$ 的五阶常微分方程:

$$\begin{aligned} \rho[f(y)f''(y) - f'(y)f''(y)] + \mu f^{(4)}(y) = \\ \alpha_1[f(y)f^{(5)}(y) - f'(y)f^{(4)}(y)], \end{aligned} \quad (15)$$

此式即为方程(13)、(14)的相容条件.

为了构造精确解, 对方程(14)进行积分得到

$$\phi(x, y) = xf(y) + g(y). \quad (16)$$

将方程(16)代入方程(13), 并利用相容条件(15), 得到 $g(y)$ 满足的如下常微分方程:

$$\begin{aligned} \rho[f(y)g''(y) - g'(y)f''(y)] + \mu g^{(4)}(y) = \\ \alpha_1[f(y)g^{(5)}(y) - g'(y)f^{(4)}(y)]. \end{aligned} \quad (17)$$

求解方程(15)和(17)后, 我们就可以得到形如方程(16)的二阶非 Newton 流体的精确解.

相容性条件(15)是一个五阶非线性常微分方程, 其通解不易求出, 而我们发现 $f(y) = a + by$ 是满足方程(15)的. 下面, 我们将分3种情况来求出原方程的精确解.

情形1 $f(y) = a = \text{const}$

(a) $a = 0$

此时由方程(17), 我们可以得到 $g^{(4)}(y) = 0$, 即

$$g(y) = c_1y^3 + c_2y^2 + c_3y + c_4 \quad (18)$$

所以有

$$\phi(x, y) = c_1y^3 + c_2y^2 + c_3y + c_4, \quad (19)$$

$$v(x, y) = 0, \quad (20)$$

$$u(x, y) = 3c_1y^2 + 2c_2y + c_3. \quad (21)$$

在这种情况下,我们可以看出二阶流体的流动类型是平行流. 如果 $c_1 \neq 0$, 流函数表示的是 Poiseuille 流. 如果 $c_1 = 0, c_2 \neq 0$, 流函数代表的是简单 Couette 流, 其流动的速度曲线是 y 的线性函数. 图 1 给出了 $c_1 = 0, c_2 = 10, c_3 = 1, c_4 = -1$ 时的流线, 它表示的是简单 Couette 流动.

(b) $a \neq 0$

由方程(17), 我们可以得到

$$\rho a g''(y) + \mu g^{(4)}(y) - a \alpha_1 g^{(5)}(y) = 0. \tag{22}$$

求解方程(22) 有

$$g(y) = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 e^{p_1 y} + c_5 e^{-p_2 y}, \tag{23}$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为任意常数,

$$p_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\rho a^2 \alpha_1}}{2a\alpha_1}, \quad p_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\rho a^2 \alpha_1}}{2a\alpha_1}, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

由式(16), 得到流函数和速度分量分别为

$$\phi(x, y) = ax + c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 e^{p_1 y} + c_5 e^{-p_2 y}, \tag{24}$$

$$v(x, y) = -a, \tag{25}$$

$$u(x, y) = c_2 + 2c_3 y + c_4 p_1 e^{p_1 y} - c_5 p_2 e^{-p_2 y}. \tag{26}$$

在这种情况下, 流向速度和坐标 x 无关, 而垂向有一个常值的吹(吸)力. 图 2 给出的是 $a = c_3 = 10, \alpha_1/\rho = 1/10, \mu/\rho = 1/2, c_1 = c_2 = 1$ 和 $c_4 = c_5 = 0$ 时的流线, 表示的是带有垂向抽吸力的简单 Couette 流. 流线由于抽吸作用而向下弯曲. 精确解(24) ~ (26) 也曾被 Labropulu^[11] 利用逆方法获得.

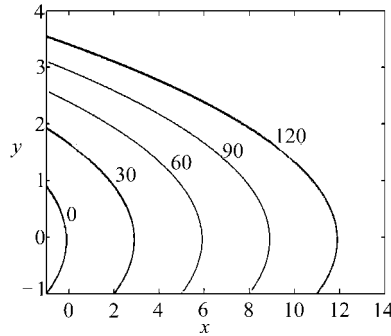
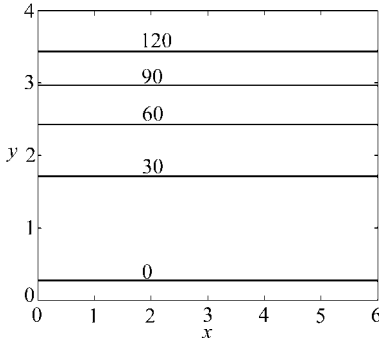


图 1 流线图($\phi(x, y) = y - 1 + 10y^2$) 图 2 流线图($\phi(x, y) = 10x + y + 1 + 10y^2$)

若 $\alpha_1 = 0$, 此时流体退化为 Newton 流体. 利用相同的方法, 我们可以得到 Newton 流体的流函数和速度分别为

$$\phi(x, y) = ax + c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 e^{-p_0 y}, \tag{27}$$

$$v(x, y) = -a, \tag{28}$$

$$u(x, y) = c_2 + 2c_3 y - c_4 p_0 e^{-p_0 y}, \tag{29}$$

此处 $p_0 = a/\mu$. 显然此精确解不能从二阶流体的精确解当 $\alpha_1 = 0$ 时退化而来.

考虑满足二阶流体式(24) ~ (26) 以及 Newton 流体式(27) ~ (29) 的边值问题. 假设岩浆流体为二阶流体, 其上覆一层岩板, 岩板位于 $y = 0$ 处, 取 y 的正向为从岩板垂直向下, 边界条件为

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(x, \infty) = 0, \quad v(x, \infty) = -v_0 \quad (v_0 > 0), \tag{30}$$

其中, u_0 为岩板速度, v_0 为岩浆流体渗入岩板的速度.

由式 (24) ~ (26) 和 (30) 得到满足边界条件的二阶流体的精确解为

$$u(x, y) = u_0 e^{-\left(\sqrt{\mu^2 + 4\rho_0^2 \alpha_1} y\right) / (2v_0 \alpha_1)}, \quad v(x, y) = -v_0, \quad (31)$$

由式 (27) ~ (29) 以及满足边界条件 (30) 的 Newton 流体的精确解为

$$u(x, y) = u_0 e^{-v_0 \rho y / \mu}, \quad v(x, y) = -v_0. \quad (32)$$

图 3 给出了 Newton 流体和二阶流体的流函数图, 此处 $v_0 = 1$, $\mu/\rho = 1/2$, $u_0 = 10$, 图中流函数等值线从下至上分别为 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1/\rho = 1/10$, $\alpha_1/\rho = 1/5$ 和 $\alpha_1/\rho = 1/2$. 由图 3 以及精确解 (31) 和精确解 (32) 可知, 二阶流体的流动特性不仅依赖于物质粘性常数 μ , 同时也依赖于物质弹性常数 α_1 . 同时, 根据图 3 我们发现 α_1 取值越小, 二阶流体精确解的数值曲线越趋近于 Newton 流体精确解的数值曲线, 这说明满足边界条件的 Newton 流体的精确解可以由二阶流体的精确解当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时得到. 很显然精确解 (31) 的极限就是当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时的精确解 (32).

情形 2 $f(y) = by$, $b \neq 0$

利用方程 (17), 我们得到

$$\rho b y g^{\ominus}(y) + \mu g^{(4)}(y) - b y \alpha_1 g^{(5)}(y) = 0. \quad (33)$$

解出方程 (33), 我们得到解

$$g(y) = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y H\left[\left[-\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, -L\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] + \frac{c_5}{\pi(\mu + 2\alpha_1 b)(\mu + \alpha_1 b)} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \left\{ NM J y \Gamma(L) H\left[\left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 1-L\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] + \frac{2\alpha_1^2 b^2 \Gamma(1-L)}{NM} y^{2L+1} H\left[\left[L + \frac{1}{2}\right], \left[L + \frac{3}{2}, L+1\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] \right\} dy dy, \quad (34)$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为任意常数,

$$L = \frac{\alpha_1 b + \mu}{2\alpha_1 b}, \quad M = \left[-\frac{\rho}{\alpha_1}\right]^{-L/2}, \quad N = 2^L,$$

$H([l], [t, m], n)$ 为超几何函数, 详细定义见参考文献 [26].

$$J = -\cos(L\pi)(\mu b \alpha_1 + \mu^2 + 2b\alpha_1 \mu + 2b^2 \mu^2),$$

$\Gamma(z)$ 是 Gamma 函数. 我们可以得到流函数和速度分别为

$$\phi(x, y) = bxy + c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y H\left[\left[-\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, -L\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] + \frac{c_5}{\pi(\mu + 2\alpha_1 b)(\mu + \alpha_1 b)} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \left\{ NM J y \Gamma(L) H\left[\left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 1-L\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] + \frac{2\alpha_1^2 b^2 \Gamma(1-L)}{NM} y^{2L+1} H\left[\left[L + \frac{1}{2}\right], \left[L + \frac{3}{2}, L+1\right], \frac{y^2 \rho}{4\alpha_1}\right] \right\} dy dy, \quad (35)$$

$$v(x, y) = -by, \quad (36)$$

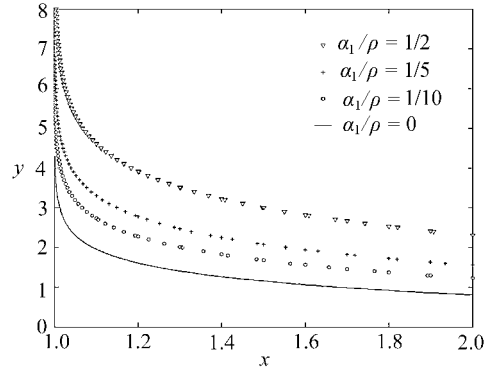
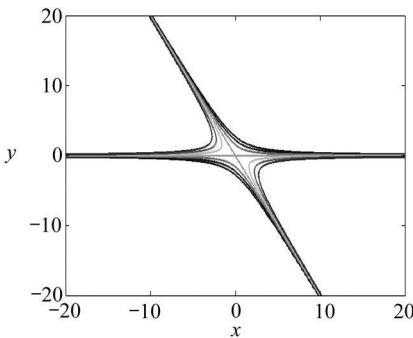


图 3 Newton 流体和二阶流体的流线图

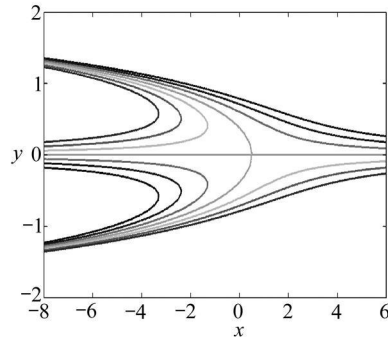
$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & bx + c_2 + 2c_3y + c_4H \left[\left[-\frac{1}{2} \right], \left[\frac{3}{2}, -L \right], \frac{y^2\rho}{4\alpha_1} \right] + \\
 & \frac{c_4b\rho}{3(\alpha_1b + \mu)} y^2 H \left[\left[\frac{1}{2} \right], \left[\frac{5}{2}, -L+1 \right], \frac{y^2\rho}{4\alpha_1} \right] + \\
 & \frac{c_5}{\pi(\mu + 2\alpha_1b)(\mu + \alpha_1b)} \int_{-\infty}^y \left\{ NMJy\Gamma(L)H \left[\left[\frac{3}{2}, 1-L \right], \left[\frac{1}{2} \right], \frac{y^2\rho}{4\alpha_1} \right] + \right. \\
 & \left. \frac{2\alpha_1^2b^2\Gamma(1-L)}{NM} y^{2L+1} H \left[\left[L + \frac{1}{2} \right], \left[L + \frac{3}{2}, L+1 \right], \frac{y^2\rho}{4\alpha_1} \right] \right\} dy. \quad (37)
 \end{aligned}$$

当 $c_4 \neq 0$ 或者 $c_5 \neq 0$, 我们可以得到一类新的精确解. 特别当 $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ 时, 精确解表示平面拉伸流动^[27-28], 它可由 Taylor 四滚筒机近似地实现^[29]. 图 4 给出了 $b = -4, c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = 0, c_3 = -2$ 的流函数图, 它表示两个射流的碰撞. 图 5 是 $b = -4, c_4 = 2, c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 0, \alpha_1/\rho = 1/10, \alpha_1/\rho = 1/2$ 时的流函数图.



$$(\psi(x, y) = -4xy - 2y^2)$$

图 4 流线图



$$(\psi = 2yH\left[\left[-\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right], \frac{5y^2}{2}\right] - 4xy)$$

图 5 流线图

当 $\alpha_1 = 0$, 此时流体为 Newton 流体. 其流函数和速度分量分别为

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y) = & bxy + c_1 + c_2y + c_3y^2 + \frac{1}{4}c_4y^2 \frac{\sqrt{\pi}\text{erf}(p_3y)}{p_3} - \\
 & \frac{1}{8}c_4 \frac{\sqrt{\pi}\text{erf}(p_3y)}{p_3^3} + \frac{c_4y e^{-y^2p_3^2}}{4p_3^2} + c_4 \frac{\sqrt{\pi}\text{erf}(p_3y)}{4p_3^3}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$v(x, y) = -by, \quad (39)$$

$$u(x, y) = bx + c_2 + 2c_3y + c_4 \left[\frac{y\sqrt{\pi}\text{erf}(p_3y)}{2p_3} + \frac{e^{-p_3^2y^2}}{2p_3^2} \right], \quad (40)$$

此处, $p_3 = \sqrt{b\rho/(2\mu)}$, $\text{erf}(x)$ 是误差函数, 同时我们再一次发现 Newton 流体的解不能从非 Newton 二阶流体的解当 $\alpha_1 = 0$ 时退化而来.

情形 3 $f(y) = a + by, a \neq 0$ 且 $b \neq 0$

同样运用方程(17), 我们获得 $g(y)$ 所满足的微分方程

$$\rho(a + by)g^{(4)}(y) + \mu g^{(4)}(y) - \alpha_1(a + by)g^{(5)}(y) = 0. \quad (41)$$

求解方程(41), 我们得到

$$\begin{aligned}
 g(y) = & c_1 + c_2y + c_3y^2 + c_4 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y e^{p_4y} K \left[\frac{1}{2} - L, 1 - 2L, -\frac{2p_4}{b}(a + by) \right] dy dy dy - \\
 & c_5 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \sin(2\pi L)(a + by) \left\{ -b\alpha_1 \pi^{0.5} 2^{1+2L} H \left[\left[\frac{1}{2} \right], \left[\frac{3}{2}, 1-L \right], \frac{(a + by)^2\rho}{4\alpha_1 b^2} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left[B\left(L, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) - B\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \times S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \right] \cdot 2^{2L-1} \pi \mu \Gamma(1-L) \Gamma\left(L-\frac{1}{2}\right) \Big\} dy dy, \quad (42)$$

其中, $K(z, t, l)$ 为 Kummer 函数, $B(z, t)$ 为一阶 Bessel 函数, $S(z, t)$ 为 Struval 函数, $p_4 = \sqrt{\rho \alpha_1 b^2 / (\alpha_1 b)}$. 由 (16) 式, 我们得到流函数和速度分别为

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + \\ & c_4 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y e^{p_4 y} K\left[\frac{1}{2} - L, 1 - 2L, -\frac{2p_4}{b}(a+by)\right] dy dy dy - \\ & c_5 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y \sin(2\pi L)(a+by) \left\{ -b\alpha_1 \pi^{0.5} 2^{1+2L} H\left[\left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 1-L\right], \frac{(a+by)^2 \rho}{4\alpha_1 b^2}\right] \right\} + \\ & \left[B\left(L, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) - B\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \times \right. \\ & \left. S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \right] \cdot 2^{2L-1} \pi \mu \Gamma(1-L) \Gamma\left(L-\frac{1}{2}\right) \Big\} dy dy + \\ & (a+by)x, \end{aligned} \quad (43)$$

$$v(x, y) = -(by + a), \quad (44)$$

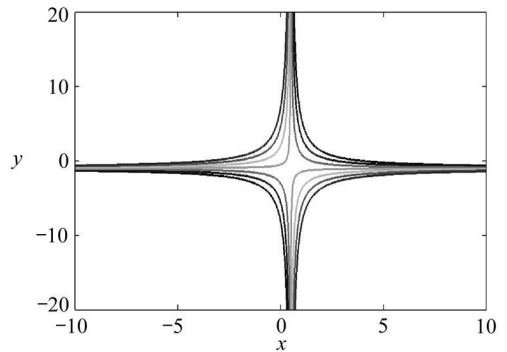
$$\begin{aligned} u(x, y) = & bx + c_2 + 2c_3 y + c_4 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^y e^{p_4 y} K\left[\frac{1}{2} - L, 1 - 2L, -\frac{2p_4}{b}(a+by)\right] dy dy + \\ & c_5 \int_{-\infty}^y \sin(2\pi L)(a+by) \left\{ -b\alpha_1 \pi^{0.5} 2^{1+2L} H\left[\left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 1-L\right], \frac{(a+by)^2 \rho}{4\alpha_1 b^2}\right] \right\} + \\ & \left[B\left(L, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) - B\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \times \right. \\ & \left. S\left(L-1, -\frac{p_4(a+by)}{b}\right) \right] \cdot 2^{2L-1} \pi \mu \Gamma(1-L) \Gamma\left(L-\frac{1}{2}\right) \Big\} dy. \end{aligned} \quad (45)$$

在这种情况下, 当 $c_4 \neq 0$ 或 $c_5 \neq 0$, 我们得到了另外一类新的精确解. 另外令 $a = b = -4$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ 还可以得到一个碰撞解, 如图 6, 其流动形式与图 4 中的碰撞流流动形式不同.

3 结 论

本文利用微分约束方法研究了非 Newton 二阶流体的精确解. 我们得到了常见的 Couette 流动和 Poiseuille 流动、碰撞射流、平面拉伸流动, 也得到了超几何函数构成的一类新解以及由 Kummer 函数、Bessel 函数、Struval 函数以及超几何函数

组合的另一类新的精确解. 与 Newton 流体解比较, 可以发现二阶流体的流动特性不仅依赖于物质粘性常数 μ , 同时也依赖于物质弹性常数 α_1 , 且 Newton 流体的解不能通过二阶流体的解由 $\alpha_1 = 0$ 退化而来. 对于满足边界条件的 Newton 流体的精确解可以通过二阶流体的解当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时得到. 本文得到的两类新的精确解的物理特性有待于进一步研究.



$$(\phi(x, y) = -4x - 4xy + 1 + 2y)$$

图 6 流线图

[参 考 文 献]

- [1] Яненко Н Н. *Избранные Труды* [M]. Москва: Наука, 1991.
- [2] Сидоров А Ф, Шапеев В П, Яненко Н Н. *Метод Дифференциальных Связей и Его Приложения в Газовой Динамике* [M]. Новосибирск: Наука, 1984.
- [3] Andreev V K, Kaprtsov O V, Pukhnachev V V, et al. *Applications of Group-Theoretic Methods in Hydrodynamics* [M]. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [4] Olver P, Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations[J]. *SIAM J Appl Math*, 1987, **47**(2): 263-278.
- [5] Olver P. Direct reduction and differential constraints[J]. *Proceedings of the Society of London, Series A*, 1994, **444**(1922): 509-523.
- [6] Levi D, Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation[J]. *J Phys A: Math Gen*, 1989, **22**(15): 2915-2924.
- [7] Polyanin A D, Zaitsev V F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations* [M]. Florida: A CRC Press Company, 2004.
- [8] Nemenyi P F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1951, **2**(11): 123-151.
- [9] Hayat T, Mohyuddin M R, Asghar S. Some inverse solutions for unsteady fluid[J]. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 2005, **21**(1): 1-20.
- [10] Asghar S, Mohyuddin M R, Hayat T, et al. On inverse solutions of unsteady Riabouchinsky flows of second grade fluid[J]. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 2006, **22**(2): 221-229.
- [11] Labropulu F. A few more exact solutions of a second grade fluid via inverse method[J]. *Mech Res Communications*, 2000, **27**(6): 713-720.
- [12] Mohyuddin M R, Ahmad A. Corrigendum to: inverse solutions for a second grade fluid for porous medium channel and Hall current effects by Muhammad R Mohyuddin and Ehsan Ellahi Ashraf[J]. *Proc Indian Acad Sci (Math Sci)*, 2007, **117**(2): 283-285.
- [13] Siddiqui A M, Mohyuddin M R, Hayat T, et al. Some more inverse solutions for steady flows of a second grade fluid[J]. *Arch Mech*, 2003, **55**(4): 373-387.
- [14] Siddiqui A M, Islam S, Ghori Q K. Two dimensional viscous incompressible flows in a porous medium [J]. *Journal of Porous Media*, 2006, **9**(6): 591-596.
- [15] 谢松柏. 非牛顿流体的某些反解[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 2001, **37**(1): 19-21.
- [16] 刘慈群, 黄军旗. 非牛顿流体管内不定常流的解析解[J]. *应用数学和力学*, 1989, **10**(11): 939-946.
- [17] 朱文辉, 刘慈群. 二阶非 Newton 流体环管流动解析解[J]. *应用数学和力学*, 1993, **14**(3): 195-201.
- [18] 黄军旗, 刘慈群. 环空管内粘弹性流体不定常旋转流的解及流动特性分析[J]. *应用数学和力学*, 1997, **18**(6): 499-506.
- [19] M·禹儒索一. 第二梯度流体的蠕变流和热传导相似解[J]. *应用数学和力学*, 2004, **25**(4): 425-432.
- [20] 沈芳, 谭文长, 赵耀华, 等. 广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散[J]. *应用数学和力学*, 2004, **25**(10): 1053-1060.
- [21] Tan W C, Xian F, Wei L. An exact solution of unsteady Couette flow of generalized second grade fluid[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2002, **47**(21): 1783-1785.
- [22] Xu M Y, Tan W C. Theoretical analysis of the velocity field, stress field and vortex sheet of generalized second order fluid with fractional anomalous diffusion[J]. *Science in China, Ser A*, 2001, **44**

- (11): 1387-1399.
- [23] Coleman B D, Noll W. An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics [J]. Arch Rat Mech Anal, 1960, **6**: 355-370.
- [24] Kaloni P N, Siddqui A M. The flow of a second grade fluid [J]. Int J Engng Sci, 1983, **21**(10): 1157-1169.
- [25] Rivlin R S, Ericksen J L. Stress deformation relations for isotropic materials [J]. J Rat Mech Anal, 1955, **4**(4): 323-425.
- [26] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [27] Thomas A H, Todd B D. On the Arnold cat map and periodic boundary conditions for planar elongational flow [J]. Molecular Physics, 2003, **101**(23): 3445-3454.
- [28] d' Avino G, Maffettone P L, Hulsen M A, et al. Numerical simulation of planar elongational flow of concentrated rigid particle suspensions in a viscoelastic fluid [J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 2008, **150**(2/3): 65-79.
- [29] 陈文芳. 非 Newton 流体力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1984.

Application of Differential Constraints Method on Solving Exact Solutions of a Second-Grade Fluid

ZHANG Dao-xiang^{1,2}, FENG Su-xiao¹, LU Zhi-ming¹, LIU Yu-lu¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,

Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. College of Mathematics and Computer Science,

Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, P. R. China)

Abstract: Differential constraints method is used to investigate analytical solutions for a second-grade fluid flow. By the first-order differential constraint condition, some exact solutions of Poiseuille flows, jet flows and Couette flows subjected to suction or blowing forces, planar elongational flows were derived. In addition, two new classes of exact solutions for a second-grade fluid flow were found. Exact solutions obtained show that the non-Newtonian second-grade flow behavior depends on not only the material viscosity but also the material elasticity. Finally some boundary value problems were discussed.

Key words: non-Newtonian fluid; differential constraints method; second-grade fluid